νέο φροντιστήριο

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 186
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142
Α3.
i. γ)
ii. δ)
Α4.

α) Συνεχής, $\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$, $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$

β) Υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

γ) $(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$, θετικό , x_0 , $+\infty$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

Α5.
i. Α
ii. Έστω $P(x)=-2x^3+3x^2+x-2$. Για $x\neq 0$ έχουμε $P(x)=-2x^3(1-\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{x^3})$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(1-\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{x^3})=1-0-0+0=1$ και $\lim_{x\to+\infty}(-2x^3)=-\infty$ είναι $\lim_{x\to+\infty}P(x)=-\infty=\lim_{x\to+\infty}(-2x^3)$.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΝΜ είναι όμοια $(NM//B\Gamma)$ οπότε έχουμε: $\dfrac{B\Gamma}{MN}=\dfrac{A\Delta}{AE}\Leftrightarrow\dfrac{10}{(MN)}=\dfrac{5}{5-x}$

$\Leftrightarrow(MN)=2(5-x)$, με $2(5-x)>0\Leftrightarrow x<5$ και $x>0$.
Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι $E=MN\cdot NK$ και η περίμετρος του $\Pi=2MN+2NK$. Οπότε $E(x)=2(5-x)\cdot x=-2x^2+10x$, $x\in(0,5)$ και $\Pi(x)=2\cdot2\cdot(5-x)+2x=20-2x$, $x\in(0,5)$.

β) Η συνάρτηση $E(x)=-2x^2+10x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta=(0,5)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων, άρα και συνεχής.
Είναι $E'(x)=(-2x^2+10x)'=-4x+10$, με $E'(x)=0\Leftrightarrow-4x+10=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Πίνακας προσήμου της $E'(x)$

x	0		$\frac{5}{2}$		5
$E'(x)$		+	0	-	

Άρα, $E'(x)>0$ στο $\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ και $E'(x)<0$ στο $\left(\dfrac{5}{2},5\right)$, οπότε η Ε παρουσιάζει μέγιστο στο $x=\dfrac{5}{2}$.

Δηλαδή το εμβαδό του ορθογωνίου μεγιστοποιείται όταν το ύψος του ΚΝ είναι $\frac{5}{2}$ cm και η βάση του είναι $(ΚΛ)=(ΜΝ)=2\left(5-\frac{5}{2}\right)=5\text{cm}$, άρα $(ΚΛ)=2(ΚΝ)$.

γ) Εφόσον ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού Ε είναι $5\text{cm}^2/\text{sec}$, έχουμε $E'(t)=5$, t χρόνος σε sec.

Οπότε $E(t)=-2x^2(t)+10x(t)$ (1) και $\Pi(t)=20-2x(t)$ (2) με $E'(t)=-4x(t)x'(t)+10x'(t)$ (3) και $\Pi'(t)=-2x'(t)$ (4).

Από (1) και (3) είναι $-4x(t)x'(t)+10x'(t)=5$ (5).

Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}(ΒΓ)\cdot(ΑΔ)$, άρα $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}10\cdot5=25\text{cm}^2$.

Έστω σε $t=t_0$ έχουμε $E(t_0)=\frac{32}{100}25\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-2x^2(t_0)+10x(t_0)-8=0\Leftrightarrow x(t_0)=1$

ή $x(t_0)=4$ $\left(\right.$ απορρίπτεται γιατί το εμβαδό αυξάνεται στο $\left.\left(0,\frac{5}{2}\right]\right)$.

Τότε από την (5) με $t=t_0$ και $x(t_0)=1$ έχουμε $-4\cdot1\cdot x'(t_0)+10\cdot x'(t_0)=5\Leftrightarrow x'(t_0)=\frac{5}{6}$.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του ύψους του ορθογωνίου σε $t=t_0$ είναι $\frac{5}{6}\text{cm}/\text{sec}$ και της περιμέτρου του από την (4) είναι $-2\cdot\frac{5}{6}=-\frac{5}{3}\text{cm}/\text{sec}$.

Β2.

