Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Άλγεβρα

Κεφάλαιο: 3 Τριγωνομετρία

Θέμα 4

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t *sec* δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right), \quad 0 \le t \le 180 .$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

(Μονάδες 4+2)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

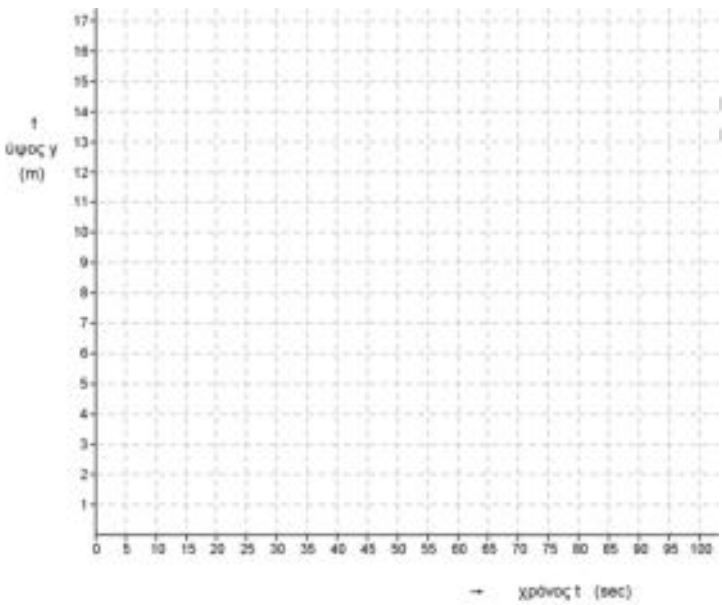
i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							

(Μονάδες 3)

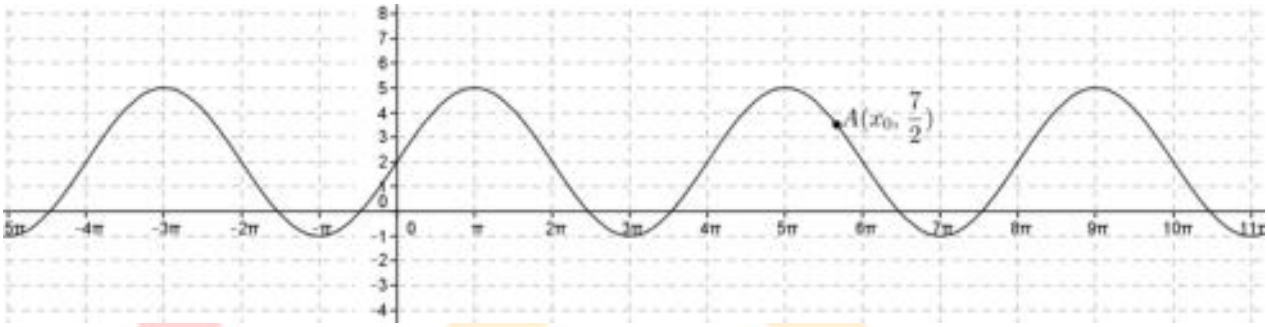
ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \le t \le 90$.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)+k$, με ρ,k πραγματικές σταθερές και $\omega>0$.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

(Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f.

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ,k και ω. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho=3, \omega=\frac{1}{2}$ και $k=2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω, με $0 \le \omega \le 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$$

και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα παιχνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ελατήριο ταλαντώνεται και το ύψος του παιχνιδιού σε cm από το πάτωμα, συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) + \beta, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ και } \omega > 0.$$

Το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι $20cm$ και το μέγιστο $100cm$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο – ηρεμία – μέγιστο – ηρεμία – ελάχιστο) είναι 6 sec.

α) Να δείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{3}$.

(Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α $\kappa\alpha\iota$ β και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα 14 sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης.

(Μονάδες 8)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$, για $0 \leq t \leq 12$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm) τη χρονική στιγμή t, δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(t) = 2\eta\mu\frac{\pi t}{4} + 13, \text{όπου } t \text{ ο χρόνος σε ώρες.}$$

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης:

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποια χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς κελσίου $\left({}^{0}C\right)$ κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετράωρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12} + 4, \qquad \mu\varepsilon\ 0 \leq t \leq 24\ (t \text{ ο χρόνος σε ώρες}).$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετράωρου.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με $0^{o}C$.

(Μονάδες 6)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0.24]$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από $0\ {}^{o}C$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha=2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2$ είναι $\beta=8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha=2$ και $\beta=8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για την συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu\beta x$ με α θετικό ακέραιο μέγιστη τιμή είναι το α, άρα $\alpha=2$.

Εναλλακτικά έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του $\eta\mu\beta x$ είναι 1, άρα αν $\alpha\cdot\eta\mu\beta x=2$, πρέπει $\alpha=2$

β) Η συνάρτηση από το α) ερώτημα είναι $f(x)=2\cdot\eta\mu\beta x$, άρα

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=2\Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1\Leftrightarrow\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, με $\kappa\in\mathbb{Z}$ (η λύση $\frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}$ ταυτίζεται με την προηγούμενη).

Απλοποιώντας το π έχουμε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2}$, η μικρότερη θετική τιμή του β που ζητάμε θα είναι όταν ο κ, ως ακέραιος, γίνει ίσος με 0 (για αρνητικές τιμές του κ το β γίνεται αρνητικό). Οπότε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta}{16}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\beta=8$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=1$ από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι:

$$2\cdot\eta\mu 8x=1\Leftrightarrow\eta\mu 8x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu 8x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}8x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ 8x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\\ x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{5\pi}{48}\end{cases}, \text{ με } \kappa\in\mathbb{Z}$$

Αφού πρέπει $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ λύνουμε τις παρακάτω δύο ανισώσεις:

i) $0\le\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\left(\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\right)\pi\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{48}\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{23}{48}\Leftrightarrow-\frac{4}{48}\le\kappa\le\frac{4\cdot 23}{48}\Leftrightarrow-\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{23}{12}$.

Αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$, είναι $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x=\frac{\pi}{48}rad$ ή $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{48}=\frac{13\pi}{48}rad$.

ii) $0 \le \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48}\right)\pi \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{1}{2} - \frac{5}{48} \Leftrightarrow$

$-\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{19}{48} \Leftrightarrow -\frac{4 \cdot 5}{48} \le \kappa \le \frac{4 \cdot 19}{48} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{19}{12}$.

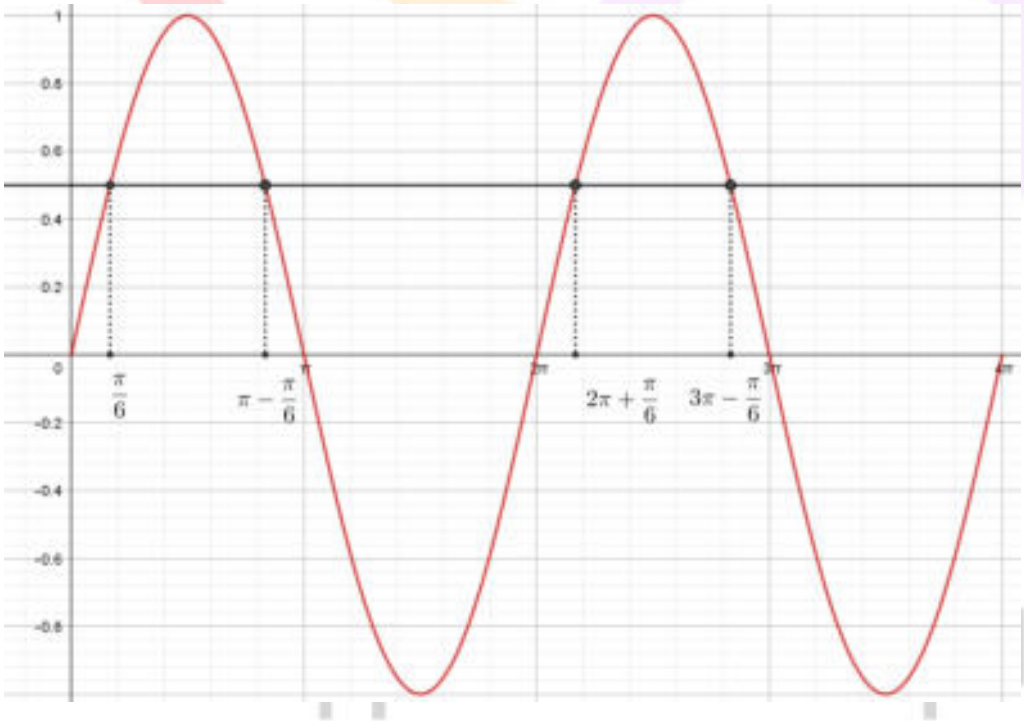
Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{5\pi}{48} rad$ ή

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48} rad$.

Εναλλακτικά, όπως στην προηγούμενη λύση, έχουμε $\eta\mu 8x = \frac{1}{2}$. Επειδή $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, θα είναι

$0 \le 8x \le 4\pi$. Οι αριθμοί των οποίων το ημίτονο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα αυτό είναι οι:

$\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}$, όπως προκύπτει από την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης $\eta\mu\omega$.



Άρα:

$$8x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{48}$$

$$8x = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{48}$$

$$8x = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{48}$$

$$8x = 3\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{48}.$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = A\hat{O}M$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x=1$ στο σημείο K.

