

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά προσανατολισμού

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 186

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 142

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 161

A4. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

δ. Λάθος

ΘΕΜΑ Β:

B1. Πρέπει: $\left. \begin{array}{l} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1, \text{ ,άρα: } D_{f \circ g} = [0,1].$

Ακόμα: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

B2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $h'(x) = 2(x-1) \leq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα δηλ. είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1.

Θέτω $y = h(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = |x-1| \Leftrightarrow \sqrt{y} = -x+1 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$, άρα $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$.

B3. i) Είναι: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, x = 1 \end{cases}$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως ημίγειρο συνεχών συναρτήσεων και ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2} = \varphi(1), \text{ άρα η } \varphi(x) \text{ είναι συνεχής στο } [0,1].$$

Ακόμα $\varphi(0) \neq \varphi(1)$ ($\varphi(0) = 1$) άρα η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii) Επειδή η φ ικανοποιεί το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών τότε για κάθε αριθμό η ανάμεσα στο $[0,1]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\text{Επειδή } \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta \uparrow \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \eta \mu \frac{\pi}{6} < \eta \mu \alpha < \eta \mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta \mu \alpha < 1 \text{ ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1. Αφού η f είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ και ισχύει ότι $f'(x) = -2$ για κάθε $x < -1$ τότε:

$$f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)' \Leftrightarrow f(x) = -2x + c_1, x \leq -1 \quad (1)$$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $(-1, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = 3x^2 - 1$, για κάθε $x > -1$ οπότε

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - x)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 - x + c_2, x > -1 \quad (2)$$

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $O(0,0)$ τότε

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0^3 - 0 + c_2 \Leftrightarrow 0 = c_2$$

Άρα από (2) $f(x) = x^3 - x, x > -1$

Επίσης η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} άρα είναι συνεχής στο $x_0 = -1$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + c_1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x) = 2 + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , x \leq -1 \\ x^3 - x & , x > -1 \end{cases}$$

Γ2.

Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$ θα δίνεται από τον τύπο :

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow \\ y - (x_0^3 - x_0) &= (3x_0^2 - 1)(x - x_0) \Rightarrow \\ y &= (3x_0^2 - 1)x - 3x_0^3 + x_0 + x_0^3 - x_0 \Rightarrow \\ y &= (3x_0^2 - 1)x - 2x_0^3 \end{aligned}$$

και αφού τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο

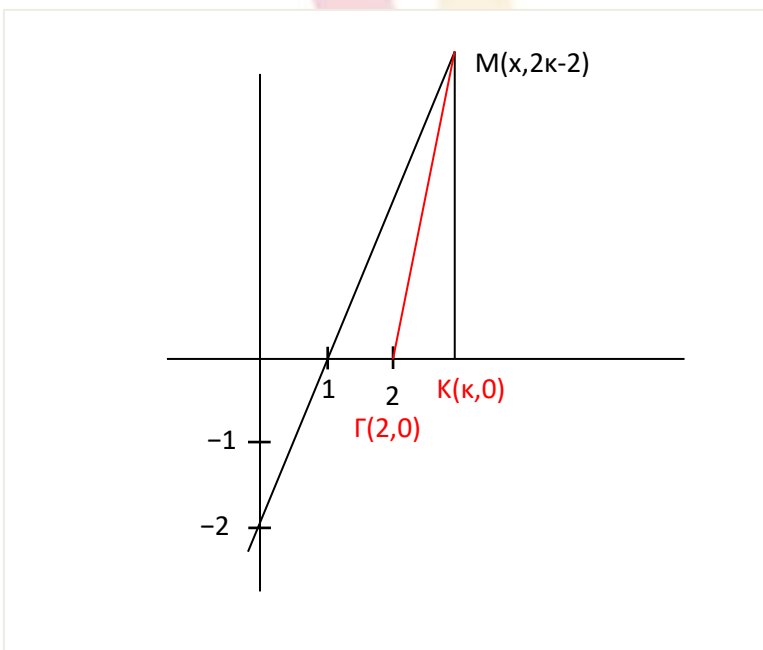
Και αφού τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο με τεταγμένη -2 τότε:

$$-2 = (3x_0^2 - 1) \cdot 0 - 2x_0^3 \Leftrightarrow -2 = -2x_0^3 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Άρα η εφαπτομένη θα είναι:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

Γ3.



Την χρονική στιγμή t_0 το κινητό διέρχεται από το $(3,4)$. Δηλαδή $x(t_0) = 3$ και $y(t_0) = 4$. Επίσης $x'(t_0) = 2 \text{ m/sec}$.

$$\text{Ισχύει: } E = \frac{1}{2} \beta \cdot v = \frac{1}{2} |x - 2| \cdot |2x - 2| \stackrel{x > 2}{=} \frac{1}{2} (x - 2) \cdot (2x - 2) = (x - 2) \cdot (x - 1) = x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2 &\Leftrightarrow E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t) \Leftrightarrow E'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - \\ 3x'(t_0) &\Leftrightarrow E'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6 \text{ m}^2/\text{sec} \end{aligned}$$

Γ4.