- Η συνάρτηση $C(x)=-x\left(-2x^2+10x\right)+10x^2-6\nu x^2+10\nu^3\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow C(x)=2x^3-10x^2+10x^2-6\nu x^2+10\nu^3\Leftrightarrow C(x)=2x^3-6\nu x^2+10\nu^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων, άρα και συνεχής, με

  $C'(x)=\left(2x^3-6\nu x^2+10\nu^3\right)'=6x(x-2\nu)$

  Πίνακας προσήμου $C'(x)$

x	0		2ν		+∞
$C'(x)$		-	0	+	

  Άρα $C'(x)<0$ στο $(0,2\nu)$, $C'(x)>0$ στο $(2\nu,+\infty)$, οπότε η C παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=2\nu$.
  Δηλαδή για να έχει η βιοτεχνία ελάχιστο κόστος πρέπει να παράγονται ημερησίως 2ν μονάδες προϊόντος.
- Εφόσον το κέρδος να μονάδα προϊόντος είναι $\Pi(\nu)=20-2\nu$, το κέρδος από τις 2ν μονάδες είναι $K(\nu)=2\nu(20-2\nu)\Leftrightarrow K(\nu)=40\nu-4\nu^2$ με $\nu\in(0,10]$.
  Η συνάρτηση $K(\nu)$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων στο $(0,10]$, άρα και συνεχής.

$K'(\nu)=\left(40\nu-4\nu^2\right)'=40-8\nu$

Πίνακας προσήμου $K'(\nu)$

ν	0	5	10
$K'(\nu)$	+	0	-

Άρα $K'(\nu)>0$ στο $(0,5)$, $K'(\nu)<0$ στο $(5,10)$, οπότε η K παρουσιάζει μέγιστο στο $\nu=5$.

Επομένως η βιοτεχνία έχει μέγιστο κέρδος όταν απασχολεί 5 εργάτες.

Τότε το μέγιστο κέρδος θα είναι $K(5)=100$ ευρώ, με αντίστοιχο κόστος

$C(10)=2\cdot10^3-6\cdot5\cdot10^2+10\cdot5^3=250$ ευρώ.

Οπότε τα έσοδα της βιοτεχνίας είναι $250+100=350$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

α)

- Στο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$, θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}\Leftrightarrow f(x)=(x-1)h(x), x\neq1$ με $\lim\limits_{x\to1}h(x)=1$.

  Οπότε $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x-1)h(x)=0\cdot1=0$.

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα και συνεχής. Επομένως $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ (1).

- Για κάθε $x,y>0$ ισχύει

  $f(xy)\le xf(y)+yf(x)\Leftrightarrow xf(y)+yf(x)-f(xy)\ge0$ (2).

  Θέτουμε $\varphi(x)=xf(y)+yf(x)-f(xy)$, $x\in(0,+\infty)$,

  οπότε $\varphi(1)=f(y)+yf(1)-f(y)\overset{(1)}{=}y\cdot0=0$.

  Τότε (2) $\Leftrightarrow\varphi(x)\ge\varphi(1)$, για κάθε $x>0$.

  Άρα η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$.

  Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα, γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

  $\varphi'(x)=\left[xf(y)+yf(x)-f(xy)\right]'=f(y)+yf'(x)-yf'(xy)$.

  Άρα από το θεώρημα Fermat ισχύει $\varphi'(1)=0\Leftrightarrow f(y)+yf'(1)-yf'(y)=0$ (3).

  Έχουμε $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$ (δεδομένο).

  Άρα από την (3) προκύπτει $f(y)+y-yf'(y)=0\quad(y>0)$

  $\Leftrightarrow xf'(x)=x+f(x), x>0$, $x>0$

β) Για κάθε $x>0$, είναι: $xf'(x)-f(x)=x \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{x}{x^2} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=(\ln x)'$ και εφόσον

$\frac{f(x)}{x}$, $\ln x$ συνεχείς, υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x>0$ να ισχύει

$\frac{f(x)}{x}=\ln x+c \Leftrightarrow f(x)=x\ln x+cx$.

Από (1) έχουμε $f(1)=0 \Leftrightarrow 1\ln 1+c=0 \Leftrightarrow c=0$.

Άρα $f(x)=x\ln x, x>0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

γ) Έχουμε $f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1, x>0$ και f' παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$f''(x)=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}>0$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, επομένως καθώς το x αυξάνεται η εφαπτομένη της C_f στρέφεται κατά τη θετική φορά.

δ) Έστω $0<\alpha<\beta$.