α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta, \varepsilon\varphi\theta, \sigma\varphi\theta$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K.

(Μονάδες 6)

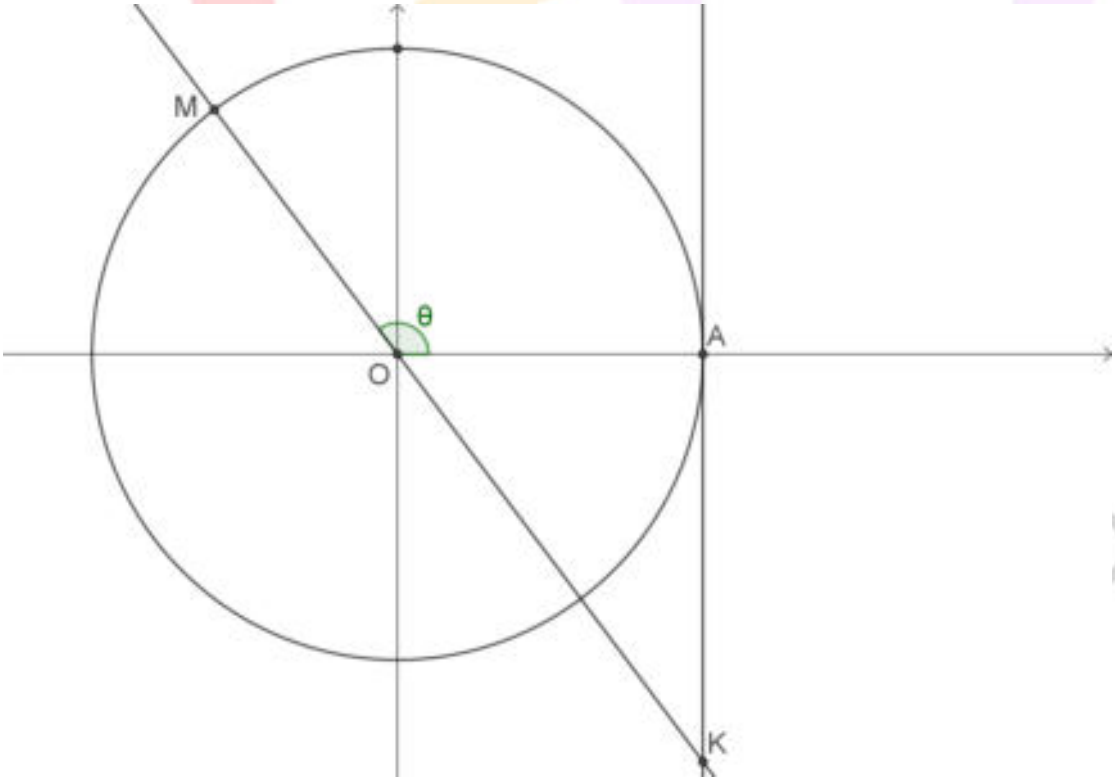
γ) Έστω μια γωνία $\phi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ϕ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 5)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \phi$.

(Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α) Για τη γωνία $\theta = A\hat{O}M$ γνωρίζουμε ότι $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ και $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$. Από τη τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ έχουμε ότι:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{9}{25}.$$

Όμως $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ και επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$.

Επίσης $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ και τέλος $\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$.

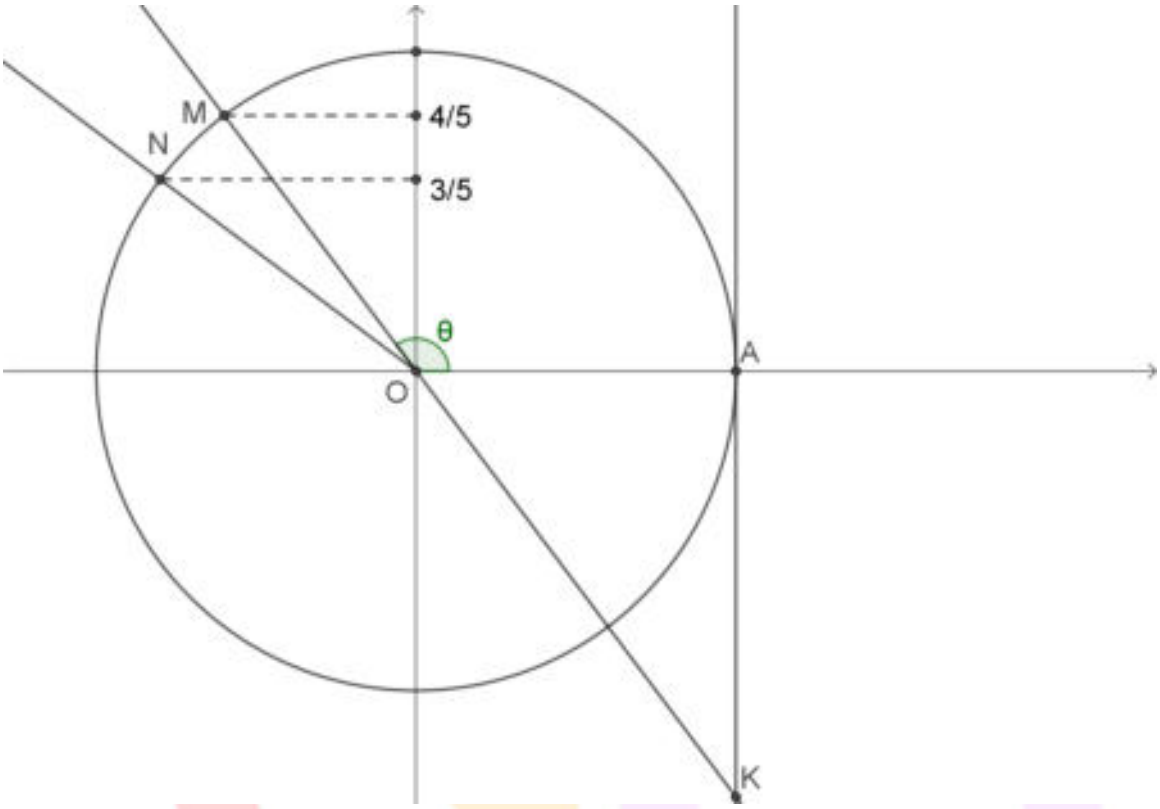
β) Γενικά, για τα σημεία M και K που η τελική πλευρά μιας γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο και την ευθεία $x = 1$ αντίστοιχα, ισχύει ότι $M(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και $K(1, \varepsilon\varphi\theta)$. Συνεπώς $M(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ και $K(1, -\frac{4}{3})$.

γ)

i. Είναι $\eta\mu\phi = \frac{3}{5} > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$, οπότε η τελική πλευρά της γωνίας φ είναι στο 2ο τεταρτημόριο.

ii. Είναι $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, δηλαδή $\eta\mu\theta > \eta\mu\phi$. Όμως η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, οπότε για να είναι $\eta\mu\theta > \eta\mu\phi$ θα πρέπει $\theta < \phi$.

Εναλλακτικά, βρίσκουμε το σημείο Ν του κύκλου με τεταγμένη $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και τετμημένη $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$ και διαπιστώνουμε το σημείο Ν είναι πιο αριστερά και κάτω από το σημείο Μ δηλαδή $A\hat{O}M < A\hat{O}N$ οπότε $\theta < \phi$.



νέο φροντιστήριο

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx'.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης f είναι $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$-1\le \eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 1$ οπότε $-2\le 2\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 2$ οπότε $-2+1\le 1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 2+1$ και τελικά

$-1\le f(x)\le 3$.

Επίσης $f(1)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$ και $f(3)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Συνεπώς η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η ελάχιστη το -1.

γ) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι

$$f(x)=0\Leftrightarrow 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\\ \eta'\\ \dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{6}\\ \eta'\\ \dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\dfrac{7\pi}{6}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\dfrac{x}{2}=2\kappa-\dfrac{1}{6}\\ \eta'\\ \dfrac{x}{2}=2\kappa+\dfrac{7}{6}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=4\kappa-\dfrac{1}{3}\\ \eta'\\ x=4\kappa+\dfrac{7}{3}\end{array}\right\},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί της μορφής $x=4\kappa-\dfrac{1}{3}$ ή $x=4\kappa+\dfrac{7}{3}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(1-x)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi(1-x)}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi-\pi x}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2}\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, οπότε

$$\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=\left(1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2+\left(1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2=$$

$$4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=4(\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))=4\cdot 1=4$$

δηλαδή $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu(\pi+x),\ x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2\le f(x)\le 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu(\pi+x)=-\eta\mu x$, έχουμε: $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1,\ (1)\ \text{και}\ -1\le\eta\mu x\le 1\Leftrightarrow -1\le-\eta\mu x\le 1,\ (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι: $-2\le\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\le 2$, δηλαδή $-2\le f(x)\le 2$, που είναι το ζητούμενο.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f, τότε για κάποιο $x_o\in\mathbb{R}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu x_o=1$ και $\eta\mu x_o=-1$, οπότε $\eta\mu^2x_o+\sigma\upsilon\nu^2x_o=1+1=2$, που είναι άτοπο. Άρα ο αριθμός 2 δεν είναι η μέγιστη τιμή της f.

