Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Άλγεβρα

Κεφάλαιο: 4 Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις

Θέμα 2

ΘΕΜΑ 2

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-3x^2+2x-2$.

(Μονάδες 8)

γ) Είναι το $x=3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$P(x)=(x-3)(x^2+2)+4$

β) Έχουμε $P(x)=(x-3)(x^2+2)+4 \Leftrightarrow P(x)=x^3+2x-3x^2-6+4$.

Τελικά $P(x)=x^3-3x^2+2x-2$.

γ) Ο αριθμός $x=3$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, αν η διαίρεσή του με το $x-3$ έχει υπόλοιπο 0, που δεν συμβαίνει εδώ, αφού $P(3)=4$, άρα το $x=3$ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

(Μονάδες 5)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$$

και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)Με $x=1$ έχουμε:

$$x^3-7x+6=1^3-7\cdot 1+6=7-7=0$$

οπότε ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-7x+6):(x-1)$ είναι x^2+x-6 και το υπόλοιπο 0, οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η:

1	0	−7	6	1
	1	1	−6	
1	1	−6	0	

$$x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$$

γ) Από το ερώτημα β) έχουμε:

$$x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-3$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3-5x^2+7x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $P(1)=1^4-1^3-5\cdot 1^2+7\cdot 1-2=1-1-5+7-2=0$, ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Οι πιθανές ακέραιες λύσεις του πολυωνύμου είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου του δηλαδή οι διαιρέτες του 2 που είναι οι αριθμοί $1, 2, -1, -2$.

Ο αριθμός 1 είδαμε ότι είναι ρίζα του πολυωνύμου. Εξετάζουμε αν κάποιος από τους άλλους αριθμούς είναι ρίζα. Είναι:

- $P(2)=16-8-20+14-2=0$
- $P(-1)=1+1-5-7-2=-12\neq 0$
- $P(-2)=16+8-20-14-2=-12\neq 0$

Επομένως οι ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9$ και $Q(x) = \alpha x^2 + 7$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2x^3 - 2 + 9 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = 0x^3 + 4x^2 + 7 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = 4x^2 + 7.$$

Συνεπώς το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού.

β) Για να είναι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ίσα, πρέπει να είναι ίδιου βαθμού και να έχουν τους αντίστοιχους συντελεστές ίσους. Άρα πρέπει $\alpha = 4$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 7)

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε

$P(x)=(2x-1)(x^2-2)+1=2x^3-4x-x^2+2+1=2x^3-x^2-4x+3$.

β) Με $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ φαίνεται παρακάτω.

2	-1	-4	3	1
	2	1	-3	
2	1	-3	0	

Συνεπώς το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.είναι

$P(x)=(x-1)(2x^2+x-3)$.

ii. Έχουμε λοιπόν: $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+x-3)=0$ οπότε

$x-1=0$ ή $2x^2+x-3=0$ δηλαδή $x=1$ ή $x=1$ ή $x=-\frac{3}{2}$.

Τελικά $x=1$ (διπλή ρίζα) ή $x=-\frac{3}{2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Στο πολυώνυμο μπορούμε να εξάγουμε κοινό παράγοντα το x και έχουμε:

$P(x)=2x^3+x^2-x=x(2x^2+x-1)$ που είναι το ζητούμενο.

β) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $P(x)=2x^3+x^2-x=0 \Leftrightarrow x(2x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow$

$x(2x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{1}{2}$ ή $x=-1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2(x-1)^{20}-3(x-1)^{10}+5x^2-3x-2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.