Ισχύει $\alpha<\frac{2\alpha+\beta}{3}<\beta$ $(\text{γιατί}: 3\alpha<2\alpha+\beta<3\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta)$, οπότε ορίζονται διαστήματα

$\Delta_1=\left[\alpha,\frac{2\alpha+\beta}{3}\right]$, $\Delta_2=\left[\frac{2\alpha+\beta}{3},\beta\right]$.

- Η f είναι συνεχής στα $\Delta_1,\Delta_2\subseteq(0,+\infty)$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\frac{2\alpha+\beta}{3}\right),\left(\frac{2\alpha+\beta}{3},\beta\right)$.

Άρα από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in\left(\frac{2\alpha+\beta}{3},\beta\right)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}}$.

Είναι $0<\alpha<\xi_1<\frac{2\alpha+\beta}{3}<\xi_2<\beta$ και f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, αφού f κυρτή, οπότε

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}<\frac{f(\beta)-f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-2f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)\Leftrightarrow 3f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)<2f(\alpha)+f(\beta)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)<\frac{1}{3}\left[2f(\alpha)+f(\beta)\right].$$

- Αν $\alpha=\beta$ ισχύει $f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)=\frac{1}{3}\left[2f(\alpha)+f(\beta)\right]$.

Άρα ισχύει $f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)\le\frac{1}{3}\left[2f(\alpha)+f(\beta)\right]$ όταν $0<\alpha\le\beta$.

Γ2. Για την g ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[-1,0]$, οπότε πρέπει:

- Η g να είναι συνεχής στο $[-1,0]$.

  Έχουμε ότι:

  Η g είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως πολυώνυμο και $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+\lambda x\right)=0=g(0)$.

  Άρα πράγματι η g είναι συνεχής στο $[-1,0]$.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$, που ισχύει αφού είναι άθροισμα παραγωγίσιμων

  και $g'(x)=\left(x^2+\lambda x\right)'=2x+\lambda$.

- $g(-1)=g(0)\Leftrightarrow(-1)^2+\lambda(-1)=0\Leftrightarrow\lambda=1$.

Γ3.

α) $g(x)=\begin{cases}x^2+x, x<0\\ 0, x=0\\ x\ln x, x>0\end{cases}$

Τα κρίσιμα σημεία της g στο $\Delta=[-1,1]$ είναι τα εσωτερικά σημεία Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με 0.

Είναι $g'(x)=\begin{cases}2x+1, -1<x<0\\ \ln x+1, 0<x<1\end{cases}$

- Εξετάζουμε αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln x=+\infty$$

Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$, οπότε $x=0$ είναι κρίσιμο σημείο της.

- Βρίσκουμε τις ρίζες της g' στα $(-1,0),(0,1)$.

  Αν $x\in(-1,0)$ είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, δεκτή.

  Αν $x\in(0,1)$ είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow \ln x+1=0\Leftrightarrow x=e^{-1}$, δεκτή

  Οπότε τα $-\frac{1}{2},0,e^{-1}$ είναι κρίσιμα σημεία της g στο Δ.

β) Από το ερώτημα 2 έχουμε ότι η είναι συνεχής στο $[-1,0]$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $(0,1]$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0=g(0)$, άρα η g

είναι συνεχής και στο 0.

Τελικά η g είναι συνεχής στο $[-1,1]=\Delta$.

- Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της g στο Δ είναι οι αριθμοί: $-1,-\frac{1}{2},0,e^{-1},1$.

  (δηλαδή τα κρίσιμα σημεία που βρήκαμε στο 3α) και τα άκρα του διαστήματος Δ)

- Εφόσον g συνεχής στο Δ, ισχύει $g(\Delta)=[m,M]$ όπου m το ελάχιστο της στο Δ και M το μέγιστο της g στο Δ.

Είναι: $g(-1)=0$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, $g(0)=0$, $g\left(e^{-1}\right)=-\frac{1}{e}$ και $g(1)=0$

και $-\frac{1}{e}<-\frac{1}{4}<0$

άρα $g(\Delta)=\left[-\frac{1}{e},0\right]$ και ισχύει $-\frac{1}{e}\le g(x)$ (1) για κάθε $x\in\Delta$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=e^{-1}$.