γ) i. Με $x=0$ έχουμε: $f(0)=\sigma\upsilon\nu 0-\eta\mu 0=1-0=1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$.

ii. Με $y=0$ δηλαδή $f(x)=0$ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x$. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{\pi}{4}$ και επειδή $\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\eta\mu\frac{\pi}{4}=\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, μια άλλη λύση της είναι ο αριθμός $\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$.

Άρα δυο κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$ είναι τα $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=1$.

(Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu x,\ \rho>0$ με $\rho=2$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -2 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 2.

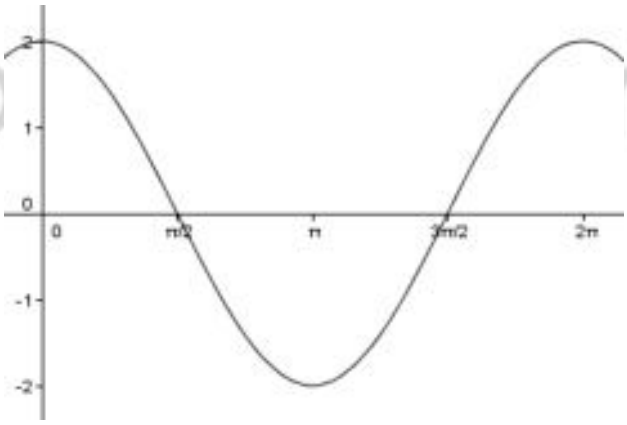
β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y=1$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1$ που είναι ισοδύναμη με την $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$. Μια προφανής λύση της είναι η $x=\frac{\pi}{3}$ και επειδή οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο, μια άλλη λύση είναι η $x=-\frac{\pi}{3}$.

Άρα, δυο κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=1$ είναι τα $\left(-\frac{\pi}{3},1\right),\left(\frac{\pi}{3},1\right)$.

γ) Οι αριθμοί $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{5}$ περιέχονται στο πρώτο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση συνημίτονο, είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον $\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{15}>0$, οπότε $\frac{2\pi}{5}>\frac{\pi}{3}$ και λόγω της μονοτονίας του συνημιτόνου παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)>\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, οπότε $2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)>2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, δηλαδή $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα προκύπτει η γραφική παράσταση της f όπως φαίνεται στο σχήμα.

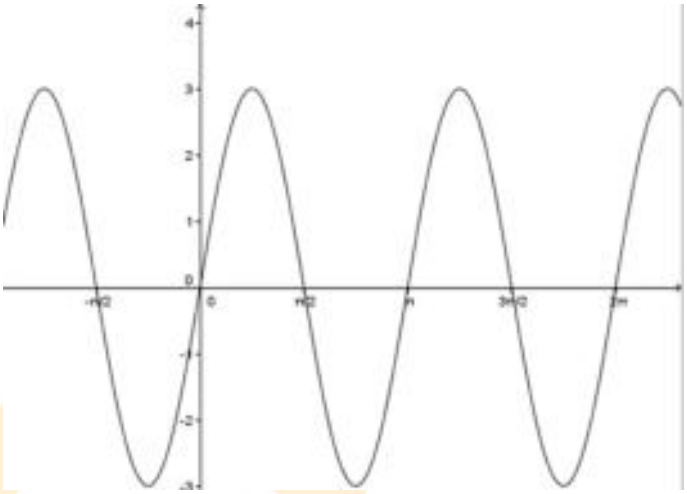
x		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sigma\upsilon\nu x$		2	0	-2	0	2



ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x),\ x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \rho > 0$



α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ.

(Μονάδες 6)

Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από επανάληψη του τμήματος της που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0,\pi]$, οπότε η περίοδος της f είναι $T=\pi$. Επιπλέον οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης περιέχονται στο διάστημα $[-3,3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu(\alpha x)$ με $\alpha,\rho>0$, οπότε έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\alpha}$ ελάχιστη τιμή $-\rho$ και μέγιστη ίση με ρ. Έτσι, έχουμε $\frac{2\pi}{\alpha}=\pi$, οπότε $\alpha=2$ και $\rho=3$.

γ) Είναι: $g(x)=x^4-2x^2+5=(x^2-1)^2+4\geq 4$ και η ισότητα $g(x)=4$ ισχύει όταν $x^2=1$ δηλαδή όταν $x=-1$ ή $x=1$. Άρα ο αριθμός 4 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

δ) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\leq 3$ και $g(x)\geq 4$, η εξίσωση $f(x)=g(x)$ είναι αδύνατη. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

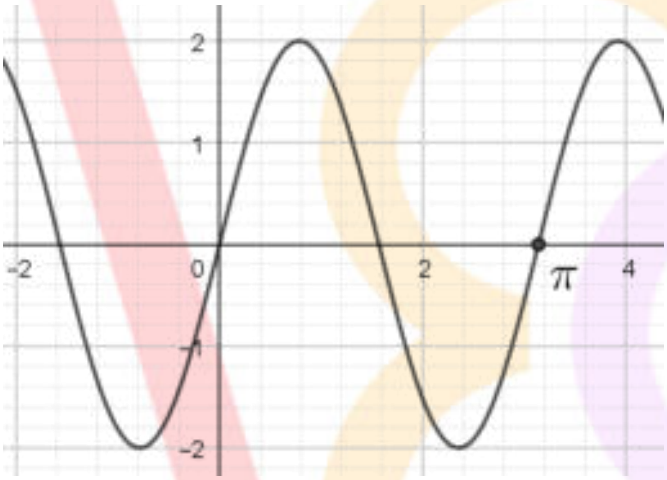
$f(x) = ημαx \cdot \left[συν\left(\frac{π}{2} - αx\right) + 2\right] - συναx \cdot συν(π - αx) - 1$, με $α \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot ημαx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $α = 2$.



(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $ε: y = 1$ για $x \in [0, π]$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α)

i. Ισχύει ότι $συν\left(\frac{\pi}{2}-\alpha x\right)=ημαx$ και $συν(\pi-\alpha x)=-συναx$. Άρα, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x)=ημαx(ημαx+2)-συναx(-συναx)-1=$$
$$ημ^2\alpha x+2ημαx+συν^2\alpha x-1=$$
$$1+2ημαx-1=2ημαx.$$

ii. Η $ημαx$ έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\alpha}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f έχει περίοδο $T=\pi$. Άρα,

$$\frac{2\pi}{\alpha}=\pi \Leftrightarrow \alpha=2.$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$2ημ2x=1 \Leftrightarrow ημ2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$ημ2x=ημ\frac{\pi}{6}.$$

Οπότε,

$$\begin{cases} 2x=\frac{\pi}{6}+2\kappa\pi \\ \text{ή} \\ 2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2\kappa\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+\kappa\pi \\ \text{ή} \\ x=\frac{5\pi}{12}+\kappa\pi \end{cases}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Επειδή $x\in[0,\pi]$ έχουμε ότι:

$$0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le\frac{\pi}{12}+\kappa\pi\le\pi \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{12}\le\kappa\le 1-\frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{11}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} k=0$$

και

$$0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le\frac{5\pi}{12}+\kappa\pi\le\pi \Leftrightarrow$$
$$-\frac{5}{12}\le\kappa\le 1-\frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12}\le\kappa\le\frac{7}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} k=0.$$

Άρα, $x=\frac{\pi}{12}$ και ή $x=\frac{5\pi}{12}$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y=\alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega>0$, $\rho>0$ και $x\in\mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho=3$ και $\omega=2$.

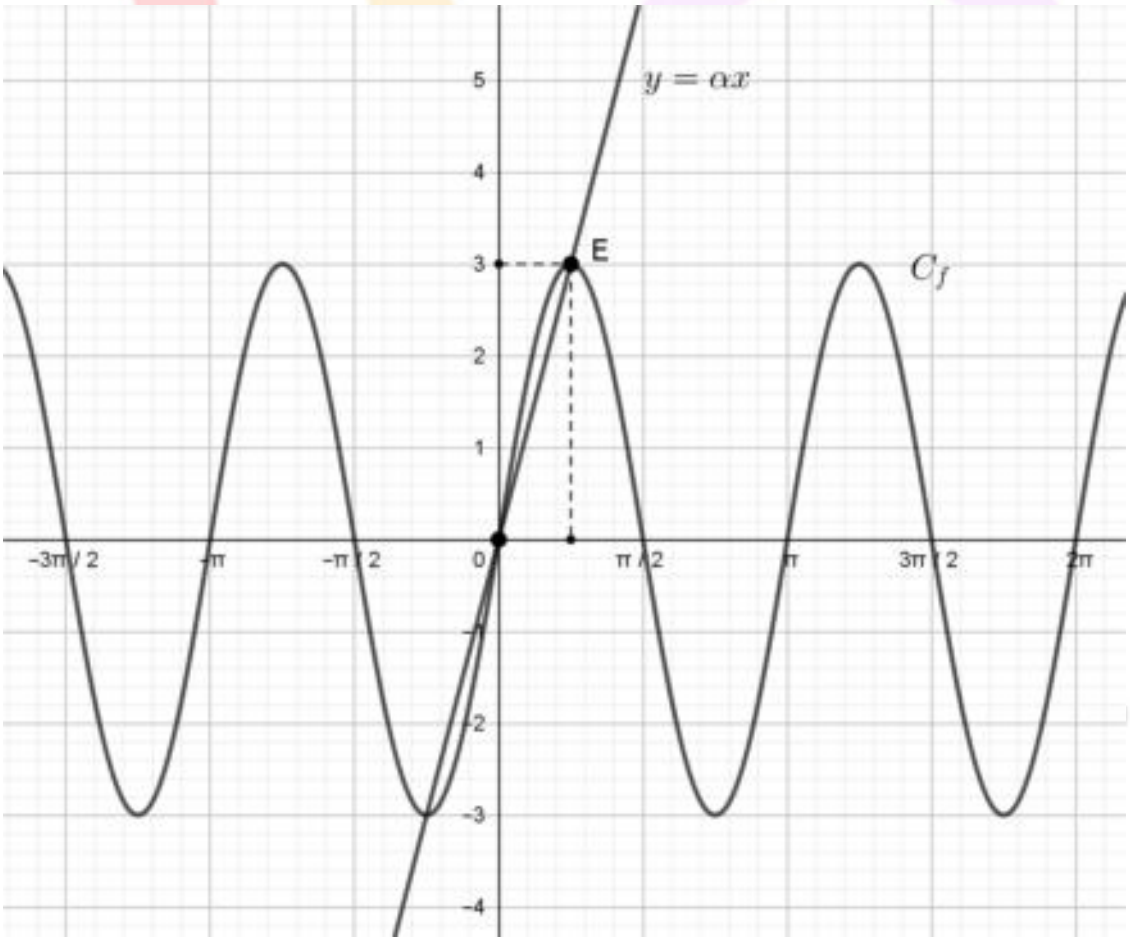
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho>0$, έχει μέγιστη τιμή ρ. Με βάση το σχήμα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3, άρα $\rho=3$. Επίσης η περίοδος της συνάρτησης είναι π, οπότε $\pi=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow\omega=2$. Άρα $f(x)=3\eta\mu(2x)$.