(Μονάδες 5)

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν $P(\rho)=0$. Έχουμε $P(1)=2(1-1)^{20}-3(1-1)^{10}+5\cdot 1^2-3\cdot 1-2=0$, άρα το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β)

i. Είναι $P(0)=2(0-1)^{20}-3(0-1)^{10}+5\cdot 0^2-3\cdot 0-2=2-3-2=-3$.

ii. Αφού $P(0)=-3\neq 0$, το x δεν είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $P(2)=2^3-7\cdot 2+6=8-14+6=0$, οπότε το 2 είναι ρίζα του $P(x)$ και το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x)\div(x-2)$,

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3+0x^2-7x+6 & x-2 \\ \cline{3-3}
(+) & -x^3+2x^2 & x^2+2x-3 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2-7x+6 & \\
(+) & -2x^2+4x & \\ \cline{1-2}
 & -3x+6 & \\
(+) & 3x-6 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Άρα $P(x)=(x-2)(x^2+2x-3)$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$
\begin{aligned}
&P(x)=0 \Leftrightarrow \\
&(x-2)(x^2+2x-3)=0 \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} x-2=0 \\ \text{ή} \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ x=1, x=-3 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x=1,\ x=2,\ x=-3$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x - 3, x \in R$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 6 = 0$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)
$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2+2x-3 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x^2 & x^2-x+3 \\ \cline{1-1} -x^2+2x-3 & \\ x^2+x & \\ \cline{1-1} 3x-3 & \\ -3x-3 & \\ \cline{1-1} -6 & \end{array}$$

Με βάση την παραπάνω διαίρεση διαπιστώνουμε ότι $P(x)=(x+1)(x^2-x+3)-6$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να απαντήσουμε με χρήση του σχήματος Horner.

β) Η εξίσωση $P(x)+6=0$ γράφεται $(x+1)(x^2-x+3)=0$. Αλλά το τριώνυμο x^2-x+3 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot3=-11<0$ και επομένως δεν έχει ρίζες. Ώστε $x+1=0$, έτσι μοναδική ρίζα είναι η $x=-1$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $P(x)+6=0$ ανεξάρτητα από το α) ερώτημα ως εξής: $x^3+2x+3=0 \Leftrightarrow x^3+3x-x+3=0 \Leftrightarrow$

$x(x^2-1)+3(x+1)=0$, άρα $(x-1)(x+1)x+3(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)[x(x-1)+3]=0$, οπότε $(x+1)(x^2-x+3)=0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x + 6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 5)

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = 0$.

β) Αφού ο αριθμός -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, άρα το $x - (-2) = x + 2$ θα είναι παράγοντας του $P(x)$.

γ) Με βάση το β) ερώτημα, η διαίρεση $P(x) : (x + 2)$ θα είναι τέλεια, αφού το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι το $P(-2) = 0$. Εκτελούμε το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

1	0	-1	6	-2
	-2	4	-6	
1	-2	3	0	

Άρα $P(x) = (x + 2)(1x^2 - 2x + 3)$. Παρατηρούμε τώρα, ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x + 3$ είναι $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$, άρα δεν αναλύεται σε γινόμενο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Παραγοντοποιούμε το $P(x)$ και έχουμε

$$P(x)=x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)=(x+1)(x+1)(x-1)=(x+1)^2(x-1)$$

β) Το πρόσημο του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+	
$(x+1)^2$		+	0	+		+	
$P(x)$		-	0	-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)\geq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in[1,+\infty)\cup\{-1\}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Παραγοντοποιούμε το $P(x)$ και έχουμε

$$P(x)=2x^3-x^2+2x-1=x^2(2x-1)+2x-1=(2x-1)(x^2+1)$$

β) Το πρόσημο του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+
x^2+1	+		+
$P(x)$	-	0	+

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)\geq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+2x+2$.

