Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Άλγεβρα

Κεφάλαιο: 4 Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Η μέση θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν ^oC.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει

$T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία Τ είναι συνεχώς κάτω από μηδέν ^oC. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ζητάμε τον αριθμό $T(2) = 2^3 - 10 \cdot 2^2 + 31 \cdot 2 - 30 = 8 - 40 + 62 - 30 = 0$.

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι το πολυώνυμο $T(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$, άρα η διαίρεση $T(x):(x - 2)$ είναι τέλεια. Βρίσκουμε το πηλίκο αυτής της διαίρεσης με τη βοήθεια του σχήματος $Horner$.

1	- 10	31	- 30	2
	2	- 16	30	
1	- 8	15	0	

Ώστε $T(x) = (x - 2)(x^2 - 8x + 15)$.

Το τριώνυμο $x^2 - 8x + 15$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 4$ και ρίζες $x = \frac{8 \pm 2}{2}$, δηλαδή τους αριθμούς 3 και 5. Τελικά $T(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$.

Έτσι $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5$.

γ) Θέλουμε να βρούμε τα διαστήματα για τις τιμές x των οποίων θα είναι $T(x) < 0$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου των τιμών $T(x)$ για θετικές τιμές του x.

x	0	2	3	5	$+\infty$
$x - 2$	−	+	+	+	
$x^2 - 8x + 15$	+	+	−	+	
$T(x)$	−	+	−	+	

Διαπιστώνουμε ότι παγετώνες θα υπάρχουν στον πλανήτη τα δύο πρώτα εκατομμύρια χρόνια και την χρονική περίοδο από τρία έως πέντε εκατομμύρια χρόνια.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή $P(0)=2\neq 0$, το πολυώνυμο δεν έχει λύση τον αριθμό 0.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε ισχύει $P(\rho)=0$ δηλαδή

$$2\rho^4-5\rho^3+4\rho^2-5\rho+2=0\text{, (1).}$$

Για να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του, αρκεί να δείξουμε ότι $P\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$.

Πραγματικά, είναι:

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{2}{\rho^4}-\frac{5}{\rho^3}+\frac{4}{\rho^2}-\frac{5}{\rho}+2=\frac{1}{\rho^4}\left(2-5\rho+4\rho^2-5\rho^3+2\rho^4\right)=0$$

λόγω της (1).

β) Επειδή οι μοναδικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί που μπορεί να είναι ρίζες του είναι οι θετικοί διαιρέτες του 2, με $x=2$ έχουμε:

$$P(2)=2\cdot 16-5\cdot 8+4\cdot 4-5\cdot 2+2=50-50=0$$

οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου.

γ) Η εξίσωση $P(x)=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και λόγω του ερωτήματος α) έχει ρίζα και τον αριθμό $\frac{1}{2}$.

Έτσι, με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

2	−5	4	−5	2	2
	4	−2	4	−2	
2	−1	2	−1	0	

$$P(x)=(x-2)(2x^3-x^2+2x-1)$$

και αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για το πολυώνυμο $2x^3-x^2+2x-1$ με το $\frac{1}{2}$

2	−1	2	−1	$\frac{1}{2}$
	1	0	1	
2	0	2	0	

συμπεραίνουμε ότι

$$P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2)=(x-2)(2x-1)(x^2+1)$$

οπότε

$$P(x)=0\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}.$$

δ) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+1>0$, το πρόσημο του πολυωνύμου είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $(x-2)(2x-1)$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$(x-2)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι λύση της ανίσωσης $P(x)<0$ είναι κάθε αριθμός του διαστήματος $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha=4$ και $\beta=5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$ είναι το $\pi(x)=x^3-1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$.

(Μονάδες 4)

ii. να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x)<4x+1$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση $P(x):(x^2-4)$ φαίνεται παρακάτω

$$
\begin{array}{r|l}
x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-4 \\ \cline{2-2}
-x^5+4x^3 \qquad\qquad\qquad & x^3-1 \\ \cline{1-1}
-x^2+\alpha x+\beta & \\
x^2 \qquad -4 & \\ \cline{1-1}
\alpha x+\beta-4 &
\end{array}
$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι το πολυώνυμο $\alpha x+\beta-4$. Όμως από την εκφώνηση δίνεται ότι είναι το πολυώνυμο $4x+1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα $\alpha x+\beta-4$ και $4x+1$ πρέπει να είναι ίσα, δηλαδή $\alpha=4$ και $\beta=5$.

γ) Για $\alpha=4$ και $\beta=5$ έχουμε $P(x)=x^5-4x^3-x^2+4x+5$.

i. Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι $P(x)=(x^2-4)(x^3-1)+4x+1$.

ii. Αξιοποιώντας την ταυτότητα της διαίρεσης που βρήκαμε παραπάνω έχουμε $P(x)<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^3-1)+4x+1<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)<0$.