β) Η ευθεία $y=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο E της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 3, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu(2x)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στη θέση $x=\frac{\pi}{4}$. Άρα είναι $\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ και $3=\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\alpha=\frac{12}{\pi}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι :

$y=\frac{12}{\pi}x$.

γ) Η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$ γράφεται ισοδύναμα $3\eta\mu(2x)=\frac{12}{\pi}x$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f(x)=3\eta\mu(2x)$ με την ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$. Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι 3, οι τετμημένες των οποίων είναι

- $x=0$, δεδομένου ότι $f(0)=3\eta\mu 0=0$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $(0,0)$.
- $x=\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(\frac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot1=3$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{12}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ και
- $x=-\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(-\frac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(-2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot(-1)=-3$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{12}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-\frac{\pi}{4},-3\right)$.

Άρα η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$ έχει λύσεις τις $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=-\frac{\pi}{4}$.

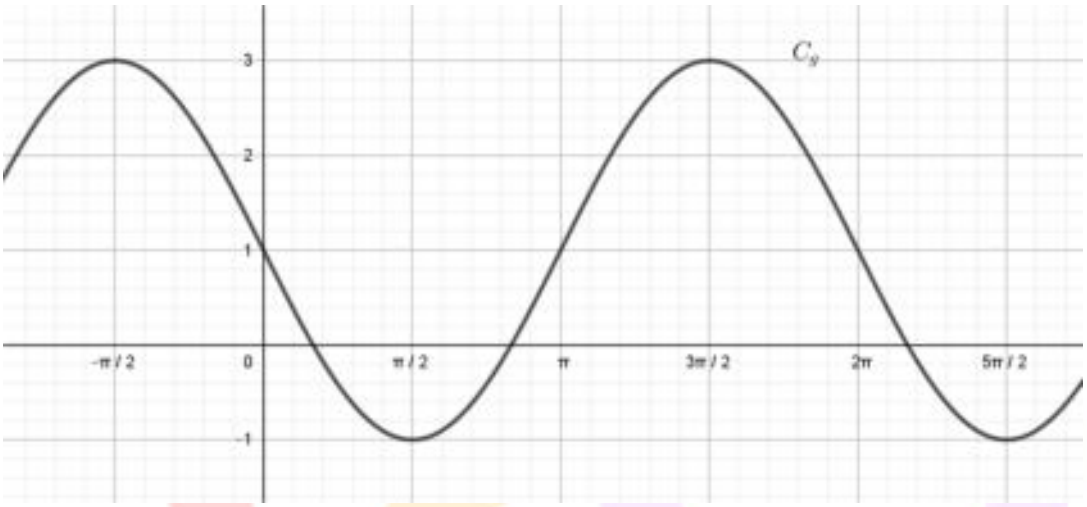
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 3x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\alpha\eta\mu\beta x+\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β και γ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha=-2,\ \beta=1$ και $\gamma=1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $[0,\pi)$

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T=\frac{2\pi}{3}$, η μέγιστη τιμή της είναι $\max f(x)=2+1=3$, και η ελάχιστη τιμή της είναι $\min f(x)=-2+1=-1$.

β)

i. Από την γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης g, παρατηρούμε ότι παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\frac{\pi}{2}$ και το επόμενο μέγιστο για $x=\frac{3\pi}{2}$. Άρα η περίοδος της συνάρτησης είναι $T=\frac{3\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$, οπότε $\beta=1$. Η καμπύλη προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\alpha\eta\mu x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, άρα $\gamma=1$. Επίσης

$$\begin{aligned}
&g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=3\Leftrightarrow\\
&\alpha\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{2}+1=3\Leftrightarrow.\\
&\alpha\cdot(-1)=2\Leftrightarrow\\
&\alpha=-2
\end{aligned}$$

Τελικά $g(x)=-2\eta\mu x+1$.

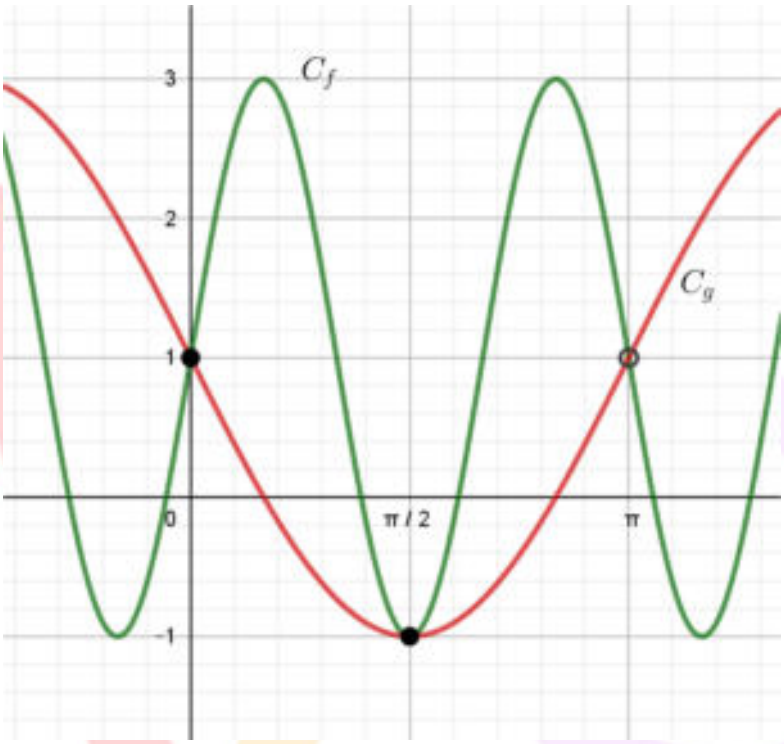
ii. Η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&f(x)=g(x)\Leftrightarrow\\
&2\eta\mu 3x+1=-2\eta\mu x+1\Leftrightarrow\\
&\eta\mu 3x=-\eta\mu x\Leftrightarrow\\
&\eta\mu 3x=\eta\mu(-x)\Leftrightarrow\\
&\begin{cases}3x=2\kappa\pi-x\\ \text{ή}\\ 3x=2\kappa\pi+(\pi+x)\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή: $\begin{cases}x=\frac{\kappa\pi}{2}\\ \text{ή}\\ x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$. Επειδή $x\in[0,\pi)$, για $\kappa=0$ στον πρώτο τύπο λύσεων προκύπτει $x=0$ και στον δεύτερο τύπο λύσεων προκύπτει $x=\frac{\pi}{2}$ (που προκύπτει και από

τον πρώτο τύπο λύσεων για $\kappa = 1$). Από τις άλλες τιμές του $\kappa \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν λύσεις οι οποίες δεν ανήκουν στο διάστημα $[0, \pi)$.

Η γραφική λύση της εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τελικά ή εξίσωση έχει δυο λύσεις στο $[0, \pi)$, τις $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σύστημα: $(\Sigma):\begin{cases}-x+2y=1\\ x+\lambda y=\lambda\end{cases}$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α)

i. Αν $\lambda=-1$,να λύσετε το σύστημα.

(Μονάδες 2)

ii. Αν (x_0,y_0) είναι η λύση του συστήματος για $\lambda=-1$, να βρείτε γωνία $\theta\in[0,2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0=\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0=\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\lambda=1$ και (x_1,y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $x_1=\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1=\eta\mu\omega$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2,y_2) με $x_2=\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y_2=\eta\mu\varphi$, $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

i. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{3}{5}$ και $\eta\mu\varphi=\frac{4}{5}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Για $\lambda=-1$ το σύστημα γίνεται: $(\Sigma):\begin{cases}-x+2y=1\\ x-1y=-1\end{cases}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=0\\ x=-1\end{cases}$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x_0,y_0)=(-1,0)$.

ii. Από το αi) ερώτημα έχουμε $x_0=\sigma\upsilon\nu\theta=-1$, $y_0=\eta\mu\theta=0$ και $\theta\in[0,2\pi)$, οπότε $\theta=\pi$.

β) Για $\lambda=1$ το σύστημα γίνεται: $(\Sigma):\begin{cases}-x+2y=1\\ x+1y=1\end{cases}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}\\ x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x_1,y_1)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

Δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{1}{3}$ και $\eta\mu\omega=\dfrac{2}{3}$, διότι

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\neq 1.$$

γ)

i. Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2,y_2) με $x_2=\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y_2=\eta\mu\varphi$, τότε θα ικανοποιεί και την πρώτη εξίσωση, $-x+2y=1$. Δηλαδή:

$$-\sigma\upsilon\nu\varphi+2\eta\mu\varphi=1 \qquad (1).$$

Λύνοντας την εξίσωση (1) έχουμε ισοδύναμα:

$$-\sigma\upsilon\nu\varphi+2\eta\mu\varphi=1\Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\varphi=1+\sigma\upsilon\nu\varphi\overset{\substack{\eta\mu\varphi>0\\ \sigma\upsilon\nu\varphi>0}}{\Leftrightarrow}$$

$$4\eta\mu^2\varphi=1+2\sigma\upsilon\nu\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\Leftrightarrow$$

$$4\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\Leftrightarrow$$

$$5\sigma\upsilon\nu^2\varphi+2\sigma\upsilon\nu\varphi-3=0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με $\Delta=64>0$ και ρίζες

$\sigma\upsilon\nu\varphi=-1$, που απορρίπτεται γιατί $\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

και $\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{3}{5}$.

Άρα από την (1) έχουμε:

$$-\frac{3}{5}+2\eta\mu\varphi=1\Leftrightarrow$$
$$2\eta\mu\varphi=\frac{8}{5}\Leftrightarrow$$
$$\eta\mu\varphi=\frac{4}{5}.$$

ii. Η λύση $(x_2,y_2)=(\sigma\upsilon\nu\varphi,\eta\mu\varphi)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ του συστήματος (Σ) θα ικανοποιεί και την δεύτερη εξίσωσή του, δηλαδή

$$\frac{3}{5}+\lambda\cdot\frac{4}{5}=\lambda\Leftrightarrow$$
$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}\cdot\lambda\Leftrightarrow$$
$$\lambda=3.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συν^2(\pi - x) - 3ημ\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2συν^2x - 3συνx + \alpha$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το a αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για α=2 και $g(x) = 2ημ^2x + 9συνx - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $συν(\pi - x) = -συνx$ και $ημ\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = ημ\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = συν(-x) = συνx$.

Άρα: $f(x) = 2συν^2(\pi - x) - 3ημ\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + α = 2συν^2x - 3συνx + α$.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $f(-x) = 2συν^2(-x) - 3συν(-x) + α = 2συν^2x - 3συνx + α = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$ αν και μόνον αν $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2συν^2\frac{\pi}{3} - 3συν\frac{\pi}{3} + α = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + α = 1 \Leftrightarrow α = 2$.

δ) Με $a = 2$ έχουμε $f(x) = 2συν^2x - 3συνx + 2$.

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2συν^2x - 3συνx + 2 = 2ημ^2x + 9συνx - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2συν^2x - 3συνx + 2 = 2(1 - συν^2x) + 9συνx - 9 \Leftrightarrow 4συν^2x - 12συνx + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$(2συνx - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow συνx = \frac{3}{2}$, αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - 2x) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$ με $a > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (a + 2)\eta\mu 2x$.

(Μονάδες 5)

β)

i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f.

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x) = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g, όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $f(x) = a\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x) = a\eta\mu 2x + 2\eta\mu 2x = (a+2)\eta\mu 2x.$

β)

i. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f καθορίζεται από το συντελεστή $a + 2$.

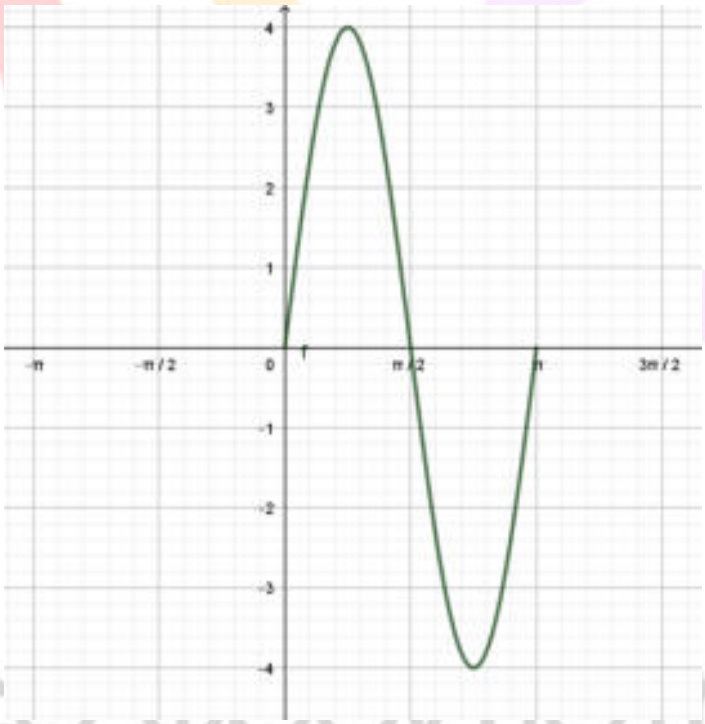
Πρέπει δηλαδή $a + 2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

ii. Η περίοδος $T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$

γ) Η γραφική παράσταση της $f(x) = 4\eta\mu 2x$ στο διάστημα $[0, \pi]$, βάσει του παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$4\eta\mu 2x$	0	4	0	-4	0

δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



δ) Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 5 - (1 - \eta\mu^2 2x) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 2x - 4\eta\mu 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu 2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = 2 \text{ αδύνατη.}$$

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\, ημx$, $g(x) = ημ(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω, αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2ημx, x \in [0, \pi]$ και $g(x) = ημ(2x), x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 10)

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2ημ\frac{5\pi}{9} > ημ\frac{10\pi}{9}$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της, που είναι ίση με $-\rho$. Άρα $\rho = 2$.

Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης g, που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$.

Άρα $\frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = 2$.

β)

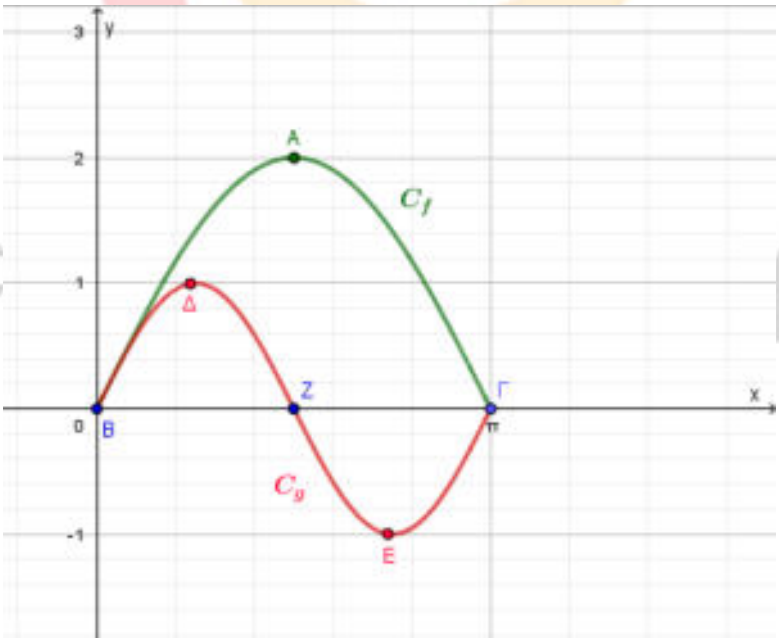
i. Για τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$, με $x \in [0, \pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2	0

Για τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(2x)$, με $x \in [0, \pi]$, είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x) = \eta\mu(2x)$	0	1	0	-1	0

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, είναι:



ii. Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9} \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\left(2\cdot\frac{5\pi}{9}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$$

Είναι: $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \pi$.

Επομένως, από τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων προκύπτει ότι

$$f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > 0 \text{ και } g\left(\frac{5\pi}{9}\right) < 0.$$

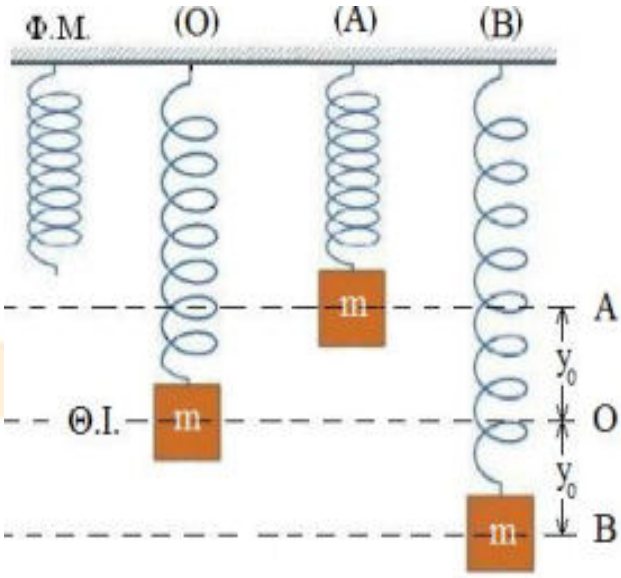
Ως εκ τούτου είναι $f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > g\left(\frac{5\pi}{9}\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται απο το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση Ο (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.



Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση Ο, εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0{,}2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} t$$

α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1, 1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

(Μονάδες 07)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

Η τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$ έχει μέγιστη τιμή ρ, ελάχιστη τιμή $-\rho$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ως εκ τούτου,

α) Το $y_0 = (OA) = (OB) = \rho = 0{,}2$ μέτρα.

Η συνάρτηση $y(t)$ έχει μέγιστη τιμή $1 + \rho = 1{,}2$, ελάχιστη τιμή $1 - \rho = 0{,}8$ και η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης είναι:

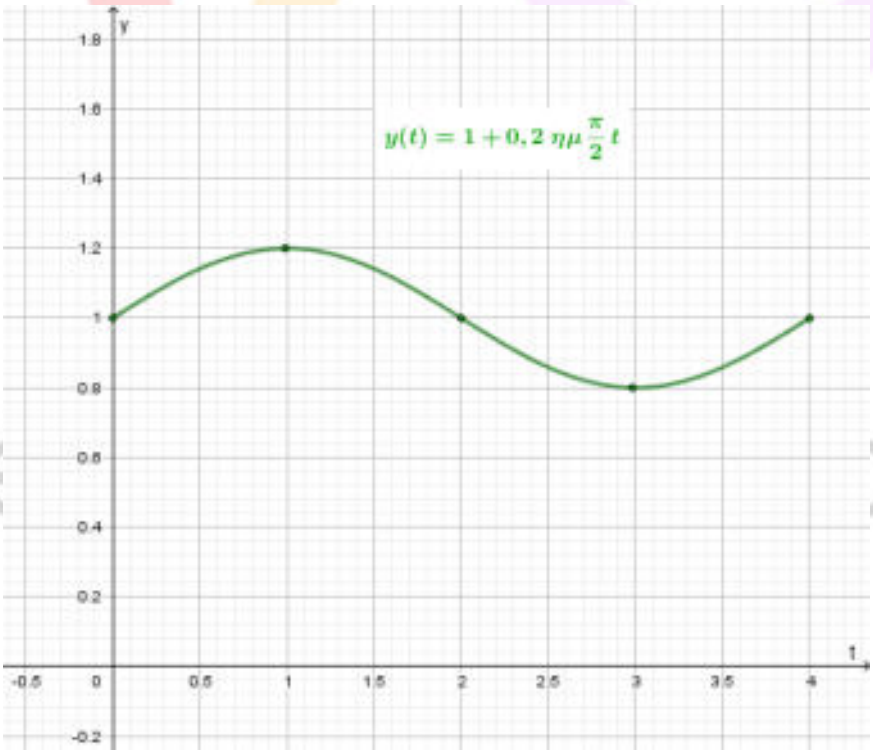
$|1{,}2 - 0{,}8| = 0{,}4$ μέτρα.

β) η περίοδος της συνάρτησης $y(t)$ είναι: $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow T = 4$.

γ) Ο πίνακας τιμών για τη συνάρτηση $y(t) = 1 + 0{,}2 \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2}t$ για $t \in [0, 4]$, είναι:

t	0	1	2	3	4
$y(t)$	1	1,2	1	0,8	1

Είναι $y_{max} = 1{,}2$ και $y_{min} = 0{,}8$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



δ) Ζητάμε ουσιαστικά να βρούμε ποια χρονική στιγμή $t \in [0,2]$, είναι $y(t) = 1{,}1$.

Έχουμε: $\begin{cases} y(t) = 1 + 0{,}2 \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2}t \\ \kappa\alpha\iota \\ y(t) = 1{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}2 \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2}t = 0{,}1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{2}t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu\frac{\pi}{2}t = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ \frac{\pi}{2}t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \ \kappa \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4\kappa + \frac{1}{3} \\ \acute{\eta} \\ t = 4\kappa + \frac{5}{3} \end{cases}, \ \kappa \in Z$$

Επειδή όμως $t \in [0,2]$, έχουμε:

$0 \le t \le 2 \Rightarrow 0 \le 4\kappa + \frac{1}{3} \le 2 \Rightarrow -\frac{1}{12} \le \kappa \le \frac{5}{12}, \ \kappa \in Z \ (1)$

$0 \le t \le 2 \Rightarrow 0 \le 4\kappa + \frac{5}{3} \le 2 \Rightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{1}{12}, \ \kappa \in Z \ (2)$

Και από τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι $\kappa = 0$, επομένως: $t = \frac{1}{3}$ ή $t = \frac{5}{3}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3}\cdot\eta\mu x$ και $g(x) = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

(Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x < 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αν υπήρχε γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ θα είχαμε $0+0=1$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς δεν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από την εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ θα είχαμε και $\eta\mu x = 0$, το οποίο όμως όπως δείξαμε στο α) είναι άτοπο. Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

Με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ έχουμε ισοδύναμα

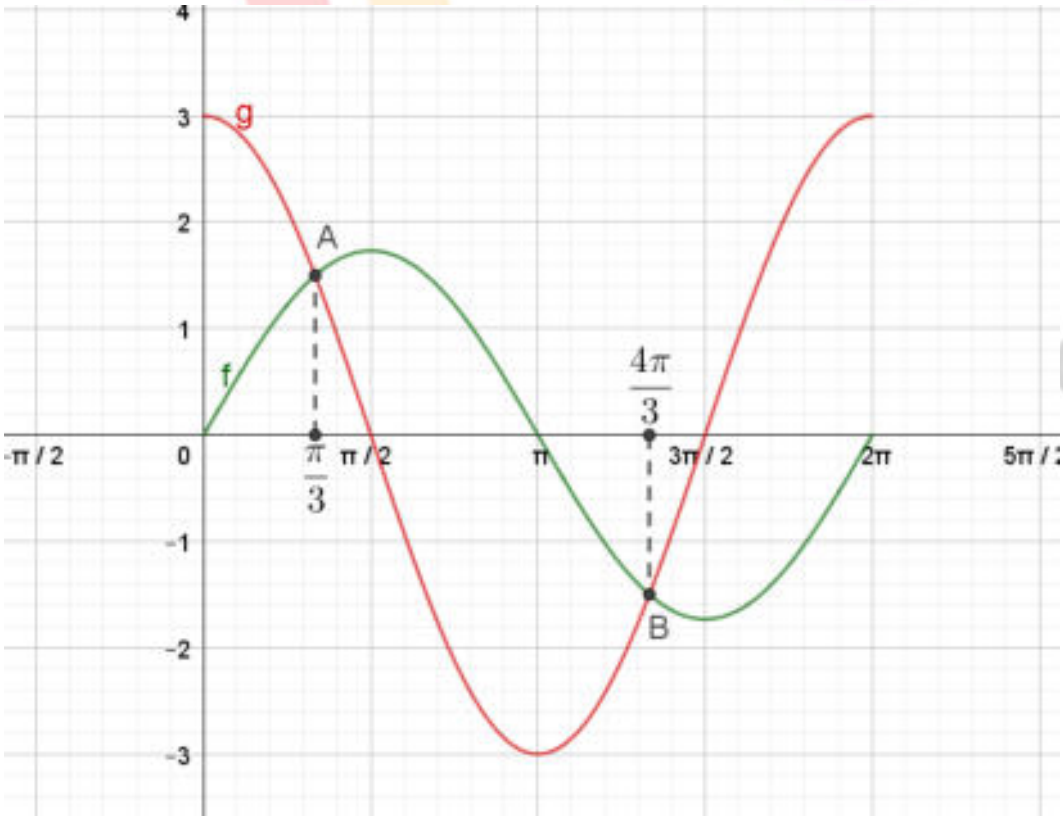
$$\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$$

η οποία στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει λύσεις τις $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

γ) Με βάση τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	0	π/2	π	3π/2	2π
$f(x) = \sqrt{3}\cdot\eta\mu x$	0	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0
$g(x) = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$	3	0	-3	0	3

οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται στα σημεία Α και Β οι τετμημένες των οποίων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$, που όπως βρήκαμε στο ερώτημα β) είναι $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{4\pi}{3}$ αντίστοιχα. Αυτή είναι η ζητούμενη γραφική ερμηνεία.