α)

i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

(Μονάδες 8)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $P(x)=(x+1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Η διαίρεση του $P(x)=x^3+x^2+2x+2$ με το $(x+1)$ είναι η παρακάτω:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2+2x+2 & x+1 \\ \cline{2-2}
-x^3-x^2 \qquad\qquad & x^2+2 \\ \cline{1-1}
2x+2 & \\
-2x-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

ii. Η ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης είναι:

$$x^3+x^2+2x+2=(x+1)(x^2+2)+0 \Rightarrow$$

$$x^3+x^2+2x+2=(x+1)(x^2+2).$$

β) Έχουμε ισοδύναμα: $P(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2)<0 \overset{x^2+2>0}{\Leftrightarrow} x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x) : (x^2 + x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 3 \neq 0$ και

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 \neq 0.$

Άρα το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Είναι:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 - 3x + 1 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2x^2 + 2x & 2x - 1 \\ \cline{1-1} -x^2 - x + 1 & \\ x^2 + x - 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης των δύο πολυωνύμων είναι το $\pi(x) = 2x - 1$ και το υπόλοιπο είναι 0.

Επομένως ισχύει: $P(x) = (x^2 + x - 1) \cdot (2x - 1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$, άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

β) Επιπλέον ισχύει ότι

$$1 \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow x - 1 \text{ παράγοντας του } P(x)$$

Εφαρμογή του σχήματος Horner:

1	−1	1	−1	ρ =1
	1	0	1	
1	0	1	0	

Επομένως ισχύει: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$.

Εναλλακτική απάντηση:

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

γ) Είναι λοιπόν

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0 \overset{x^2+1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} x = 1.$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3\,x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = (x - 1\,) \cdot (x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 0$, άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου. Επιπλέον ισχύει ότι

$$1 \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow x - 1 \text{ παράγοντας του } P(x)$$

β) Είναι: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x + 2)$.

Το τριώνυμο $x^2 - x + 2 \neq 0$ διότι έχει διακρίνουσα αρνητική και επιπρόσθετα ισχύει ότι $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Το πρόσημο των τιμών του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$x^2 - x + 2$		$+$	|	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Ως εκ τούτου, είναι: $P(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

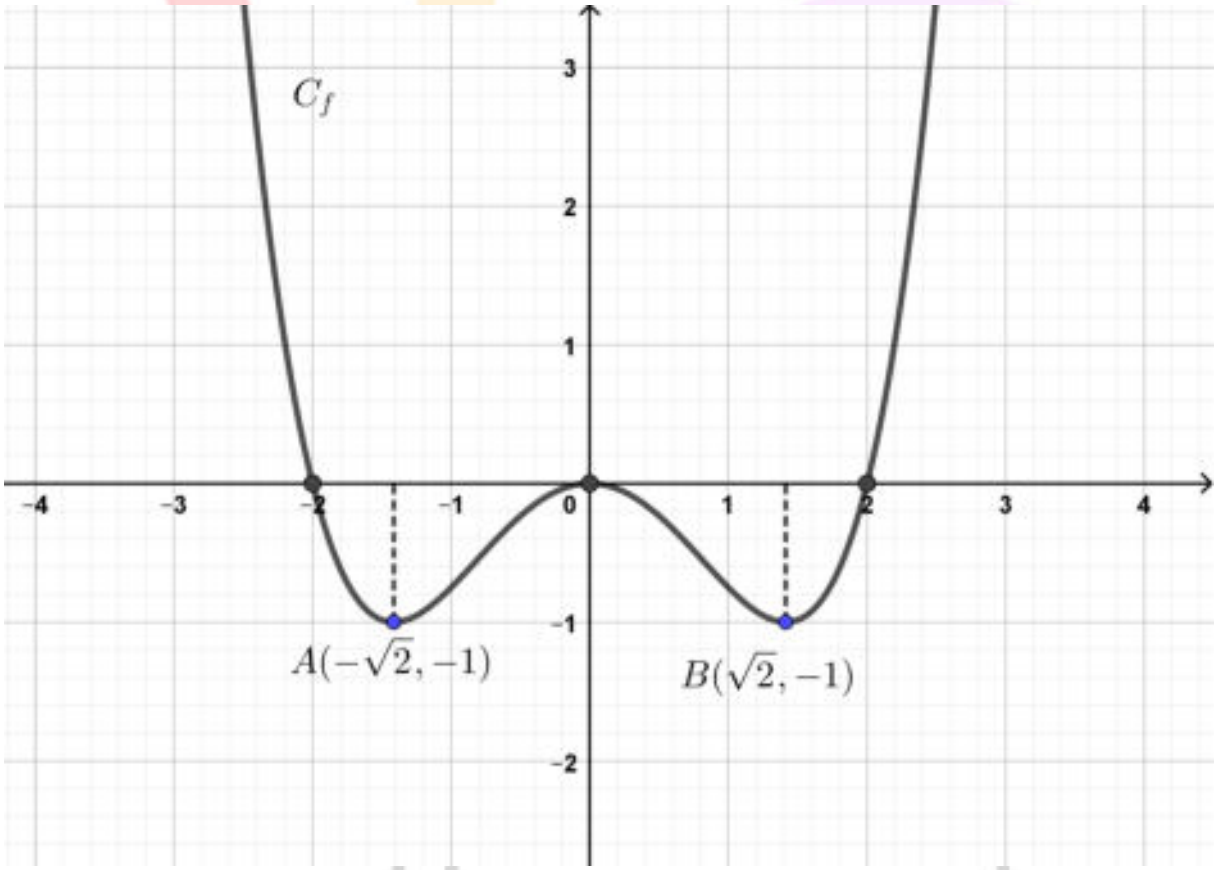
(Μονάδες 7)