Οπότε αφού $-1<\kappa<0<e^{-1}<1$ ισχύει η (1) άρα $\int_\kappa^1 g(x)dx>\int_\kappa^1 -\frac{1}{e}dx\Leftrightarrow\int_\kappa^1 g(x)dx>\frac{\kappa-1}{e}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται $f^2(x)=4x$, για κάθε $x\in\Delta$. Η f ορίζεται αν και μόνο αν $4x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$. Άρα $\Delta=[0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και η 4x είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε :

$[f^2(x)]'=(4x)'\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=4\Leftrightarrow f(x)f'(x)=2\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2}{f(x)}$ (2) (γιατί $2\neq 0$ άρα και $f(x)\neq 0$ για $x>0$).

Έστω $(x_0,f(x_0))$ σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη με $x_0>0$. Ισχύουν: $f^2(x_0)=4x_0$ (3) και $f'(x_0)=\dfrac{2}{f(x_0)}$. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-f(x_0)=\frac{2}{f(x_0)}(x-x_0)$$

$$A(-1,0)\in(\varepsilon): 0-f(x_0)=\frac{2}{f(x_0)}(-1-x_0)\Leftrightarrow f^2(x_0)=2(1+x_0)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}4x_0=2(1+x_0)\Leftrightarrow x_0=1$$

Από $(3)\Rightarrow f^2(x_0)=4\Leftrightarrow f(x_0)=\pm 2$

Άρα τα σημεία επαφής και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες σε αυτά είναι :

$B(1,2)$, $(\varepsilon_1): y-2=1(x-1)\Leftrightarrow y=x+1$

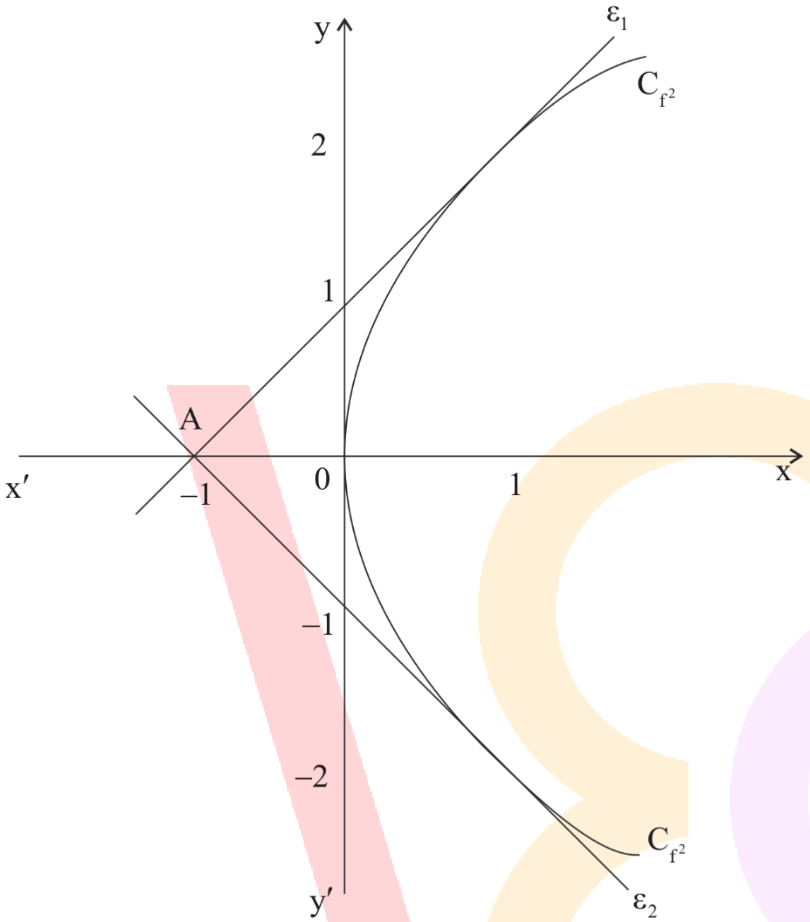
$\Gamma(1,-2)$, $(\varepsilon_2): y+2=-1(x-1)\Leftrightarrow y=-x-1$.

Δ2. Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και εφόσον είναι συνεχής και στο 0, η f είναι συνεχής στο $\Delta=[0,+\infty)$. Για κάθε $x\in\Delta$, η $(1)\Leftrightarrow |f(x)|=2\sqrt{x}$ (4). Έστω

$f(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$.

Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και f συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

- Αν $f(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, τότε από την (4) προκύπτει $f(x)=2\sqrt{x}$ και επειδή $f(0)=0$ έχουμε $f(x)=2\sqrt{x}, x\in\Delta$.
- Αν $f(x)<0$ στο $(0,+\infty)$, τότε από την (4) προκύπτει $f(x)=-2\sqrt{x}$ και επειδή $f(0)=0$ έχουμε $f(x)=-2\sqrt{x}, x\in\Delta$.



Το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων :

- Ω_1 που ορίζεται από την $f_1(x)=2\sqrt{x}$, την ε_1 και τον άξονα $x'x$ και
- Ω_2 που ορίζεται από την $f_2(x)=-2\sqrt{x}$, την ε_2 και τον άξονα $x'x$.

Η καμπύλη της συνάρτησης $f^2(x)=4x \Leftrightarrow y^2=4x$ έχε άξονα συμμετρίας τον $x'x$ οπότε οι C_{f_1}, C_{f_2} είναι συμμετρικές ως προς τον $x'x$. Επίσης και οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι συμμετρικές ως προς τον $x'x$, οπότε τα δυο χωρία είναι ισεμβαδικά, δηλαδή $E_1=E(\Omega_1)=E(\Omega_2)=E_2$, οπότε $E=E_1+E_2=2E_1$ (5).

Παρατηρούμε ότι το E_1 προκύπτει από το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που ορίζονται :

- Από την ε_1 τους άξονες $x'x$, $y'y$ και είναι τρίγωνο με εμβαδόν $E_3=\dfrac{1}{2}$ και
- Από την ε_1 την C_{f_1} και τις ευθείες $x=0, x=1$ άρα

$$E_4=\int_0^1 (x+1-2\sqrt{x})dx=\int_0^1 (x+1-2x^{\frac{1}{2}})dx=[\frac{x^2}{2}+x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}]_0^1=\frac{1}{6}$$

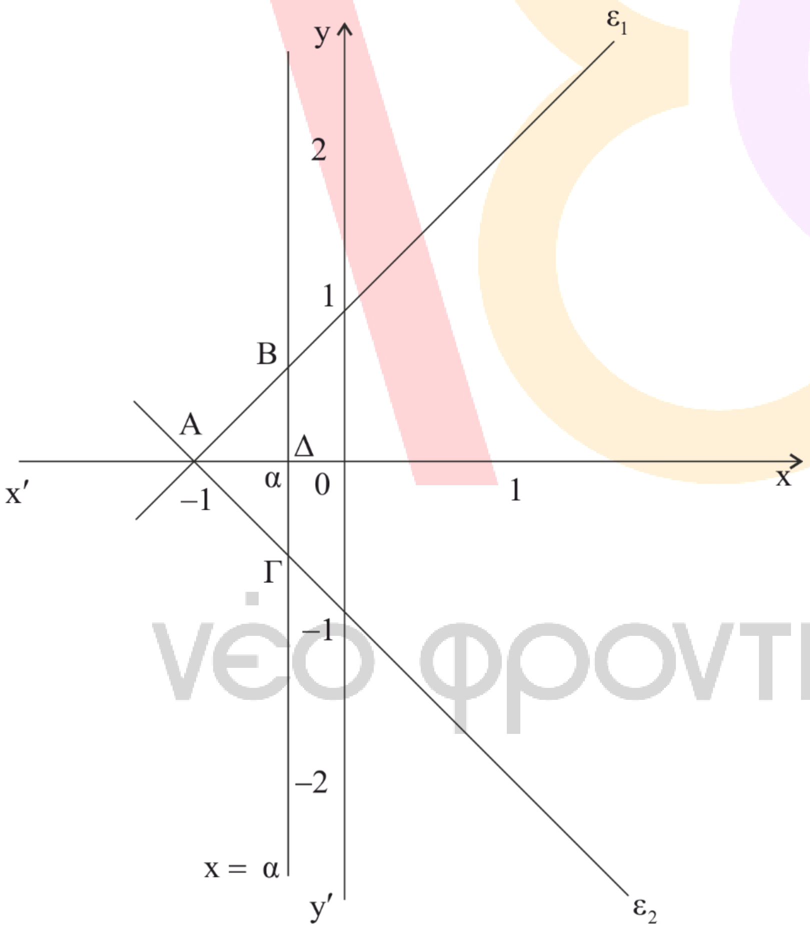
Άρα $E_1 = E_3 + E_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ και από την (5) έχουμε $E = \frac{4}{3}$.

