νέο φροντιστήριο	**ΜΑΘΗΜΑ - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ**	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	
	ΤΜΗΜΑ	
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	
	ΔΙΑΡΚΕΙΑ	3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται ″1–1″;

Μονάδες 3

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή ως λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i) Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x_o, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο x_o. **Σ Λ**

ii) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α, β] και $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. **Σ Λ**

iii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_o)$ τότε η gof δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o. **Σ Λ**

Μονάδες 6

Α5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

″Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αν για κάποιο $x_o\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x_o)=0$ τότε το x_o είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.″

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+1}+\alpha x,\ \ x\in\mathbb{R}$ και το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 3+2

Β3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{4x},\ \ x>0$.

Μονάδες 1+4

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}$.

Μονάδες 4

Β5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\kappa)}{x^2-9}+\dfrac{f(\lambda)}{x^2-4}+\dfrac{f(\mu)}{x^2}=0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(0,3)$, $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$e^x\left(f'(x)+f(x)-1\right)=xf'(x)+f(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-x},\ \ x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2+3

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας και μοναδικός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=\ln\dfrac{1}{\xi}$.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$g(x)=\left(e^x-x\right)f(x)$

Μονάδες 2

Γ4. Έστω συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $h^3(x)+2h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β) Να λυθεί η ανίσωση: $g\left(h(3x)-\xi e^{f(\xi)}h(2\eta\mu^2 x)\right)-1>0$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι:

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν $f(x)g(x)\neq g^2(x)$ και $\begin{cases} f'(x)=g(x) \\ g'(x)=f(x) \end{cases}$
- $f(0)=0$ και $g(0)=1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g^2(x)=1+f^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. α) Να μελετηθούν οι συναρτήσεις f και g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

β) Να λυθεί η εξίσωση $x^2+g(x)=\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 3

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sigma\upsilon\nu\left(x+e^{g(x)}\right)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$

Μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, ότι f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και ότι $f^{-1}(0)=0$

Μονάδες 3