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A(-\sqrt{2},-1)$ και $B(\sqrt{2},-1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

(Μονάδες 10)

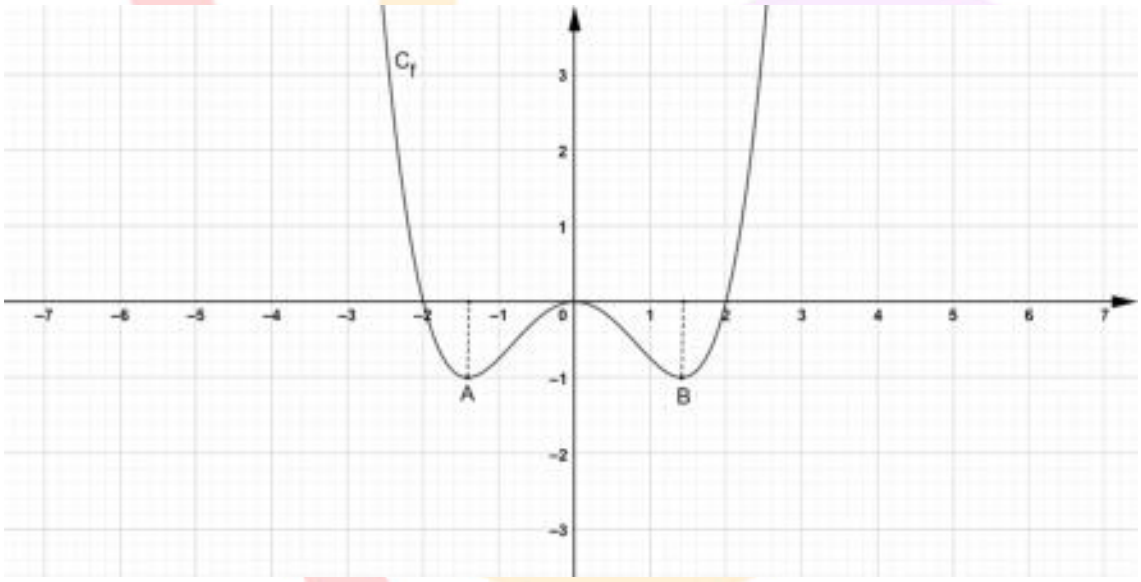


ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $-x \in \mathbb{R}$ και από το σχήμα παρατηρούμε πως η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Άρα, η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Από τη γραφική παράσταση C_f, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$ και $x \in [0, \sqrt{2}]$ ενώ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in [-\sqrt{2}, 0]$ και $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$.

