νέο φροντιστήριο	ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ	Διαγώνισμα Προσομοίωσης Μαθηματικών Προσανατολισμού 11/05/2019
	ΟΝΟΜΑ	
	ΤΜΗΜΑ	Γ Λυκείου
	ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΟ	
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

• Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ .

• Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

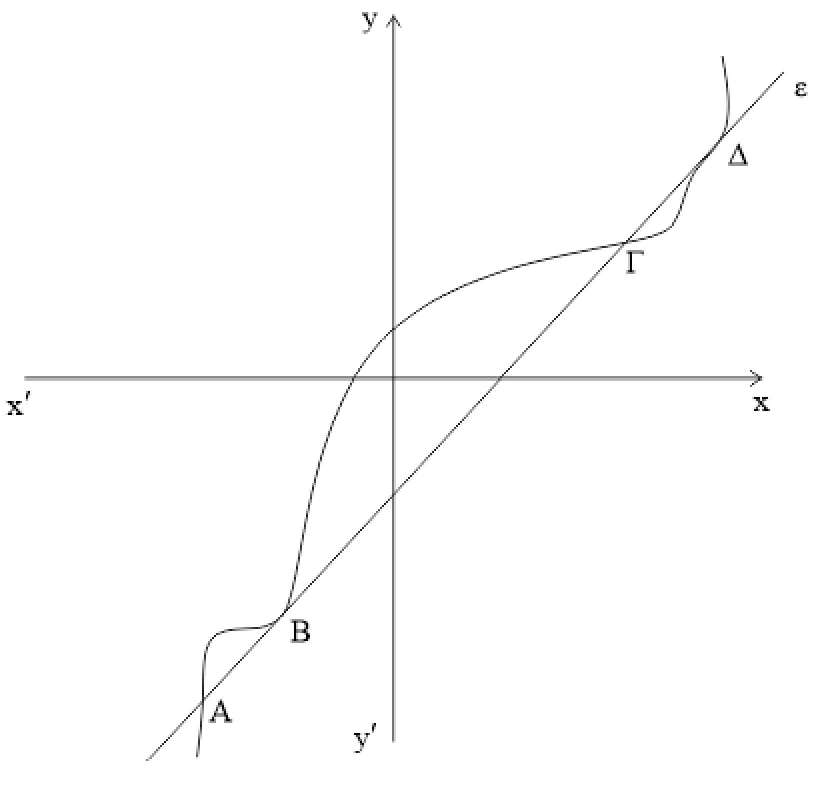
Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat και να σχεδιάσετε διάγραμμα συνάρτησης f που να το επιβεβαιώνει.

Μονάδες 4

Α3. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση :

i. Δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f και ευθείας (ε)



Η ευθεία (ε) είναι εφαπτόμενη της C_f στα σημεία :

α) Β β) Β και Γ γ) Β και Δ δ) Δ

Μονάδες 3

ii. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει τότε :

α) $x_0=0$ β) $x_0=2$ γ) $x_0=-1$ δ) $x_0=1$

Μονάδες 3

Α4. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις ώστε να προκύψουν σωστοί ισχυρισμοί.

α) Αν η συνάρτηση f είναι . . . . στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, $[x_{k-1},x_k]$ με $k\in\{1,2,\dots\nu\}$, ν ισομήκη διαστήματα του $[\alpha,\beta]$ μήκους $\Delta x=\dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$ και $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ επιλεγμένο αυθαίρετα για κάθε $k\in\{1,2,\dots\nu\}$ τότε το $\lim\limits_{\nu\to\infty}(\dots\dots)$ ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το α στο β.

Μονάδες 2

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, και . . . . (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Μονάδες 1

γ) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $(-\infty,\dots..)\cup(\dots..,+\infty)$. Καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές της f(x) αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε . . . . αριθμό Μ. Τότε λέμε ότι η f έχει στο . . . . . όριο . . . . . και γράφουμε $\lim\limits_{\dots..}f(x)=\dots..$

Μονάδες 2

Α5. Δίνεται ο ισχυρισμός :

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_0$, με $\alpha_\nu\neq 0$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$.

i. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

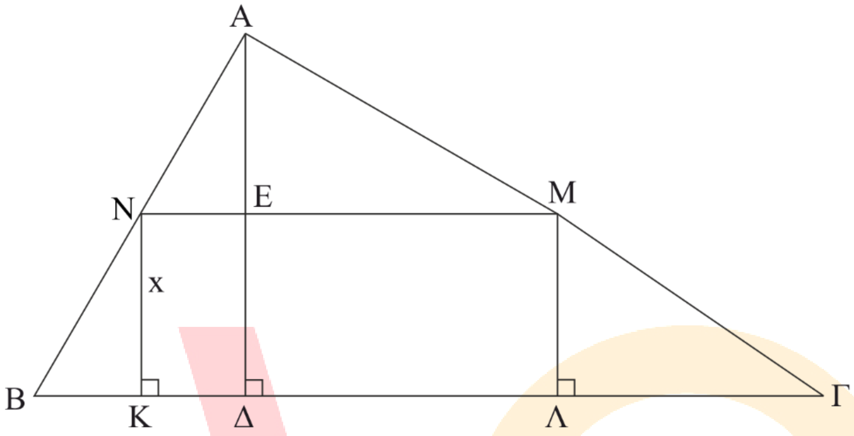
Μονάδες 1

ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα i χρησιμοποιώντας κατάλληλο παράδειγμα.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ βάσης $ΒΓ = 10cm$ και ύψους $ΑΔ = 5cm$



Β1.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε σε τετραγωνικά εκατοστά και η περίμετρος Π σε εκατοστά συναρτήσει του x , είναι αντίστοιχα $E(x) = -2x^2 + 10x$ και $\Pi(x) = 20 - 2x, x \in (0,5)$.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου μεγιστοποιείται , όταν η βάση του ΚΛ είναι διπλάσια από το ύψος του , ΚΝ.

Μονάδες 5

γ) Αν ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού Ε του ορθογωνίου είναι $5cm^2/sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του και της περιμέτρου του όταν το ορθογώνιο έχει εμβαδόν ίσο με το 32% του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 5

Β2. Έστω ότι το κόστος C σε ευρώ, της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο
$C(x) = -xE(x) + 2x(5x - 3\nu x) + 10\nu^3, x \geq 0, \nu \in (0,10]$ και το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $\Pi(\nu)$ ευρώ , με Π την συνάρτηση του **Β1.** και $\nu \in (0,10]$. Να βρείτε πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος καθώς και πόσα ευρώ θα είναι τα έσοδα της βιοτεχνίας από την πώληση του προϊόντος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και $g(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda x, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ f(x), x > 0 \end{cases}$ για τις οποίες γνωρίζετε τα εξής :

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 1$
- $f(xy) \leq xf(y) + yf(x)$, για κάθε $x, y > 0$
- Ισχύει το θεώρημα Rolle για την g στο διάστημα $[-1,0]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι :

α) $xf'(x) = x + f(x)$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 3

β) $f(x) = x\ln x, x > 0$.

Μονάδες 3

γ) Για κάθε $x > 0$, καθώς το x αυξάνεται η εφαπτόμενη της C_f στρέφεται κατά την θετική φορά.

Μονάδες 2

δ) $f(\frac{2\alpha+\beta}{3}) \le \frac{1}{3}[2f(\alpha)+f(\beta)]$ όταν $0 < \alpha \le \beta$.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Στα ακόλουθα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $\lambda = 1$

Γ3.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης g στο διάστημα $[-1,1]$.

Μονάδες 4

β) Αν $-1 < \kappa < 0$ να αποδείξετε ότι $\int_{\kappa}^{1} g(x)dx > \frac{\kappa-1}{e}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = 4x$, για κάθε $x \in \Delta$.

Δ1. Να βρείτε το διάστημα Δ και τις εξισώσεις των εφαπτομένων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(-1,0)$.

Μονάδες 3

Δ2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 να βρείτε τους τύπους της f και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές $y = f^2(x)$, $\varepsilon_1 : y = x+1$, $\varepsilon_2 : y = -x-1$.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την ευθεία $x = \alpha$ η οποία χωρίζει το χωρίο του ερωτήματος 2 σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

Μονάδες 4

Δ4.

i. Δίνεται ότι $I_\nu = \int_0^{\alpha} x^\nu e^x dx, \nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha > 0$. Να δείξετε ότι $I_\nu = \alpha^\nu e^\alpha - \nu I_{\nu-1}$, για κάθε $\nu \ge 2$

Μονάδες 3

ii. Έστω η συνάρτηση g συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $g(0)=0$ και $g(1)=\dfrac{e^2+1}{2}$ για την οποία ισχύει $g'(x)=e^{f(x)}$ για κάθε $x\geq 0$ με $f(x)\geq 0$.

α) Να μελετήσετε την g' ως προς την παραγωγισιμότητα.

Μονάδες 3

β) Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής και στην συνέχεια να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Μονάδες 3

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 g(x)dx=\dfrac{e^2+1}{4}$.

Μονάδες 3