Δ3. Έστω E_5 το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ε_1 , ε_2 , και τον άξονα $y'y$ με βάση το ευθύγραμμο τμήμα που έχει για άκρα τα σημεία $(-1,0),(1,0)$, άρα μήκος 2 και ύψος $(AO) = 1$.

Είναι $E_5 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 > \frac{E}{2} = \frac{2}{3}$, οπότε για την ευθεία $x = \alpha$ πρέπει να ισχύει $-1 < \alpha < 0$.

Το τρίγωνο που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 , ε_2 , και $x = \alpha$ έχει βάση ΒΓ με $B \in \varepsilon_1, \Gamma \in \varepsilon_2$, άρα έχουν συντεταγμένες $B(\alpha, \alpha+1)$, $\Gamma(\alpha, -\alpha-1)$, οπότε $(B\Gamma) = 2|\alpha+1| = 2(\alpha+1)$, ύψος ΑΔ με $(A\Delta) = \alpha+1$ και εμβαδόν $E_6 = \frac{1}{2} 2(\alpha+1)(\alpha+1) = (\alpha+1)^2$.

Πρέπει $E_6 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha+1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} - 1$



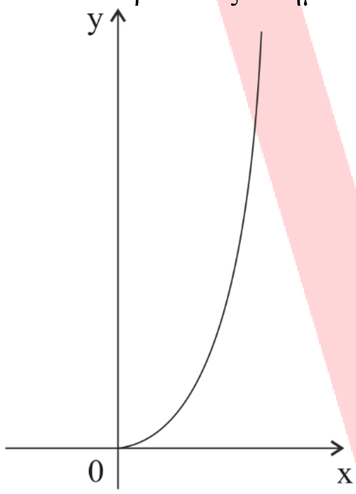
Δ4.

i. $I_\nu = \int_0^\alpha x^\nu e^x dx = \int_0^\alpha x^\nu (e^x)' dx = [x^\nu e^x]_0^\alpha - \int_0^\alpha (x^\nu)' e^x dx = \alpha^\nu e^\alpha - \nu \int_0^\alpha x^{\nu-1} e^x dx = \alpha^\nu e^\alpha - \nu I_{\nu-1}$

ii. Δίνεται $g'(x) = e^{f(x)}$ με $D_{g'} = [0,+\infty)$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$, άρα $g'(x) = e^{f(x)} = e^{2\sqrt{x}}$ και $D_g = [0,+\infty)$

α) Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $u = 2\sqrt{x}$ και e^u, με $g''(x) = (e^{2\sqrt{x}})' = \dfrac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, x > 0$.

β) Για $x > 0$ είναι $g'(x) = e^{2\sqrt{x}} > 0$ και η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $g(0) = 0$. Από α) έχουμε ότι $g''(x) = \dfrac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} > 0, x > 0$ και αφού η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι κυρτή και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.



γ) $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (x)' g(x)dx = [xg(x)]_0^1 - \int_0^1 xg'(x)dx = g(1) - 0 - \int_0^1 xe^{2\sqrt{x}}dx \ (6)$

Για το $I = \int_0^1 xe^{2\sqrt{x}}dx$ θέτουμε $u = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}u^2$ άρα $dx = \frac{1}{2}udu$ και για $x = 0 \Rightarrow u = 0$, ενώ για $x = 1 \Rightarrow u = 2$. Οπότε :

$$I = \int_0^2 \frac{1}{4}u^2 e^u \frac{1}{2}udu = \frac{1}{8}\int_0^2 u^3 e^u du \overset{\Delta 3i}{=} \frac{1}{8}I_3 = \frac{1}{8}[2^3 e^2 - 3I_2] = e^2 - \frac{3}{8}I_2 = e^2 - \frac{3}{8}[2^2 e^2 - 2I_1] =$$

$$= e^2 - \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{4}\int_0^2 ue^u du = -\frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{4}[ue^u]_0^2 - \frac{3}{4}\int_0^2 e^u du = -\frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

Οπότε από την (6) προκύπτει

$$\int_0^1 g(x)dx = g(1) - I = \frac{e^2+1}{2} - \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$