γ) Για τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ αρκεί να βρούμε τις τετμημένες των σημείων που η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$, δηλαδή τα σημεία που έχουν τεταγμένη ίση με μηδέν. Αυτά είναι $\Gamma(-2,0), O(0,0), \Delta(2,0)$. Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $-2, 0, 2$.



νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-x^2-x+2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<3$.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση $P(x):(x-1)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 - x^2 - x + 2 & x-1 \\ \cline{2-2}
-3x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & 3x^2 + 2x + 1 \\ \cline{1-1}
2x^2 - x + 2 & \\
-2x^2 + 2x \qquad & \\ \cline{1-1}
x+2 & \\
-x+1 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι : $P(x) = (x-1)(3x^2+2x+1)+3$.

β) Με βάση την παραπάνω ταυτότητα διαίρεσης, η ζητούμενη ανίσωση γίνεται

$$P(x) < 3 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)(3x^2+2x+1)+3 < 3 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)(3x^2+2x+1) < 0$$

Το τριώνυμο $3x^2+2x+1$ έχει διακρίνουσα αρνητική, οπότε είναι για κάθε τιμή του x ομόσημο του συντελεστή του x^2 που ισούται με 3, δηλαδή θετικό, οπότε η ανίσωση γίνεται ισοδύναμα

$$(x-1)(3x^2+2x+1) < 0 \Leftrightarrow$$
$$x-1 < 0 \Leftrightarrow$$
$$x < 1$$

Τελικά η ανίσωση $P(x) < 3$ αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$.

α)

I. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x + 1)$.

(Μονάδες 7)

II. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x + 1)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

I. Επειδή $P(-1) = (-1)^3 + (-1) + 2 = -2 + 2 = 0$, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ είναι 0. Άρα, το$(x+1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

II. Κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	0	1	2	-1
	-1	1	-2	
1	-1	2	0	

Άρα, $P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ οπότε $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) < 0 \Leftrightarrow$$
$$x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-8x-4$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$.

(Μονάδες 9)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-2)$, μόνο όταν $P(2)=0$.

Πραγματικά,

$$P(2)=2\cdot 8+4-8\cdot 2-4=16+4-16-4=0$$

οπότε το $(x-2)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Είναι:

$$P(x)=2x^3+x^2-8x-4=2x^3-8x+x^2-4=2x(x^2-4)+(x^2-4)$$

$$=(x^2-4)(2x+1)=(x-2)(x+2)(2x+1)$$

γ) Ισχύει:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-2$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$, 2 και -2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-2x+4$.

α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Εφόσον το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές, οι πιθανές ακέραιες ρίζες του θα είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 4, δηλαδή οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Αντικαθιστώντας στο πολυώνυμο $P(x)$ όπου x τον αριθμό 2 παρατηρούμε ότι:

$P(2)=2^3-2\cdot 2^2-2\cdot 2+4=8-8-4+4=0$, άρα η μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου είναι το 2.

β) Εφόσον το 2 είναι ρίζα του $P(x)$ ισχύει ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ οπότε εκτελώντας τη διαίρεση έχουμε:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-2x+4 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^3+2x^2 & x^2-2 \\ -2x+4 & \\ 2x-4 & \\ 0 & \end{array}$$

Συνεπώς, η εξίσωση γράφεται: $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$.

Οπότε οι ρίζες του πολυωνύμου είναι $x=2$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$.

Το πολυώνυμο γράφεται: $P(x)=(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-8x^2+7x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 9)

β) Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x)=P(x)+Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x)=P(x)\cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$P(1)=2\cdot 1^3-8\cdot 1^2+7\cdot 1-1=2-8+7-1=9-9=0$$

οπότε το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό 1.