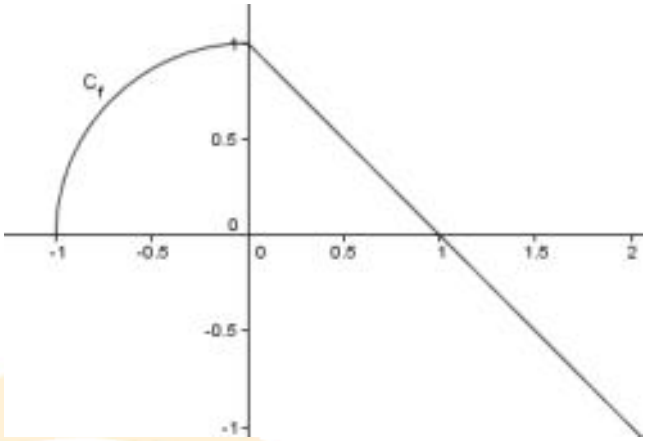
δ) Η ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, γραφικά σημαίνει να βρούμε για ποιες τιμές του x στο διάστημα $[0, 2\pi]$, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g. Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$f\left(-\frac{3}{5}\right), f\left(-\frac{5}{9}\right)$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & x>0\end{cases},$$

να βρείτε τους αριθμούς $f(\text{συν}120^\circ)$, $f(\text{ημ}120^\circ)$

(Μονάδες 8)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x-2), x\ge 1$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση της f συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Επιπλέον η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 0$. Η μέγιστη τιμή της είναι ίση με $f(0) = 1$.

β) Οι αριθμοί $-\frac{3}{5}, -\frac{5}{9}$ περιέχονται στο διάστημα $[-1, 0]$ όπου η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και

$$-\frac{3}{5}+\frac{5}{9}=\frac{-27+25}{45}=-\frac{2}{45}<0$$

οπότε $-\frac{3}{5}<-\frac{5}{9}$ και λόγω της μονοτονίας της f συμπεραίνουμε ότι $f\left(-\frac{3}{5}\right)<f\left(-\frac{5}{9}\right)$.

γ) Είναι:

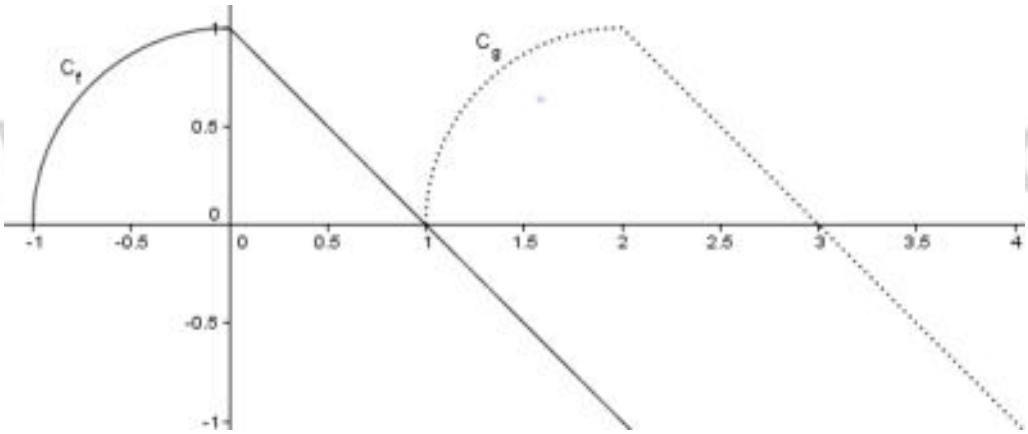
$$\text{συν}120^\circ=\text{συν}(180^\circ-60^\circ)=-\text{συν}60^\circ=-\frac{1}{2}\in[-1, 0]$$

$$\text{και } \text{ημ}120^\circ=\text{ημ}(180^\circ-60^\circ)=\text{ημ}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\in(0, +\infty)$$

Έτσι, με τη βοήθεια του τύπου της f έχουμε:

$$f(\text{συν}120^\circ)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } f(\text{ημ}120^\circ)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

δ) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει με μεταφορά της C_f δυο μονάδες προς τα δεξιά και φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x-1,\ x\in[0,2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες x'x και y'y .

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 7)

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha)=f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από την γνωστή ανισότητα $-1 \le \eta\mu x \le 1$ προκύπτει ότι $-2 \le 2\eta\mu x \le 2$, οπότε $-3 \le 2\eta\mu x - 1 \le 1$, δηλαδή $-3 \le f(x) \le 1$. Επιπλέον στο διάστημα $[0, 2\pi]$ η ισότητα $f(x) = -3$ ισχύει όταν $\eta\mu x = -1$ δηλαδή $x = \frac{3\pi}{2}$, ενώ η $f(x) = 1$ ισχύει όταν $\eta\mu x = 1$ δηλαδή $x = \frac{\pi}{2}$.

Επομένως η f παρουσιάζει:

- Ολικό ελάχιστο για $x = \frac{3\pi}{2}$, το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$.
- Ολικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$, το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

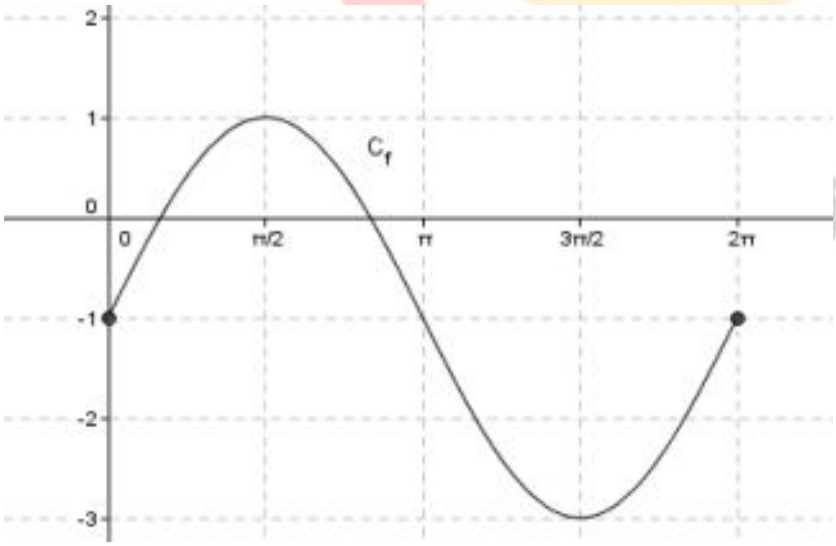
β) Με $x = 0$ έχουμε $f(0) = -1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -1)$.

Με $y = f(x) = 0$ έχουμε $2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$, οπότε για $x \in [0, 2\pi]$ βρίσκουμε $x = \frac{\pi}{6}$ ή $x = \frac{5\pi}{6}$. Επομένως τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα $B\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, $\Gamma\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$.

γ) Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$f(x)$	-1	1	-1	-3	-1

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα προκύπτει η επόμενη γραφική παράσταση C_f της f.



δ) Από την ισότητα $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, έχουμε:

$$2\eta\mu\alpha - 1 = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 1$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha$ και λόγω του περιορισμού $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\text{συν}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $g(x)=\text{συν}x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x)+1=0$.

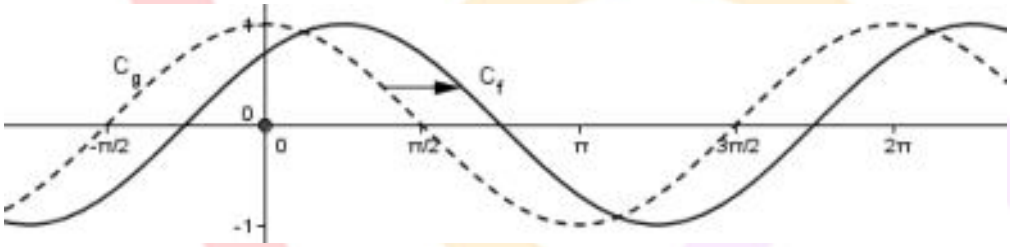
(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από την ισότητα $f(x)=g\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της g, αν την μετατοπίσουμε κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες προς τα δεξιά.

β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γνωστή γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ (με διακεκομμένη γραμμή) και η γραφική παράσταση της f που προκύπτει από αυτή, αν την μεταφέρουμε δεξιά κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες.



γ) Είναι:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

και

$$f(\pi)=f\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

δ) Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, έχουμε:

$$\sqrt{2}f(x)+1=0\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\pi \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{με } \kappa\in\mathbb{Z}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστηριο

ΘΕΜΑ 4

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f, που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

(Μονάδες 6)

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

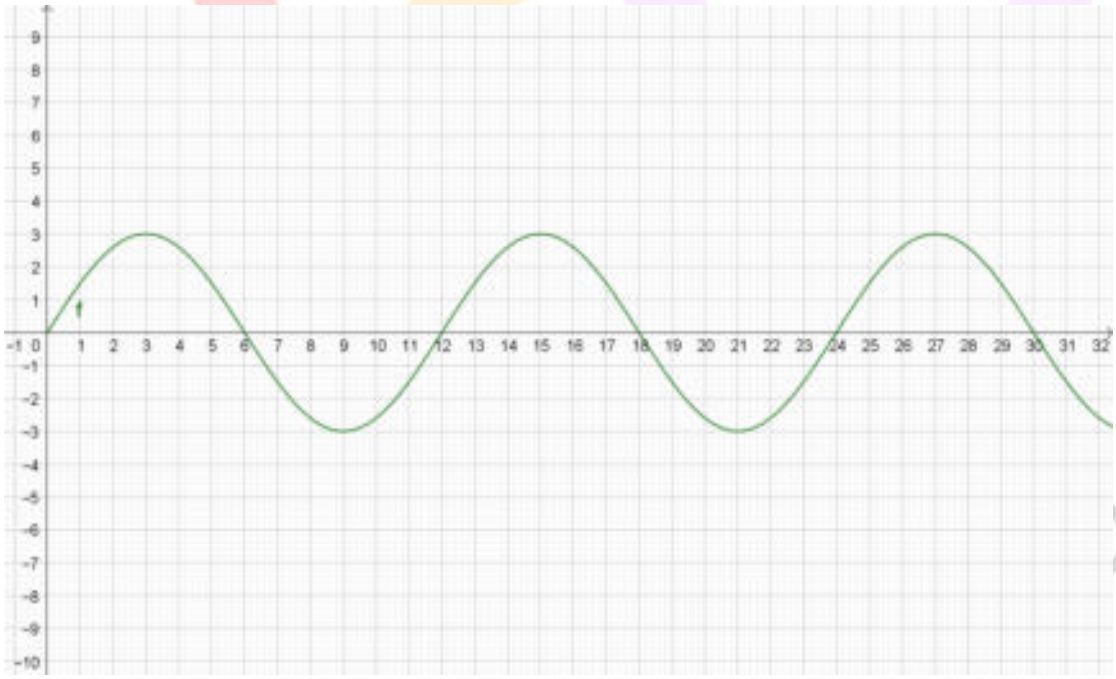
(Μονάδες 6)

