ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ 133

Α2. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ 33

Α3. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ 155

Α4. i) Σωστό

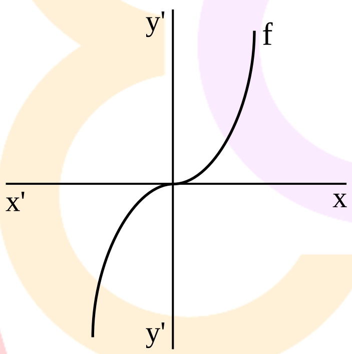
ii) Σωστό

iii) Λάθος

Α5. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2\geq 0$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o=0$ αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+\alpha x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\cdot\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}+\alpha x\right)=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\alpha x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\alpha x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\alpha x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\cdot\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\alpha\right)\right]$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$, • $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\alpha\right)=2-\alpha$

1) αν $2-\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<2$ έχω $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ άτοπο.

2) αν $2-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha>2$ έχω $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ άτοπο αφού από εκφώνηση πρέπει $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

3) αν $2-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=2$ το αρχικό όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+1-4x^2}{-x\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\cdot\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=0 \quad \text{άρα } \boxed{\alpha=2}$$

B2. $f(x)=\sqrt{4x^2+1}+2x, \quad x\in\mathbb{R}$

η f παραγωγίσιμη και άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\frac{(4x^2+1)'}{2\sqrt{4x^2+1}}+2=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}+2=\frac{4x+2\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}$$

Είναι $\sqrt{4x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $4x+2\sqrt{4x^2+1}>0 \Leftrightarrow 4x>-2\sqrt{4x^2+1} \quad (1)$

1) αν $x>0$ η (1) ισχύει

2) αν $x=0$ η (1) γράφεται $0>-2$ ισχύει

3) αν $x<0$ η έχω $4x>-2\sqrt{4x^2+1} \Leftrightarrow (4x)^2<\left(-2\sqrt{4x^2+1}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16x^2<4\left(4x^2+1\right) \Leftrightarrow 16x^2<16x^2+4 \Leftrightarrow 0<4 \text{ ισχύει}$$

Άρα και $4x+2\sqrt{4x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, Οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f ορισμένη, συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$.

αφού • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ (δεδομένο)

• $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2\right)\right]=(+\infty)\cdot 4=+\infty$$

Β3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και "1–1" οπότε αντιστρέφεται.

$$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1}+2x=y \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1}=y-2x \Leftrightarrow 4x^2+1=(y-2x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+1=y^2-4xy+4x^2 \Leftrightarrow 4xy=y^2-1 \Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{4y}$$

Τελικά $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{4x}$ με $A_{f^{-1}}=f(A)\overset{B2.}{=}(0,+\infty)$

Β4. $\left|\dfrac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}\right|=|\eta\mu x|\cdot\left|\dfrac{1}{f^{-1}(x)}\right|\le\left|\dfrac{1}{f^{-1}(x)}\right| \Leftrightarrow -\left|\dfrac{1}{f^{-1}(x)}\right|\le\dfrac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}\le\left|\dfrac{1}{f^{-1}(x)}\right|$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f^{-1}(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{f^{-1}(x)}\right|\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1}{f^{-1}(x)}\right|$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}=0$

Β5. $\dfrac{f(\kappa)}{x^2-9}+\dfrac{f(\lambda)}{x^2-4}+\dfrac{f(\mu)}{x^2}=0 \overset{x\in(0,3)-\{2\}}{\Leftrightarrow}$

$$x^2(x^2-4)f(\kappa)+x^2(x^2-9)f(\lambda)+(x^2-9)(x^2-4)f(\mu)=0$$

Θεωρώ $g(x)=x^2(x^2-4)f(\kappa)+x^2(x^2-9)f(\lambda)+(x^2-9)(x^2-4)f(\mu)$

Επειδή $f(A)=(0,+\infty)$ είναι $f(\kappa)>0,\ f(\lambda)>0,\ f(\mu)>0$

Η g συνεχής στο $[0,2]$ ως πολυωνυμική

$$\left.\begin{aligned} g(0)=36f(\mu)>0 \\ g(2)=2^2(2^2-9)f(\lambda)=-20f(\lambda)<0\end{aligned}\right\}\Rightarrow g(0)\cdot g(2)<0$$

άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$

Η g συνεχής στο $[2,3]$ ως πολυωνυμική

$$\left.\begin{aligned} g(2)=-20f(\lambda)<0 \\ g(3)=3^2(3^2-4)f(\kappa)=45f(\kappa)>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow g(2)\cdot g(3)<0$$

άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_2)=0$

Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(0,3)$ οπότε ισοδύναμα και η αρχική.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x\left(f'(x)+f(x)-1\right)=xf'(x)+f(x)+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)-e^x = xf'(x)+f(x)+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[e^x f'(x)+\left(e^x\right)' f(x)\right]-e^x = \left[xf'(x)+(x)' f(x)\right]+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)' - e^x = \left(xf(x)\right)' + 1 \Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)' - \left(xf(x)\right)' = e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x f(x) - xf(x)\right)' = \left(e^x + x\right)' \Leftrightarrow \left[\left(e^x - x\right)f(x)\right]' = \left(e^x + x\right)' \Leftrightarrow$$

Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$\Leftrightarrow \left(e^x - x\right)f(x) = e^x + x + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x + x + c}{e^x - x},\quad e^x - x \neq 0 \quad \text{αφού} \quad e^x \geq x+1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^x - x \geq 1$ άρα $e^x - x > 0$.

Είναι $f(0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{e^0+0+c}{e^0-0}=1 \Leftrightarrow 1+c=1 \Leftrightarrow c=0$

Άρα $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)\right]$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)\right]=(+\infty)\cdot(+\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+x\right)'\left(e^x-x\right)-\left(e^x-x\right)'\left(e^x+x\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{\left(e^x+1\right)\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x+x\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{e^{2x}}-xe^x+e^x-\cancel{x}-\cancel{e^{2x}}-xe^x+e^x+\cancel{x}}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{2e^x-2xe^x}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(e^x-x\right)^2}(1-x)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\dfrac{2e^x}{\left(e^x-x\right)^2}>0 \quad (1)$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)>0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$$

$$f'(x)=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	ο.μ.	$\searrow$	

Έχουμε:

f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$

f γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει υλικό μέγιστο στο e το $f(e)=\dfrac{e+1}{e-1}$.

Έστω $\Delta_1=(-\infty,1)$ και $\Delta_2=[1,+\infty)$

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+x}{e^x-x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(e^x+x)'}{(e^x-x)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\dfrac{0+1}{0-1}=-1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)=\dfrac{e+1}{e-1}$ (η f ως παραγωγίσιμη και συνεχής)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+x)'}{(e^x-x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+1)'}{(e^x-1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

Έχουμε:

η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 άρα $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to1^-} f(x)\right)=\left(-1,\dfrac{e+1}{e-1}\right)$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 άρα $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(1)\right]=\left(1,\dfrac{e+1}{e-1}\right]$

Είναι $f(\Delta_f)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left(-1,\dfrac{e+1}{e-1}\right]$

Γ2. Πρέπει να αποδείξουμε ότι έχει μία και μοναδική ρίζα στο $(0,1)$ η εξίσωση

$$f(x)=\ln\frac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)=-\ln x\Leftrightarrow f(x)+\ln x=0 \quad (2)$$

Θεωρούμε η συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)+\ln x \quad x\in(0,1]$

Η (2) ισοδύναμα γράφεται $\varphi(x)=0 \quad (3)$

Είναι $\varphi(1)=f(1)+\ln 1=\dfrac{e+1}{e-1}>0$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)+\ln x\right)=f(0)+(-\infty)=-\infty$

Άρα υπάρχει διάστημα μορφής $(0,\alpha)\subseteq(0,1)$ όπου $\varphi(x)<0$

Επιλέγουμε $\rho\in(0,\alpha)$. Είναι $\varphi(\rho)<0$

Η φ ικανοποιεί τις συνθήκες στο Θ. Bolzano στο $[\rho,1]$ διότι είναι συνεχής σε αυτό το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $\varphi(\rho)\cdot\varphi(1)<0$.

Άρα η (3) έχει ρίζα στο $(\rho,1)\subseteq(0,1)$

Επιπλέον η φ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x}$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $\begin{cases} f'(x)>0 \\ \dfrac{1}{x}>0 \end{cases} \Rightarrow \varphi'(x)>0$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ οπότε η ρίζα είναι μοναδική

Επομένως η (3) έχει μία και μοναδική ρίζα στο $(0,1)$

Γ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=\cancel{\left(e^x-x\right)}\dfrac{e^x+x}{\cancel{e^x-x}}=e^x+x$

Η g είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=e^x+1$

Είναι $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Γ4. α) Έστω ότι η h δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ με $h(x_1)\geq h(x_2)$

Έχουμε $h(x_1)\ge h(x_2)\Rightarrow \begin{cases} h^3(x_1)\ge h^3(x_2) \\ 2h(x_1)\ge 2h(x_2)\end{cases} \Rightarrow$

$h^3(x_1)+2h(x_1)\ge h^3(x_2)+2h(x_2)\Rightarrow g(x_1)\ge g(x_2) \overset{g\nearrow \text{στο } \mathbb{R}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow x_1\ge x_2$ Άτοπο διότι $x_1<x_2$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Έχουμε: $g\left(h(3x)-\xi e^{f(\xi)}h(2\eta\mu^2x)\right)-1>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g\left(h(3x)-\xi e^{f(\xi)}h(2\eta\mu^2x)\right)>1 \overset{g(0)=1}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow g\left(h(3x)-\xi e^{f(\xi)}h(2\eta\mu^2x)\right)>g(0) \overset{g\nearrow \text{στο } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow h(3x)-\xi e^{f(\xi)}h(2\eta\mu^2x)>0 \quad (4)$

Ισχύει $f(\xi)=\ln\frac{1}{\xi}\Leftrightarrow e^{f(\xi)}=e^{\ln\frac{1}{\xi}}\Leftrightarrow e^{f(\xi)}=\frac{1}{\xi}\Leftrightarrow \xi e^{f(\xi)}=1$

Οπότε η (4) γράφεται: $h(3x)-h(2\eta\mu^2x)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(3x)>h(2\eta\mu^2x) \overset{h\nearrow \text{στο } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} 3x>2\eta\mu^2x\Leftrightarrow 3x-2\eta\mu^2x>0\Leftrightarrow$

$K(x)>0 \quad (5)$, όπου $K(x)=3x-2\eta\mu^2x, \quad x\in\mathbb{R}$

Η Κ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$K'(x)=3-2\cdot 2\eta\mu x\left(\eta\mu x\right)'=3-2\cdot 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=3-2\eta\mu 2x=2\left(\frac{3}{2}-\eta\mu 2x\right)$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\eta\mu 2x\le 1<\frac{3}{2}$ άρα $\eta\mu 2x<\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}-\eta\mu 2x>0\overset{2>0}{\Leftrightarrow}K'(x)>0$

Άρα η Κ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Επιπλέον $K(0)=30-2\eta\mu^2 0=0$

Η (5) ισοδύναμα γράφεται $K(x)>K(0) \overset{K\nearrow \text{στο } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x>0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g^2(x)=1+f^2(x)\Leftrightarrow g^2(x)-f^2(x)=1\Leftrightarrow$

$h(x)=1, \quad$ όπου $\quad h(x)=g^2(x)-f^2(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$h'(x)=2g(x)g'(x)-2f(x)f'(x)\overset{(1)}{=}2g(x)f(x)-2f(x)g(x)=0$$

Άρα η h είναι σταθερή οπότε υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $h(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $c=1$

Είναι $h(0)=c\Leftrightarrow g^2(0)-f^2(0)=c\Leftrightarrow 1^2-0^2=c\Leftrightarrow c=1$

Δ2. α) ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ – ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)g(x)\neq g^2(x)\Leftrightarrow f(x)g(x)-g^2(x)\neq 0\Leftrightarrow$

$$\big(f(x)-g(x)\big)g(x)\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)-g(x)\neq 0 & (1)\\ g(x)\neq 0\end{cases}$$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη σε αυτό) και ισχύει $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Και επειδή $g(0)=1>0$ έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x)>0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f'(x)>0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η f δεν έχει ακρότατα.

Είναι $f(0)=0$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

i) Για κάθε $\underbrace{x\in\mathbb{R}\text{ με }x>0}_{x\in(0,+\infty)}$ ισχύει $f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}g'(x)>0$

ii) Για κάθε $\underbrace{x\in\mathbb{R}\text{ με }x<0}_{x\in(-\infty,0)}$ ισχύει $f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}g'(x)<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	↘	ο.ε.	↗

Έχουμε ότι:

g γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Η g παρουσιάζει υλικό ελάχιστο στο 0 το $g(0)=1$

ΜΕΛΕΤΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ – ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΜΠΗΣ

Είναι $g'=f$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Άρα η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\big(g'(x)\big)'=f'(x)\Leftrightarrow g''(x)=f'(x)$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)>0\Leftrightarrow g''(x)>0$

Άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της g δεν έχει σημεία καμπής.