β) Ισχύει: $Q(1)\neq 0$, οπότε:

i. Για το πολυώνυμο $R_1(x)$ έχουμε:

$$R_1(1)=P(1)+Q(1)=0+Q(1)\neq 0$$

Άρα το πολυώνυμο $R_1(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii. Για το πολυώνυμο $R_2(x)$ έχουμε:

$$R_2(1)=P(1)\cdot Q(1)=0\cdot Q(1)=0$$

Άρα το πολυώνυμο $R_2(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 12)

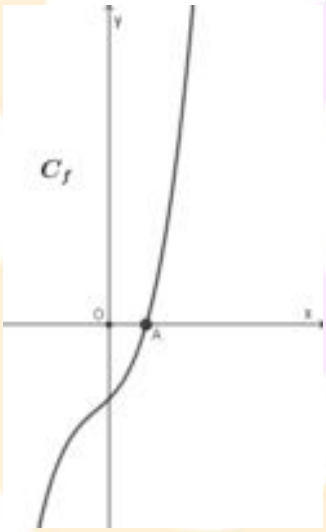
β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.

(Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 09)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης βρίσκονται στους διαιρέτες του -1 και είναι οι αριθμοί ± 1.

Αλλά $f(1) = 3 \neq 0$ και $f(-1) = -3 \neq 0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β)

i. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα, διότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A.

ii. Είναι $f(1) = 3 > 0$ και $f(0) = -1 < 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα που προσδιορίζει τη ρίζα μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με προσέγγιση, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ μεταξύ των αριθμών 0 και 1.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 3$.

α) Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $\mathrm{P(x)}: (\mathrm{x} + 2)$

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x): (x + 2)$.

(Μονάδες 07)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 3 = 1.$$

Επομένως το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Το σχήμα Horner με διαιρετέο $P(x)$ και διαιρέτη $x + 2$ δίνει

1	2	1	3	ρ=−2
	−2	0	−2	
1	0	1	1	

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο

$$\pi(x) = x^2 + 1.$$

γ) Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ γράφεται

$$P(x) = (x^2 + 1)(x + 2) + 1 .$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση $P(x):(x-2)$;

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου (μη-μηδενικών) πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών. Επομένως, ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ είναι ίσος με 3, καθώς το $P(x)$ είναι γινόμενο τριών πολυωνύμων βαθμού 1.

β) $P(x):(x-2) = \frac{P(x)}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x-2} = (x-1)(x-3)$. Η διαίρεση, επομένως, είναι τέλεια, άρα το υπόλοιπο είναι ίσο με μηδέν.

Συνεπώς, $P(x) = (x-2)\cdot\underbrace{(x-1)(x-3)}_{\pi(x)} + \underbrace{0}_{\upsilon(x)}$.

Άρα, $\pi(x) = (x-1)(x-3)$ και $\upsilon(x) = 0$.

Σχόλιο:

Το θεώρημα «Ταυτότητα της Διαίρεσης» λέει ότι: *για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε $\Delta(x) = \delta(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)$, όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.*

Από την μοναδικότητα που εγγυάται το θεώρημα για τα πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, προκύπτει ότι και μόνο η παρατήρηση ότι

$$P(x) = (x-2)\cdot(x-1)(x-3) + 0$$

αρκεί για να βγει αμέσως το συμπέρασμα ότι $\pi(x) = (x-1)(x-3)$ και $\upsilon(x) = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-2)\cdot(x^6+1)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Εδώ, το πολυώνυμο $x-2$ είναι $1^{ου}$ βαθμού και το πολυώνυμο x^6+1 είναι $6^{ου}$ βαθμού. Επομένως, το γινόμενό τους $P(x)$ είναι πολυώνυμο $7^{ου}$ βαθμού.

β) Οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $P(x)=0$. Όμως,

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x^6+1)=0 \overset{x^6+1>0}{\Longleftrightarrow} x-2=0 \Leftrightarrow x=2\,.$$

Άρα, το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο