# Νέο Φροντιστήριο

# Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

# Άλγεβρα

## Κεφάλαιο: 2 Ιδιότητες Συναρτήσεων

## Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους $40m$ για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο $40m$. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.

(Μονάδες 7)

β) Αν συμβολίσουμε με $x$ το πλάτος και με $E$ το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο $40m$, να εκφράσετε το $E$ ως συνάρτηση του $x$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $E(x)$. Από τη γραφική παράσταση της $E(x)$ να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Αν η γραφική παράσταση της $f$ διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,2)$ και $\mathrm{B}(5,8)$, να δείξετε ότι $\alpha=\frac{3}{2}$ και $\beta=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f$ οριζόντια κατά $1$ μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά $3$ μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της $g$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x)=\frac{3}{2}(x-1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f$ οριζόντια κατά $\kappa$ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{\kappa}{2}$ μονάδες κάτω, να βρείτε το $\kappa$ ($\kappa>0$).

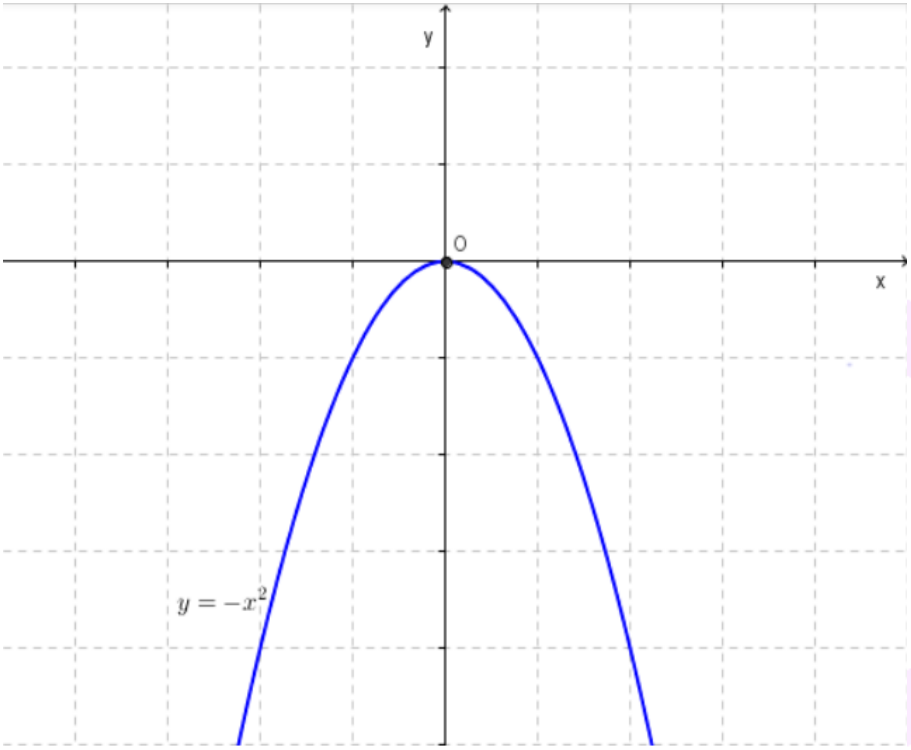
(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi$, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f$.




(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της $f$ καθώς και τη θέση του.

(Μονάδες 5)

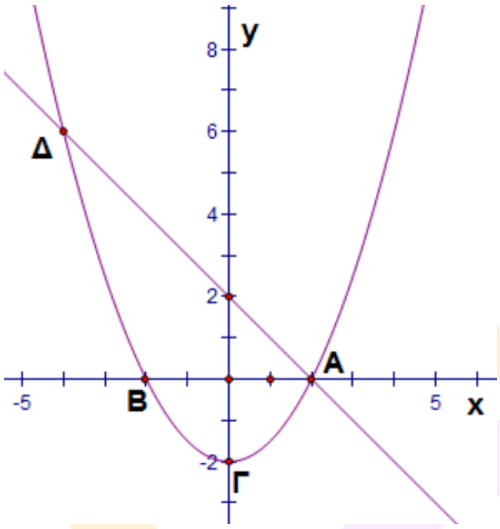
iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μας παραβολής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.




α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία $A, B, \Gamma$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma$.

(Μονάδες 8)

β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,3]$. Η συνάρτηση $f$ είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

(Μονάδες 6)

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης $f$. Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ β. $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$ γ. $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ δ. $f(x) = -\sqrt{x^2-9}$

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αφού $-2<-1$ και $f$ γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ είναι $f(-2)>f(-1)$.

Επίσης $f$ άρτια οπότε $f(-2)=f(2)$. Συνεπώς $f(-1)<f(2)$.

β) Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$, οπότε $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[0,3]$.

Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$, οπότε $f(-3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[0,3]$.

Επίσης $f$ άρτια οπότε $f(-3)=f(3)$.

Συνεπώς $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

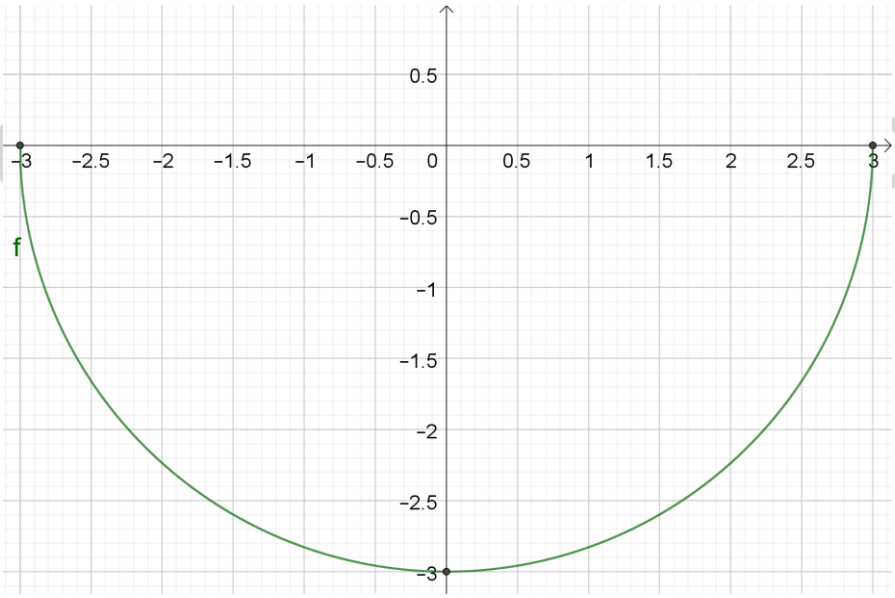
γ) Αφού $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$, συμπεραίνουμε ότι η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, που είναι και η μοναδική θέση ελαχίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x)>f(0)$ για κάθε $x\in[-3,0)\cup(0,3]$.

Αφού $f(x)\leq f(3)$ για κάθε $x\in[-3,3]$, συμπεραίνουμε ότι η $f$ παρουσιάζει μέγιστο στο 3, όπως και στο -3 αφού $f(-3)=f(3)$, που είναι και οι μοναδικές θέσεις μεγίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x)<f(3)$ για κάθε $x\in(-3,3)$.

δ) Από τους 4 τύπους μόνο ο α. και ο β. έχουν πεδίο ορισμού το $[-3,3]$.

Επίσης για τον τύπο α. ισχύει $f(0)>f(3)$ οπότε δεν μπορεί να αντιστοιχεί στη συνάρτηση του προβλήματος. Συνεπώς ο σωστός τύπος είναι ο β. $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση $\varphi$ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi$, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$, να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η $f$ είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης $f$.

(Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της $f$ και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 4)

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της $f$ και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

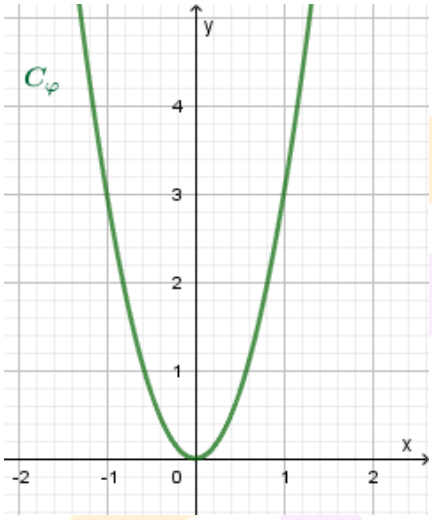
ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\varphi$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\varphi(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = \varphi(x)$.

Επομένως είναι άρτια συνάρτηση.

Η γραφική της παράσταση είναι η παρακάτω παραβολή.



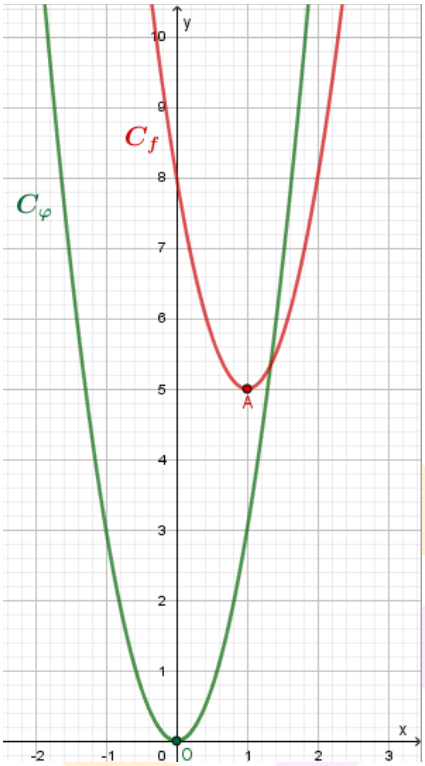

β) Είναι:

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 8 = 3\left(x^2 - 2x + \frac{8}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2x + 1 + \frac{5}{3}\right) = 3\left[(x-1)^2 + \frac{5}{3}\right]$$

Επομένως $f(x) = 3(x-1)^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της $f$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $\varphi$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 5 μονάδες προς τα πάνω. Έτσι, είναι:

νέο φροντιστήριο




γ) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $A(1,5)$. Ως εκ τούτου,

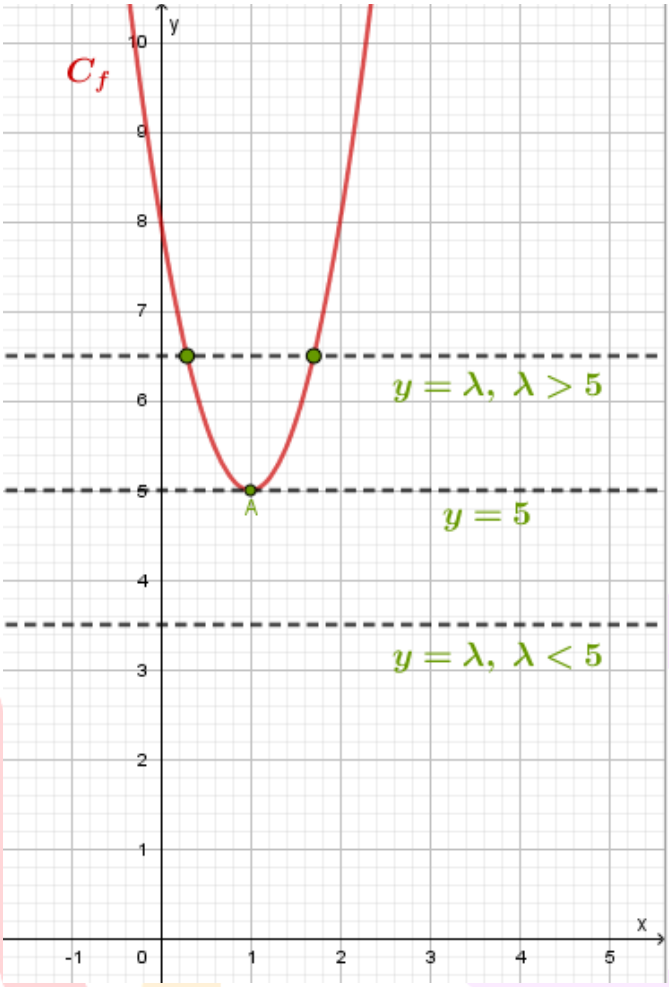
i. Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της $f$ είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της, δηλαδή η $x=1$.

ii. Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει στη θέση $x_0=1$, ολικό ελάχιστο το $f(1)=5$.

iii. Είναι:

- Αν $\lambda>5$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες
- Αν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει 1 ρίζα
- Αν $\lambda<5$ η εξίσωση είναι αδύνατη

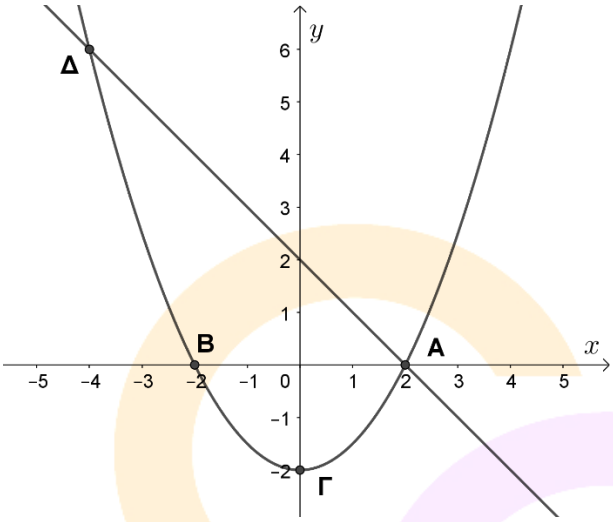
ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο




ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.




α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία $A, B, \Gamma$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma$.

(Μονάδες 8)

β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αφού η παραβολή διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,-2)$, ισχύει ότι

$$f(0)=-2 \Leftrightarrow \alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+\gamma=-2 \Leftrightarrow \gamma=-2.$$

Άρα, $f(x)=\alpha x^2+\beta x-2$. Επίσης, τα σημεία $A(2,0)$ και $B(-2,0)$, είναι σημεία της παραβολής, οπότε:

$$\begin{cases} f(2)=0 \\ f(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2-2=0 \\ \alpha\cdot(-2)^2+\beta\cdot(-2)-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha+2\beta-2=0 \\ 4\alpha-2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2a+1 \\ 2\alpha-(-2\alpha+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta=-2a+1 \\ 4\alpha-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\cdot\dfrac{1}{2}+1 \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα, $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$

β) Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων της παραβολής και της ευθείας, λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-2=-x+2 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0.$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=2^2-4(-8)=36$ και ρίζες:

$$x_1=\frac{-2+6}{2}=2 \text{ και } x_2=\frac{-2-6}{2}=-4.$$

Είναι $g(2)=0$ και $g(-4)=6$. Άρα, τα σημεία είναι τα $A(2,0)$ και $\Delta(-4,6)$.

γ) Με μετατόπιση της παραβολής κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω προκύπτει η συνάρτηση

$$h(x)=\frac{1}{2}x^2-2+4{,}5 \Leftrightarrow h(x)=\frac{1}{2}x^2+2{,}5.$$

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h$ με την ευθεία $g$ λύνουμε την εξίσωση:

$$h(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2{,}5=-x+2 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Επίσης, $g(-1)=3$. Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h$ και η ευθεία $g$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $(-1,3)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση $C_f$ της f διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$, τότε:

α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $C_f$ διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το Ο.

(Μονάδες 7)

δ) Έστω $f(x)=-2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την $C_f$ αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι περιττή και $f(-1)=2$. Αλλά , $f(-1)=-f(1)$ δηλαδή $f(1)=-f(-1)$, οπότε έχουμε $f(1)=-2$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και $f(-1)>f(1)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Από την ισότητα $f(-x)=-f(x)$ που ισχύει για όλα τα x, αφού η f είναι περιττή, με $x=0$ παίρνουμε:

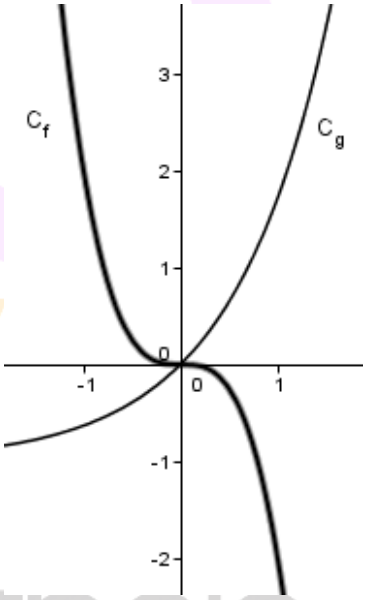
$$f(-0)=-f(0)\Rightarrow f(0)+f(0)=0\Rightarrow 2f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή Ο.

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f(0)=0$, οπότε:

- Αν $x>0$, τότε $f(x)<f(0)=0$, οπότε $f(x)<0$.
- Αν $x<0$, τότε $f(x)>f(0)=0$, οπότε $f(x)>0$.

Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ και $g(0)=e^0-1=1-1=0$, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινό σημείο το Ο.




**Γεωμετρικά,** η μοναδικότητα του κοινού σημείου αιτιολογείται από το γεγονός ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, η g γνησίως φθίνουσα και έχουν κοινό το σημείο Ο. Ένα ενδεικτικό σχήμα είναι το διπλανό.

**Αλγεβρικά,** αν $x>0$ τότε έχουμε $f(x)<0$ και $g(x)=e^x-1>0$ οπότε $f(x)<0<g(x)$, ενώ αν $x<0$ τότε $f(x)>0$ και $g(x)=e^x-1<0$ οπότε $f(x)>0>g(x)$.

Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν άλλο κοινό σημείο πέρα από το Ο.

δ) Ο τύπος της συνάρτησης h που έχει τη γραφική παράσταση που περιγράφεται στην εκφώνηση είναι

$$h(x)=f(x+2)+1=-2(x+2)^3+1=-2(x^3+6x^2+12x+8)+1$$

$$=-2x^3-12x^2-24x-16+1=-2x^3-12x^2-24x-15$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x$ και $y$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να εκφράσετε την πλευρά $y$ ως συνάρτηση της πλευράς $x$ και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς $x$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $\mathrm{E}(x)=-(x-5)^2+25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

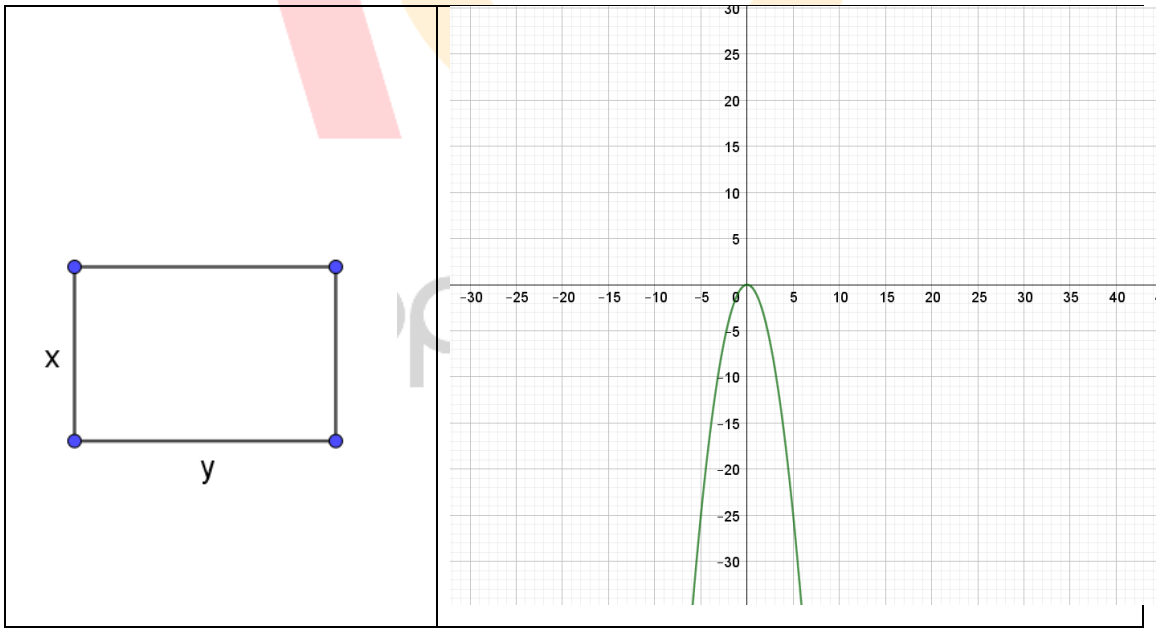
(Μονάδες 7)

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράστασης της συνάρτησης $g(x)=-x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathrm{E}(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το $x$ έτσι ώστε το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

δ) Για την τιμή του $x$ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά $y$ και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)



ΛΥΣΗ

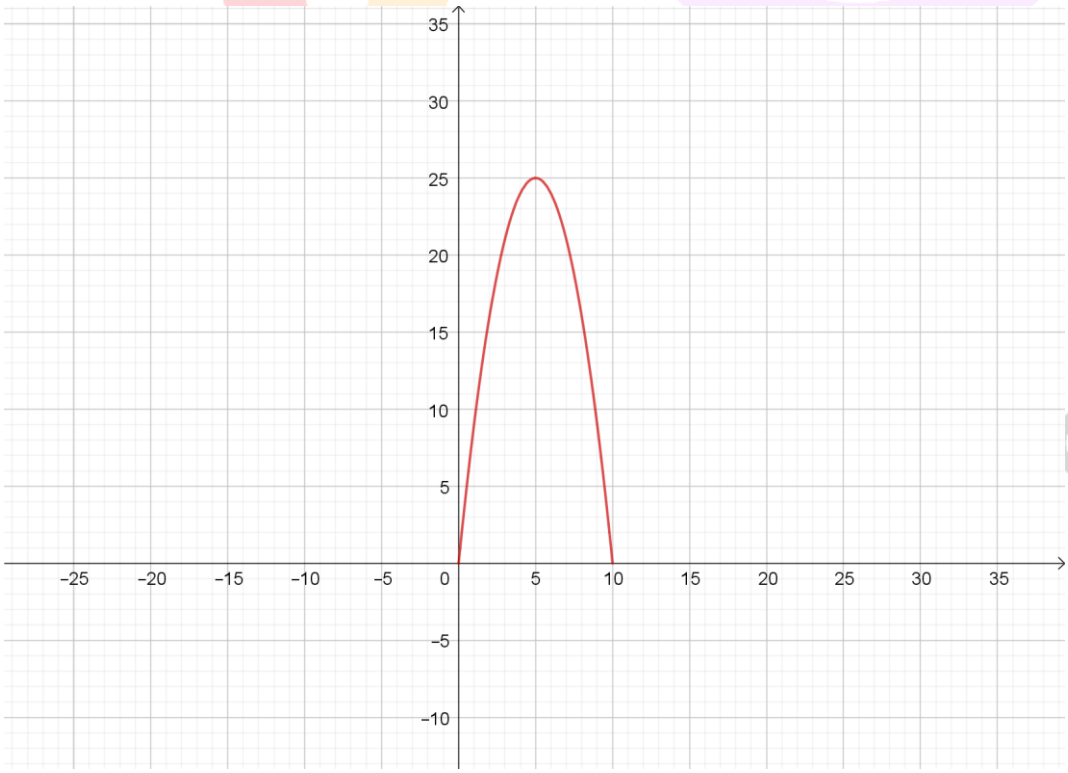
α) Η περίμετρος του ορθογωνίου, ισούται αφενός με $2x+2y$ και αφετέρου με 20 m που είναι το μήκος του συρματοπλέγματος με το οποίο κατασκευάστηκε. Συνεπώς είναι $2x+2y=20 \Leftrightarrow x+y=10 \Leftrightarrow y=10-x$. Επίσης πρέπει $x>0$ και $y>0 \Leftrightarrow 10-x>0 \Leftrightarrow x<10$ ως μήκη πλευρών, οπότε συναληθεύοντας έχουμε τελικά ότι $0<x<10$.

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $x \cdot y = x \cdot (10-x) = 10x - x^2$ οπότε

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(x) = 10x - x^2 = \\ &-x^2 + 10x - 25 + 25 = \\ &-(x^2 - 10x + 25) + 25 = \\ &-(x-5)^2 + 25 \end{aligned}$$

με πεδίο ορισμού της το $(0,10)$ αφού όπως δείξαμε παραπάνω είναι $0<x<10$.

γ) Η γραφική παράσταση της $\mathrm{E}(x)$ θα προκύψει από τη γραφική παράσταση της $g(x)=-x^2$, με μια οριζόντια μετατόπιση 5 μονάδες δεξιά και στη συνέχεια με μία κατακόρυφη μετατόπιση 25 μονάδων προς τα πάνω. Η γραφική παράσταση της $\mathrm{E}(x)$ στο $(0,10)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




Από τη γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο όταν $x=5$. Μάλιστα η μέγιστη τιμή του είναι $25\,m^2$.

δ) Για $x=5$ έχουμε ότι $y=10-5=5$, δηλαδή το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο όταν γίνεται τετράγωνο.



νέο φροντιστήριο