γ) τον τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Γραφικά η υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη, εκφράζεται με τη διαφορά του ελαχίστου -3 της συνάρτησης f, από το μέγιστό της 3. Συνεπώς η ζητούμενη υψομετρική διαφορά είναι 6 μέτρα.

β) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το μικρότερο διάστημα που απαιτείται για να αρχίσει να επαναλαμβάνεται η γραφική παράσταση είναι 12 ώρες. Συνεπώς η ζητούμενη περίοδος είναι 12.

γ) Ο τύπος της ημιτονοειδούς συνάρτησης f είναι της μορφής $f(t)=\rho\cdot\eta\mu(\omega t)$ όπου $\rho>0,\omega>0$. Δεδομένου ότι η μέγιστη τιμή της f είναι 3 συμπεραίνουμε ότι $\rho=3$. Επίσης η περίοδος είναι 12 οπότε $\frac{2\pi}{\omega}=12\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}$. Συνεπώς η συνάρτηση f έχει τύπο $f(t)=3\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)$.

δ) Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(t)=\frac{3}{2}$, όπου $0\le t\le 24$. Είναι

$$f(t)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\eta\mu(\frac{\pi}{6})\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{6}\cdot t=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ \frac{\pi}{6}\cdot t=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=12\kappa+1\\ \text{ή}\\ t=12\kappa+5\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Επειδή $0\le t\le 24$, έχουμε τελικά ότι οι ζητούμενες ώρες είναι 1, 5, 13, 17.

Σχόλιο: Αυτό επιβεβαιώνεται και γραφικά από τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f, με την ευθεία $y=\frac{3}{2}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Το βάθος y, σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι $5,8$ μέτρα και συμβαίνει στις $3:00$ π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι $2,6$ μέτρα και συμβαίνει στις $9:00$ π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y=\alpha\eta\mu(\omega t)+\beta$, με $\alpha,\omega,\beta>0$ και $0\le t\le 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,ω και β.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha=1,6$, $\omega=\frac{\pi}{6}$ και $\beta=4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y=1,6\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}t)+4,2$, με $0\le t\le 24$.

(Μονάδες 8)

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

(Μονάδες 4)

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον $4,2$ μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το διάστημα ανάμεσα στο πρώτο μέγιστο βάθος και στο πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 6 ώρες, που είναι η μισή περίοδος. Κατά συνέπεια η περίοδος είναι $T = 2\cdot 6 = 12$ ώρες και $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = 12 \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{12} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$. Ισχύει:

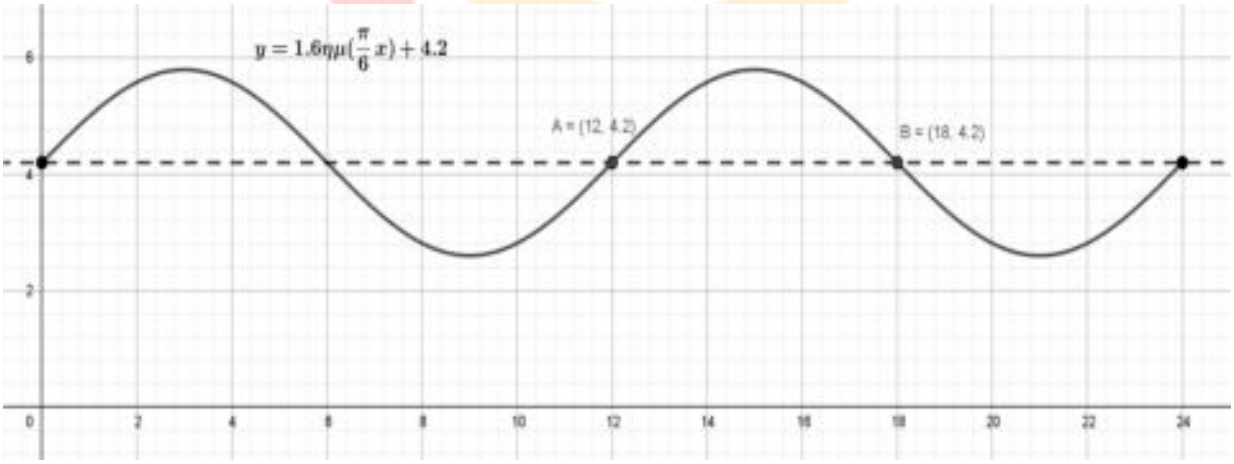
$$\begin{aligned}
&-1 \le \eta\mu(\omega t) \le 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \\
&-\alpha \le \alpha\eta\mu(\omega t) \le a \Leftrightarrow \\
&-\alpha+\beta \le \alpha\eta\mu(\omega t)+\beta \le a+\beta \Leftrightarrow \\
&-\alpha+\beta \le y \le \alpha+\beta
\end{aligned}$$

Το μέγιστο βάθος είναι $5,8$ μέτρα και το ελάχιστο $2,6$ μέτρα άρα,

$$\begin{cases} -\alpha+\beta = 2,6 \\ \alpha+\beta = 5,8 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\beta = 8,4 \\ \alpha+\beta = 5,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4,2 \\ \alpha = 1,6 \end{cases}.$$

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$, τότε $y = 1,6\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}t)+4,2$, $0 \le t \le 24$.

i. Η συνάρτηση έχει μέγιστο $5,8$, ελάχιστο $2,6$ και περίοδο 12, οπότε η γραφική της παράσταση σε διάστημα δυο περιόδων ($0 \le t \le 24$) είναι:



ii. Το βάθος του νερού, σε μέτρα, στις 12 το μεσημέρι είναι:

$$y = 1,6\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot 12)+4,2 = 1,6\cdot\eta\mu(2\pi)+4,2 = 1,6\cdot 0+4,2 = 4,2.$$

iii. Όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6}t) + 4,2$ στο βi) ερώτημα, το πλοίο θα δέσει με ασφάλεια το χρονικό διάστημα $[12,18]$, δηλαδή από τις 12 το μεσημέρι μέχρι τις 6 το απόγευμα, γιατί στο διάστημα αυτό το βάθος του νερού είναι $y \geq 4,2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha+1}{2}\sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha,\beta>0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=4$.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\eta\mu(2\pi+x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=-1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2\mathrm{A}$, στο διάστημα $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$, με $\rho,\omega>0$:

Έχει ελάχιστο $-\rho$, οπότε έχουμε $-\frac{\alpha+1}{2}=-2\Leftrightarrow\alpha+1=4\Leftrightarrow\alpha=3$.

Ακόμα έχει περίοδο $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$, οπότε έχουμε $\frac{2\pi}{\beta}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\beta=4$.

Τελικά, η συνάρτηση είναι $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 4x$. (1)

β) Έχουμε για τον αριθμητή:

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi(\pi-x)=-\varepsilon\varphi x$, $\eta\mu(2\pi+x)=\eta\mu x$.

Έχουμε για τον παρονομαστή :

$\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)=\sigma\upsilon\nu(\pi-x)=-\sigma\upsilon\nu x$,

$\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(3\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sigma\varphi\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x$,

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x$.

Αντικαθιστώντας έχουμε $\mathrm{A}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\varepsilon\varphi x)\cdot\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x\cdot\varepsilon\varphi x\cdot(-\eta\mu x)}=-1$.

γ) Έχουμε, λόγω της (1) και του β) ερωτήματος:

$f(x)=2\mathrm{A}\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 4x=-2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu 4x=-1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu 4x=\sigma\upsilon\nu\pi\Leftrightarrow$

$4x=2\kappa\pi\pm\pi\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$

Επειδή πρέπει $x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$, δηλαδή $\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$\pi\le\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 1\le\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{4}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

$\frac{3}{4}\le\frac{\kappa}{2}\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le\kappa\le\frac{5}{2}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}\kappa=2.$

Άρα $x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

$\pi\le\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 1\le\frac{\kappa}{2}-\frac{1}{4}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

$\frac{5}{4}\le\frac{\kappa}{2}\le\frac{7}{4}\Leftrightarrow\frac{5}{2}\le\kappa\le\frac{7}{2}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}\kappa=3.$

Άρα, πάλι $x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$.