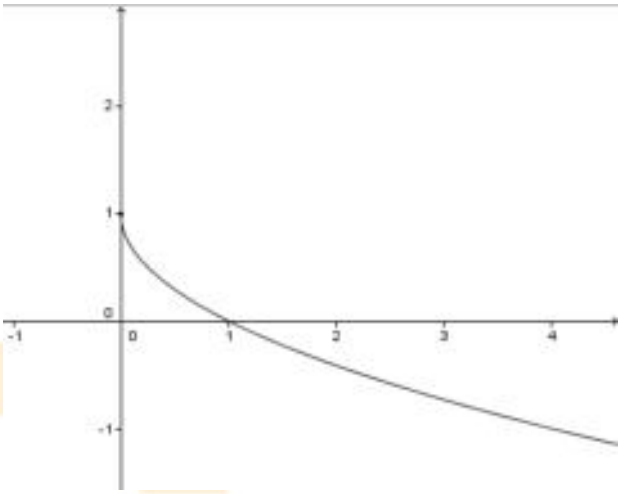
Το πρόσημο του πολυωνύμου $\Pi(x)=(x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	-		-	0	+	
$x-1$		-		-	0	+		+	
x^2+x+1		+		+		+		+	
$\Pi(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ζητούμενη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(1,2)$.

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.



α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$, και $0<\alpha<\frac{1}{4}<\beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P=(2f(\alpha)-1)(2f(\beta)-1)$

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x)=1-\sqrt{x}, x\geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y=2x$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα της εκφώνησης προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Επίσης, η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται όταν $x=0$.

β) Από την ανισότητα $\alpha<\frac{1}{4}$ και τη μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι $f(\alpha)>f\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow f(\alpha)>\frac{1}{2}$, οπότε $2f(\alpha)-1>0$.

Επίσης, $\beta>\frac{1}{4}$, οπότε $f(\beta)<f\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow f(\beta)<\frac{1}{2}$, απ' όπου προκύπτει ότι $2f(\beta)-1<0$.

Άρα, $P=\left(2f(\alpha)-1\right)\left(2f(\beta)-1\right)<0$.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία, δίνονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=2x$. Με $x\geq 0$ έχουμε:

$$f(x)=2x\Leftrightarrow 1-\sqrt{x}=2x\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}-1=0$$

Αν θέσουμε $\sqrt{x}=u$, τότε η εξίσωση γράφεται $2u^2+u-1=0$ και έχει λύσεις τους αριθμούς -1 και $\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε:

- $u=-1$: $\sqrt{x}=-1$ που είναι αδύνατη.
- $u=\frac{1}{2}$: $\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Εναλλακτική λύση του ερωτήματος γ)

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{4}$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=2x$. Επιπλέον:

- Αν $x>\frac{1}{4}$, τότε $2x>\frac{1}{2}$ και $f(x)<\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\neq 2x$.
- Αν $0\leq x<\frac{1}{4}$, τότε $2x<\frac{1}{2}$ και $f(x)>\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\neq 2x$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μοναδική λύση την $x=\frac{1}{4}$ και το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α,β, αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=4,\beta=-2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2+5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $P(x)=\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=14(x+2)$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

Η διαίρεση $P(x):Q(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
-x^4+2x^3-x^2 & x^2-2 \\ \cline{1-1}
-2x^2+\alpha x+\beta & \\
2x^2 \quad -4x+2 & \\ \cline{1-1}
(\alpha-4)x+\beta+2 &
\end{array}
$$

Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$, θα πρέπει το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεση να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, που συμβαίνει μόνο όταν $\alpha-4=0$ και $\beta+2=0$, δηλαδή $\alpha=4$ και $\beta=-2$.

β) Για $\alpha=4,\beta=-2$ έχουμε $P(x)=x^4-2x^3-x^2+4x-2$.

i. Η διαίρεση $P(x):(x^2+5)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-x^2+4x-2 & x^2+5 \\ \cline{2-2}
-x^4-5x^2 & x^2-2x-6 \\ \cline{1-1}
-2x^3-6x^2+4x-2 & \\
2x^3+10x & \\ \cline{1-1}
-6x^2+14x-2 & \\
6x^2+30 & \\ \cline{1-1}
14x+28 &
\end{array}
$$

και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής: $P(x)=\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28$

ii. Η εξίσωση $P(x)=14(x+2)$ με τη βοήθεια της παραπάνω ταυτότητας γίνεται

$$\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28=14(x+2)\Leftrightarrow$$
$$\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28=14x+28\Leftrightarrow$$
$$\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)=0$$

και επειδή $x^2+5\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι $x^2-2x-6=0$ δηλαδή $x=\dfrac{2\pm\sqrt{28}}{2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{7}}{2}=1\pm\sqrt{7}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε αν $x \in \mathbb{R}$ τότε και $-x \in \mathbb{R}$.

Επίσης είναι: $f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 + 2 = x^6 - 3x^2 + 2 = f(x)$.

Άρα, η f είναι άρτια.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0$.

Θέτουμε $x^2 = y$ και η εξίσωση γίνεται

$$y^3 - 3y + 2 = 0 \quad (1).$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι διαιρέτες του 2, δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2$. Για $\rho = 1$, κάνοντας τη διαίρεση με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

1	0	-3	2	$\rho = 1$
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Οπότε, το 1 είναι ρίζα και η εξίσωση (1) γίνεται:

$$(y-1)(y^2 + y - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

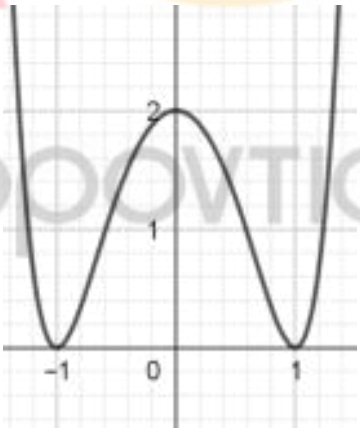
$$y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y^2 + y - 2 = 0.$$

Η εξίσωση $y^2 + y - 2 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1 = -2$ και $y_2 = 1$.

Οπότε, $x^2 = -2$, αδύνατη ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι: $A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, οπότε έχει την ακόλουθη μορφή:



δ) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+3}$ και

$g(x) = 3x - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g.

(Μονάδες 4)

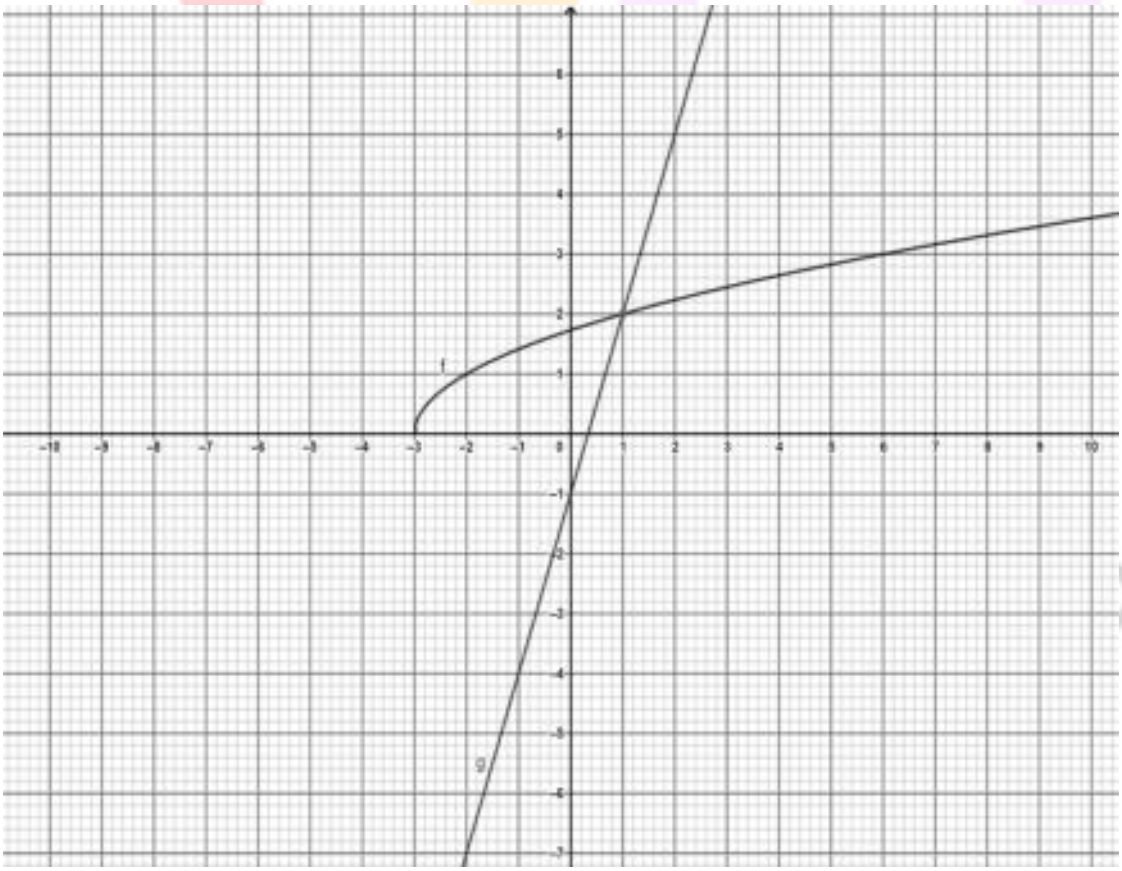
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$. (Μονάδες 7)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $x + 3 \geq 0$, δηλαδή για $x \geq -3$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι: $A_f = [-3, +\infty)$.

Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, +\infty)$.

Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εφόσον είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha > 0$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3x - 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g που ανήκουν στο σύνολο A=$A_f \cap A_g = [-3, +\infty)$.

Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο (1,2), δηλαδή στο σημείο με τετμημένη x=1 και $1 \epsilon A$.

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση x=1.

β) **Εναλλακτική λύση :**

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ προκύπτουν από τις λύσεις της παρακάτω εξίσωσης

$$\sqrt{x+3} = 3x - 1.$$

Η εξίσωση ορίζεται για $x \geq -3$ και $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

$\sqrt{x+3} = 3x - 1$ υψώνουμε και τα δυο μέλη στο τετράγωνο

$\sqrt{x+3}^2 = (3x-1)^2 \Leftrightarrow x + 3 = 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 7x - 2 = 0.$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι 1 και $-\frac{2}{9}$. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η x=1 είναι δεκτή.

Άρα, μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι η x=1.

γ) i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x, όπου η C_f είναι κάτω από C_g.

Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x \epsilon (1, +\infty)$.

ii. Αλγεβρικά η ανίσωση λύνεται:

Για $3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}^2 < (3x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x+3 < 9x^2-6x+1 \Leftrightarrow$$

$$9x^2-7x-2 > 0 \text{ τότε}$$

$$x\epsilon(-\infty, -\frac{2}{9})\cup(1,+\infty).$$

Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x\epsilon(1,+\infty)$.

Για $3x-1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε $\sqrt{x+3} < 3x-1$ αδύνατη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση *30* μέτρων.

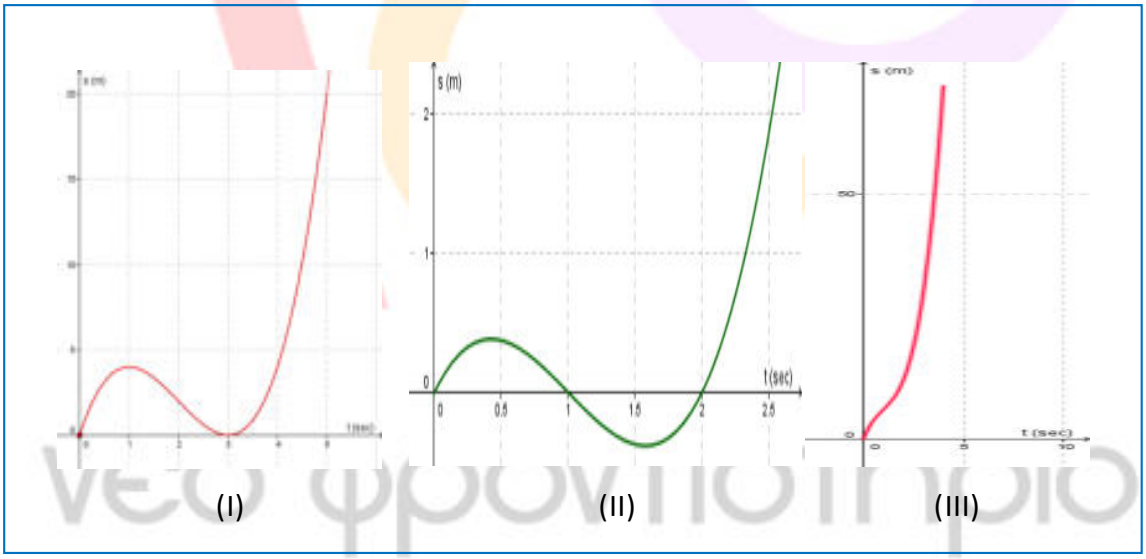
(Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

(Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)



(I) (II) (III)

ΛΥΣΗ

α) $S(0) = 0$ (το κινητό βρίσκεται στην αφετηρία) και $S(2) = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 20 = 12$ μέτρα.

β) $S(t) = 30 \Leftrightarrow 2t^3 - 6t^2 + 10t = 30 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 5t - 15 = 0$ (1).

Πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι οι ± 1, ± 3, ± 5, ± 15. Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικό φυσικό μέγεθος, πιθανές ρίζες είναι οι 1, 3, 5, 15.

Η τιμή $t = 3$ επαληθεύει την εξίσωση και με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

1	−3	5	−15	3
	3	0	15	
1	0	5	0	

Άρα η (1) $\Leftrightarrow (t-3)(t^2+5) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Επομένως το κινητό θα χρειαστεί *3* δευτερόλεπτα για να διανύσει απόσταση *30* μέτρων.

γ) Πραγματικά, έχουμε:

$S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t = 2t(t^2 - 3t + 5) \geq 0$,

διότι $t \geq 0$ (εκφράζει το χρόνο)

και $t^2 - 3t + 5 > 0$ (το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$, επομένως είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή του t^2).

δ) Με βάση το φυσικό πλαίσιο του προβλήματος, η συνάρτηση $S(t)$ πρέπει να είναι μη αρνητική και σε κανένα χρονικό διάστημα γνήσια φθίνουσα. Επομένως, είναι:

Η (I) είναι μεν μη αρνητική, αλλά δε διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας.

Η (II) παίρνει και αρνητικές τιμές.

Η (III) είναι μη αρνητική και γνησίως αύξουσα παντού, ως εκ τούτου αποτελεί την ενδεδειγμένη απάντηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha\, x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

(Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $\delta(x)$:

$$
\begin{array}{rr|l}
x^4+x^3 & +\alpha x-4 & x^2-3x+2 \\ \cline{3-3}
-x^4+3x^3-2x^2 & & x^2+4x+10 \\ \cline{1-2}
4x^3-2x^2 & +\alpha x-4 & \\
-4x^3+12x^2 & -8x & \\ \cline{1-2}
10x^2 & +(\alpha-8)x-4 & \\
-10x^2 & +30x-20 & \\ \cline{1-2}
 & (\alpha+22)x-24 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x)=\delta(x)\cdot(x^2+4x+10)+(\alpha+22)x-24$$

Επομένως πρέπει να ισχύει $(\alpha+22)x-24=24x-24$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$(\alpha+22)x-24=24x-24 \Leftrightarrow \alpha+22=24 \Leftrightarrow \alpha=2.$

β) Για $\alpha=2$, είναι $P(x)=x^4+x^3+2x-4$.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι το $P(1)=0$.

ii. Ζητείται η επίλυση της εξίσωσης $P(x)=0$.

Είναι: $P(1)=0 \Leftrightarrow 1$ ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow x-1$ παράγοντας του $P(x)$.

Εφαρμογή του σχήματος Horner:

1	1	0	2	−4	ρ =1
	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

Επομένως ισχύει: $P(x)=(x-1)\cdot(x^3+2x^2+2x+4)$

Αλλά $x^3+2x^2+2x+4=x^2(x+2)+2(x+2)=(x+2)(x^2+2)$.