Είναι $f'=g$ και η g είναι παραγωγίσιμη

Άρα η f' είναι παραγωγίσιμη και $\left(f'(x)\right)'=g'(x) \Leftrightarrow f''(x)=g'(x)$

(Το πρόσημο και τα σημεία μηδενισμού της f'' συμπίπτουν με το πρόσημο και τα σημεία μηδενισμού της g')

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f		Σ.Κ.	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$

Το σημείο $M(0,f(0))$ άρα $M(0,0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράσταση της f.

β) Έχουμε την εξίσωση $x^2+g(x)=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow g(x)-\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu^2x-x^2 \quad (2)$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\geq g(0)=1\geq \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow g(x)\geq \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x)-\sigma\upsilon\nu x\geq 0 \quad (3)$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\leq |x| \quad (4) \Leftrightarrow \eta\mu^2x\leq x^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2x-x^2\leq 0 \quad (5)$ και η ισότητα στην (4) άρα και στην (5) ισχύει μόνο με $x=0$

Λόγω των (3) και (5) η (2) ισχύει αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} g(x)-\sigma\upsilon\nu x=0 \\ \eta\mu^2x-x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(0)-\sigma\upsilon\nu 0=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-1=0 \text{ ισχύει} \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_1(x)=f(x)-g(x), \quad x\in\mathbb{R}$

Λόγω της (1) έχουμε $\varphi_1(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επιπλέον η φ_1 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

Άρα η φ_1 διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

Είναι $\varphi_1(0)=f(0)-g(0)=0-1=-1<0$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\varphi_1(x)<0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)<0 \Leftrightarrow g(x)>f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(x)+g(x)>f(x)+g(x)\Leftrightarrow 2g(x)>f(x)+g(x)\Leftrightarrow g(x)>\frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)\big)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)\big)\right]=\frac{1}{2}(+\infty)=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \quad (6)$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $g^2(x)=1+f^2(x)\Leftrightarrow g^2(x)-1=f^2(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)-1}=\sqrt{f^2(x)}\Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{g^2(x)-1}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\sqrt{g^2(x)-1}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{g^2(x)-1}\overset{(6)}{=}+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad (7)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\mathbb{R}=D_f$ άρα:

$$f(D_f)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(0)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_2(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x+e^{g(x)}\right)\eta\mu\frac{1}{f(x)}$

Πρέπει $\begin{cases} x\in D_f=\mathbb{R} \\ x\in D_g=\mathbb{R} \\ f(x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)\neq 0\Leftrightarrow f(x)\neq f(0)\overset{f \nearrow \text{ στο } \mathbb{R},\ \text{άρα } "1-1"}{\Leftrightarrow} x\neq 0$

Είναι $D_{\varphi_2}=\mathbb{R}^*$ το οποίο περιέχει διάστημα μορφής $(\alpha,+\infty)$ άρα έχει νόημα η εξέταση του $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_2(x)$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $|\varphi_2(x)|=\left|\sigma\upsilon\nu\left(x+e^{g(x)}\right)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right|=$

$$=\left|\sigma\upsilon\nu\left(x+e^{g(x)}\right)\right|\left|\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right|\leq 1\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right|=\left|\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right|\leq\frac{1}{|f(x)|}\overset{f(x)>0}{=}\frac{1}{f(x)}$$

Άρα $|\varphi_2(x)|\leq\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\leq\varphi_2(x)\leq\frac{1}{f(x)}$

Είναι $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}\overset{(6)}{=}0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right)=0 \end{cases}$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_2(x)=0$ (κριτήριο παρεμβολής)

Δ5. Η f ως γνησίως μονότονη είναι και ″1–1″, άρα αντιστρέφεται.

Είναι $D_{f^{-1}} = f\left(D_f\right) = \mathbb{R}$

Θα αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x_1)\right) < f\left(f^{-1}(x_2)\right) \overset{f \nearrow \text{στο } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Είναι $0 = f(0) \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(0)\right) = f(0) \overset{f\ ''1-1''}{\Leftrightarrow} f^{-1}(0) = 0$