Θα υπολογίσουμε το : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

Θέτω την $f(x) = u$ και αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) = +\infty$ τότε και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0 \text{ γιατί :}$$

Για $u \neq 0$ $\left| \frac{\eta\mu u}{u} \right| = |\eta\mu u| \left| \frac{1}{u} \right| \leq \left| \frac{1}{u} \right|$ οπότε : $-\frac{1}{u} \leq \frac{\eta\mu u}{u} \leq \frac{1}{u}$ και αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{u} \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$

από κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0$

Επίσης: θα υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3}$

Θέτω $-x = y$ οπότε αφού $x \rightarrow -\infty$ τότε $y \rightarrow +\infty$ και θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} \stackrel{-x=y}{x=-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(y)}{1-(-y)^3} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3 - y}{1+y^3} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3}{y^3} = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = 0 + 1 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1. i) Για κάθε $x \in D_f = (0, +\infty)$ είναι $f(x) = x - (\ln 3 + \ln x) = x - \ln x - \ln 3$

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $x > 0$ (1)

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) < 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		↘		↗	
		ο.ε.			

Έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 1 - \ln 3$

Έστω $\Delta_1 = (0, 1]$ και $\Delta_2 = [1, +\infty)$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x - \ln 3) = 0 - (-\infty) - \ln 3 = +\infty$$

$$f(1) = 1 - \ln 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(1) = 1 - \ln 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - \ln 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln 3}{x} \right) \right] = +\infty \text{ διότι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Έχουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ (2) και η f είναι συνεχής στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 .

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 , άρα:

$$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty)$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 , άρα:

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1 - \ln 3, +\infty)$$

$0 \in f(\Delta_1)$ άρα η (2) έχει ρίζα x_1 στο Δ_1 και μάλιστα μοναδική διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 .

$0 \in f(\Delta_2)$ άρα η (2) έχει ρίζα x_2 στο Δ_2 και μάλιστα μοναδική διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 .

Τελικά η (2) έχει ακριβώς 2 ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ αφού $\begin{cases} x_1 \in \Delta_1 \\ x_2 \in \Delta_2 \end{cases}$

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη και $f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x^2}$

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η f είναι κυρτή.

Δ2. Είναι $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$

Για κάθε $x \in [x_1, 1] \subseteq \Delta_1$ είναι $x \geq x_1$ $\overset{\text{f γνησίως φθίνουσα στο } \Delta_1}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(x_1) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$

Για κάθε $x \in [1, x_2] \subseteq \Delta_2$ είναι $x \leq x_2$ $\overset{\text{f γνησίως αύξουσα στο } \Delta_2}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$

Άρα $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ οπότε:

$$E = \int_{x_1}^{x_2} (-f(x)) dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln x + \ln 3 - x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \ln x dx + \int_{x_1}^{x_2} \ln 3 dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln x dx + \ln 3(x_2 - x_1) - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = [x \ln x]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x (\ln x)' dx + (x_2 - x_1) \ln 3 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1 - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x} dx + (x_2 - x_1) \ln 3 - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} 1 dx = (x_2 - x_1)$$

$$= x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1 - (x_2 - x_1) + x_2 \ln 3 - x_1 \ln 3 - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} =$$

$$= x_2 (\ln x_2 + \ln 3) - x_1 (\ln x_1 - \ln 3) - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - (x_2 - x_1)$$

Είναι: $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - \ln x_1 - \ln 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ln x_1 + \ln 3$

$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - \ln x_2 - \ln 3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \ln x_2 + \ln 3$

Άρα $E = x_2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_1 - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - (x_2 - x_1) = x_2^2 - x_1^2 - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - (x_2 - x_1) =$

$$= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - (x_2 - x_1) = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)}{2} =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)}{2} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$$

Δ3. Έχουμε $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$

Ισχύει: $E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow$

$$x_2 > 2 - x_1 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$$

Άρα $2 - x_1 \in (x_1, x_2)$

Γνωρίζουμε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $\begin{pmatrix} x = x_1 \\ x = x_2 \end{pmatrix}$

Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ οπότε $f(2 - x_1) < 0$

Δ4. Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 - \ln 3$ (3) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ διότι η θέση του ελαχίστου είναι μοναδική.

Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_2, f(x_2))$

$$\text{Είναι } \varepsilon: y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \stackrel{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow} y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Η f είναι κυρτή άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την ε με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Επομένως για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ (4) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$

Έχουμε την εξίσωση:

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 + \ln 3 = f'(x_2)(x - x_2) - f(x) \quad (5)$$

Λόγω των (3) και (4) έχουμε
$$\begin{cases} f(x) - 1 + \ln 3 \geq 0 \\ f'(x_2)(x - x_2) - f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Άρα η (5) ισχύει αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} f(x) - 1 + \ln 3 = 0 \\ f'(x_2)(x - x_2) - f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2 \end{cases} \text{ ΑΔΥΝΑΤΟ διότι } 1 < x_2 \text{ άρα } 1 \neq x_2$$

Άρα η (5) είναι αδύνατη.