Τελικά ισχύει $P(x)=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2)$.

Είναι λοιπόν

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2)=0 \xLeftrightarrow{x^2+2\neq 0} x=1 \text{ ή } x=-2.$$

Επομένως, τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$, είναι τα $A(-2,0)$ και $B(1,0)$.

iii. Ζητείται η επίλυση της ανίσωσης $P(x) < 0$.

Το πρόσημο των τιμών του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ως εκ τούτου, $P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,

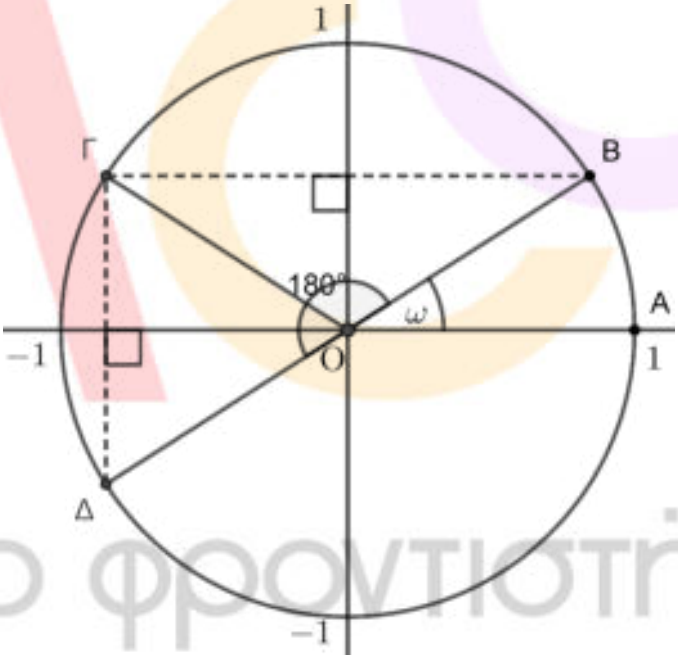
(Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ,

(Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$.

(Μονάδες 5)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $ημω = x$ και η εξίσωση γράφεται:

$$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο -1 είναι ρίζα. Κάνουμε τη διαίρεση $(5x^3 - 8x^2 - 7x + 6) : (x + 1)$.

5	-8	-7	6	-1
	-5	13	-6	
5	-13	6	0	

Άρα $5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = (x + 1)(5x^2 - 13x + 6)$.

Το τριώνυμο $5x^2 - 13x + 6$ έχει διακρίνουσα $Δ = (-13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 169 - 120 = 49$ και ρίζες:

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{13 + 7}{10} = 2$$

και

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{13 - 7}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Επειδή $0 < ω < \frac{π}{2}$, είναι $0 < ημω < 1$, άρα η μόνη αποδεκτή λύση είναι $ημω = \frac{3}{5}$.

β)

i. Ισχύει ότι:

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow$$

$$συν^2ω = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Επειδή $0 < ω < \frac{π}{2}$, είναι $συνω > 0$. Άρα,

$$συνω = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο B έχει συντεταγμένες $(συνω, ημω)$, άρα $B(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Τα σημεία $Γ$ και $Δ$ είναι συμμετρικά του B ως προς τον άξονα $y'y$ και την αρχή O αντίστοιχα. Οπότε είναι:

$$Γ\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), Δ\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων B, Γ και Δ αντίστοιχα. Άρα,

$$\eta\mu A\hat{O}B = \frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}B = \frac{4}{5},$$

$$\eta\mu A\hat{O}\Gamma = \frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Gamma = -\frac{4}{5},$$

και

$$\eta\mu A\hat{O}\Delta = -\frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Delta = -\frac{4}{5}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα.

Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x.

(Μονάδες 4)

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β.

(Μονάδες 9)

ii. Τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.

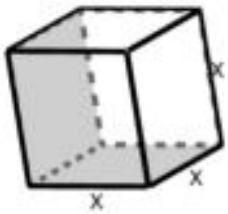
(Μονάδες 4)

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

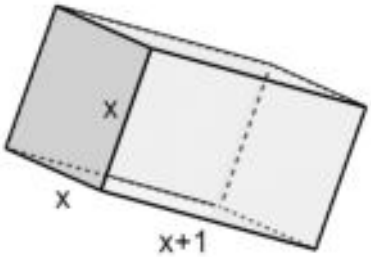
(Μονάδες 8)

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ

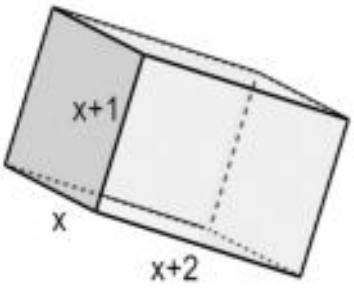
Δεξαμενή Α



Δεξαμενή Β



Δεξαμενή Γ



ΛΥΣΗ

α) Ο όγκος της κυβικής δεξαμενής Α υπολογίζεται από τον τύπο του όγκου κύβου, δηλαδή $V_A(x) = x^3$ και ο όγκος της δεξαμενής Β, από τον τύπο του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, $V_B(x) = (x+1) \cdot x^2$.

Επομένως, $\Delta(x) = V_B(x) - V_A(x) = (x+1) \cdot x^2 - x^3 = x^3 + x^2 - x^3 = x^2$.

β) i. Επειδή $V_B(x) = 36 \Leftrightarrow (x+1) \cdot x^2 = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 = 36$.

$$x^3 + x^2 = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 4x + 12) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 3 = 0 \text{ ή } x^2 + 4x + 12 = 0.$$

Άρα, έχει τη μοναδική λύση το x=3, το τριώνυμο $x^2 + 4x - 12 = 0$ έχει διακρίνουσα

Δ=-32<0. Η διάσταση της δεξαμενής Α είναι $x = 3$ μέτρα. Οι διαστάσεις της δεξαμενής Β είναι 3 μέτρα, 3 μέτρα και 4 μέτρα.

ii. Η διαφορά των όγκων $\Delta(x) = x^2$ για $x = 3$ προκύπτει ότι είναι ίση με 9 κυβικά μέτρα.

γ) Η νέα δεξαμενή Γ θα έχει όγκο $V_\Gamma(x) = (x+1)(x+2)x$.

Από τα δεδομένα έχουμε $V_\Gamma(x) \geq 60$.

Λύνουμε τη πολυωνυμική ανίσωση

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 6x + 20) \geq 0 \ (1).$$

Επειδή, το τριώνυμο $x^2 + 6x + 20$ διατηρεί θετικό πρόσημο για κάθε τιμή του x, το πρόσημο της ανίσωσης (1) καθορίζεται από το x-3.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $x \geq 3$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι το 3, που είναι και η ζητούμενη ακμή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5,$ με $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι -1, να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

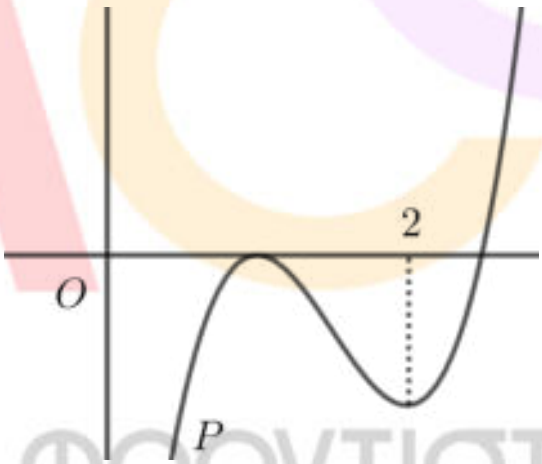
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)$ ισχύει ότι:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow$$
$$2\cdot 1^3+\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1-5=0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha+\beta=3.$$

Επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)$ είναι το $P(2)$. Άρα,

$$P(2)=-1 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3+\alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2-5=-1 \Leftrightarrow$$
$$16+4\alpha+2\beta-5=-1 \Leftrightarrow$$
$$4\alpha+2\beta=-12 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-6.$$

ii. Για να βρούμε τις τιμές των α, β λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \alpha+\beta=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \beta=3-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}2\alpha+(3-\alpha)=-6\\ \beta=3-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\alpha+3=-6\\ \beta=3-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-9\\ \beta=12\end{cases}.$$

β) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ με το σχήμα Horner και έχουμε:

2	-9	12	-5	1
	2	-7	5	
2	-7	5	0	

Άρα, $P(x)=(x-1)(2x^2-7x+5)$. Το τριώνυμο $2x^2-7x+5$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-7)^2-4\cdot 2\cdot 5=9$ και ρίζες:

$$x_1=\frac{7+\sqrt{9}}{4}=\frac{5}{2} \text{ και } x_2=\frac{7-\sqrt{9}}{4}=1.$$

Άρα, $P(x)=(x-1)2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x-1)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)$.

Η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες

$$P(x)<0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)<0.$$

Ο πίνακας προσήμων του $P(x)$ είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-\frac{5}{2})$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, \frac{5}{2})$.

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(1,0)$ και $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

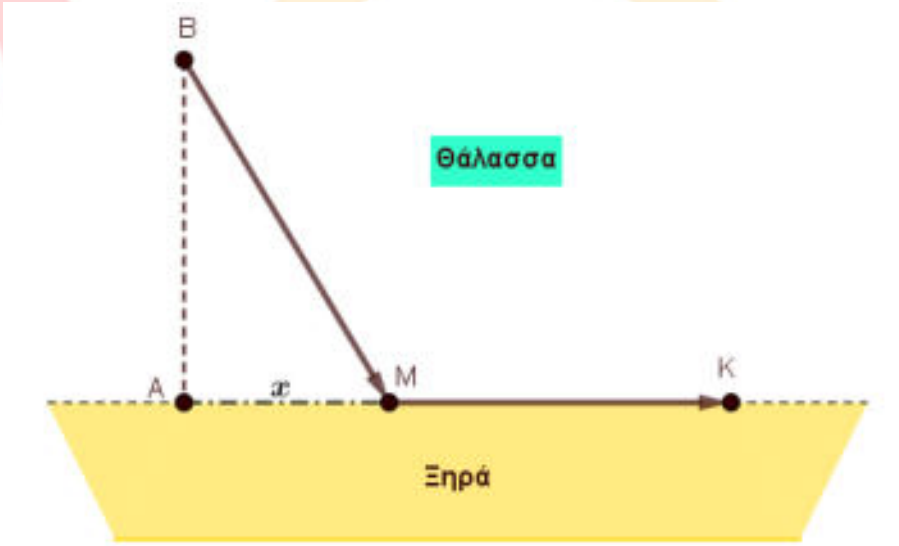
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση $2\,km$ από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει $4\,km$ από το A. Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα $3\,km/h$ και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα $5km/h$.

Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t, είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.



Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση $x\ km$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Είναι $BA = 2, MA = x, MK = 4 - x$.

Η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t, είναι: $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.

α) Το τρίγωνο BAM είναι ορθογώνιο, οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

β) Η κίνηση γίνεται σε δύο μέσα – κολύμβηση στη θάλασσα και τρέξιμο στη ξηρά – με διαφορετικές (αλλά σταθερές) ταχύτητες $v_\kappa = 3\ \frac{km}{h}$ και $v_\tau = 5\ \frac{km}{h}$ αντίστοιχα. Έτσι, ο συνολικός χρόνος κίνησης θα προκύψει ως άθροισμα των δύο επιμέρους χρόνων.

- Ο χρόνος κίνησης από το B στο M: $t_1 = \frac{BM}{v_\kappa} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3}$
- Ο χρόνος κίνησης από το M στο K: $t_2 = \frac{MK}{v_\tau} = \frac{4-x}{5}$
- Ο χρόνος της συνολικής κίνησης: $t_{o\lambda} = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}$

Επομένως, η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

γ) Αρκεί να λυθεί η εξίσωση:

$$t(x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$5\sqrt{4 + x^2} + 3(4 - x) = 20 \Leftrightarrow 5\sqrt{4 + x^2} = 3x + 8$$

Αφού $x \in [0, 4]$ έπεται ότι $3x + 8 > 0$, επομένως ισοδύναμα είναι:

$$25(4 + x^2) = (3x + 8)^2 \Leftrightarrow 100 + 25x^2 = 9x^2 + 48x + 64 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Η λύση είναι δεκτή, διότι $\frac{3}{2} \in [0, 4]$.

Επομένως ο κολυμβητής θα βγει στην ακτή σε απόσταση $1{,}5\ km$ από το σημείο A.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

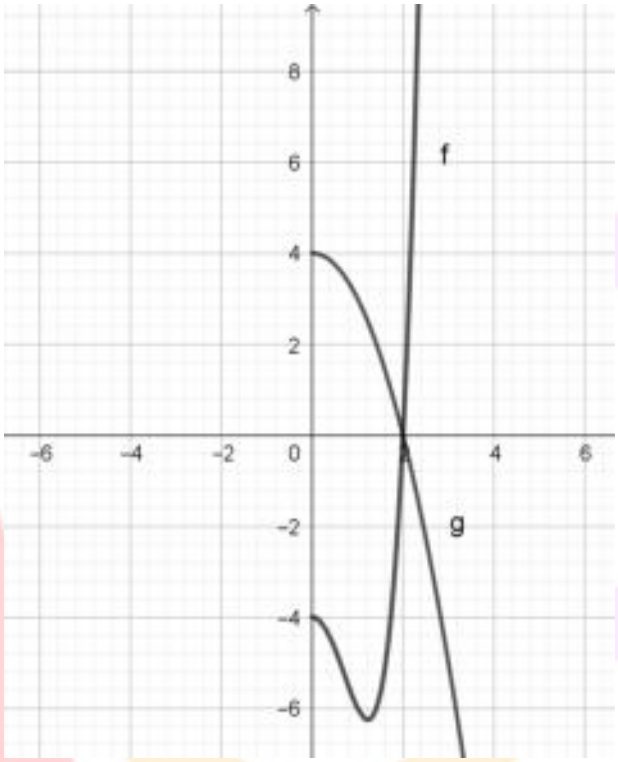
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-3x^2-4$ και $g(x)=-x^2+4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

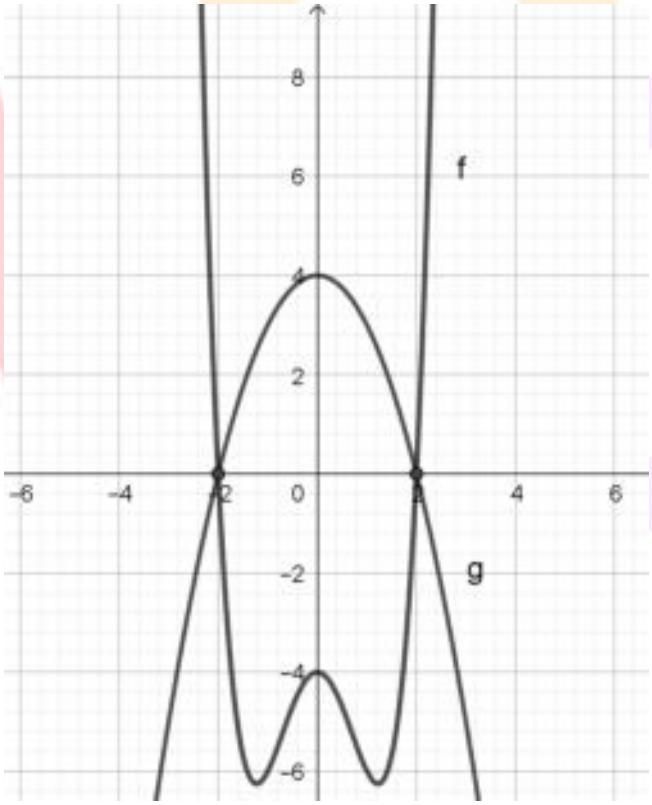
ΛΥΣΗ

α) Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, άρα έχουμε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x)$.

Όμοια $g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x)$.

β) Από το α) ερώτημα οι συναρτήσεις f και g είναι άρτιες. Η γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f και g συμπληρώνονται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ)

i. Έχουμε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$. (1)

Θέτουμε $x^2 = y$, οπότε (1): $y^2 - 2y - 8 = 0$ με $\Delta = 36$ και $y_1 = -2, y_2 = 4$, άρα $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη ή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 2$ που είναι οι ζητούμενες λύσεις.

ii. Γραφικά, λύση της ανίσωσης $f(x) < g(x)$ είναι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από την γραφική παράσταση της f. Οπότε η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-2, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \kappa x - 1$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\kappa = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,

(Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Για τη συνάρτηση f έχουμε:

$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow (-x)^4 + \kappa(-x) - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow x^4 - \kappa x - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow$ $2\kappa x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το $2\kappa x$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $2\kappa = 0$ και ισοδύναμα $\kappa = 0$.

β) Για $\kappa = 0$, η συνάρτηση f είναι: $f(x) = x^4 - 1$.

i. Με $x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow {x_1}^4 > {x_2}^4 \Leftrightarrow {x_1}^4 - 1 > {x_2}^4 - 1$

   Άρα: $f(x_1) > f(x_2)$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty, 0]$.

ii. Έχουμε: $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow x^4 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x^4 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Για να βρούμε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την ανίσωση:

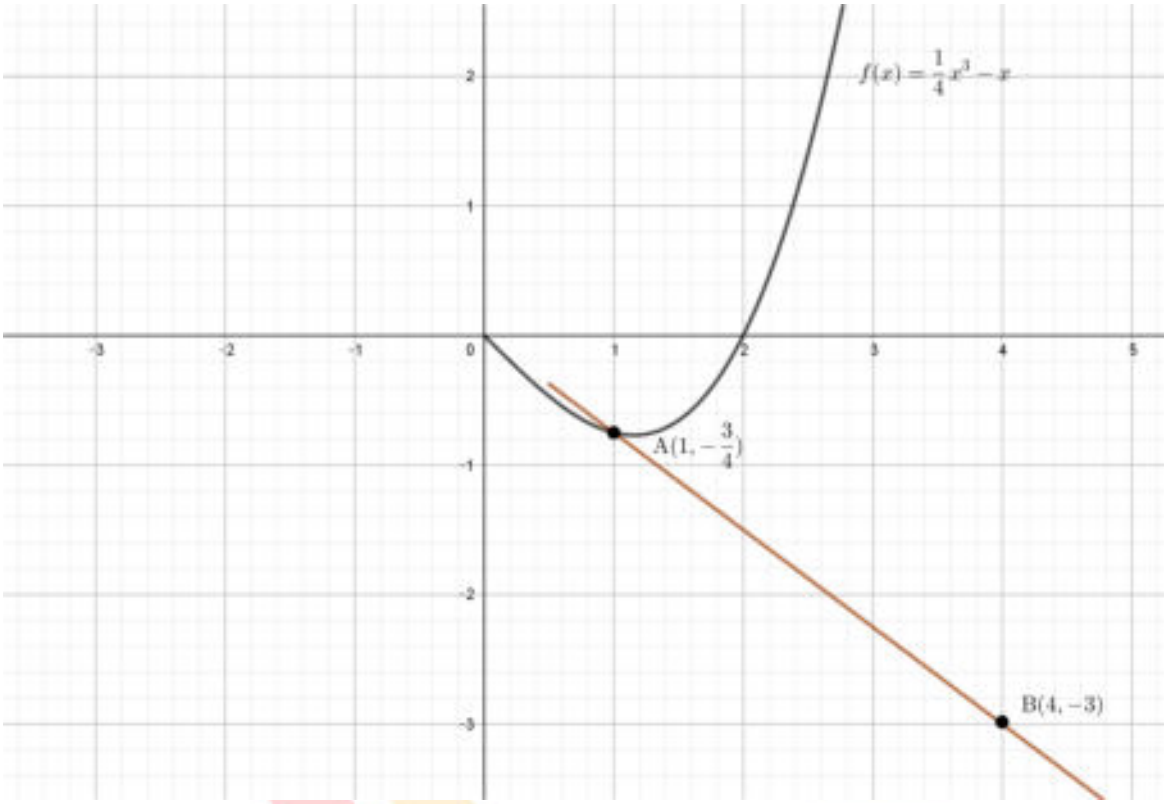
   $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) < 0 \overset{x^2+1>0}{\Longleftrightarrow} x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow$ $(x - 1) \cdot (x + 1) < 0$.

   Άρα $x \in (-1,1)$. Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για $x \in (-1,1)$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$, $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $\mathrm{B}(4,-3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία AB έχει εξίσωση της μορφής $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$. Το σημείο $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ είναι σημείο της (ε), άρα:

$$-\frac{3}{4}=\alpha\cdot 1+\beta \qquad (1).$$

Το σημείο $B(4,-3)$ είναι σημείο της (ε), άρα:

$$-3=\alpha\cdot 4+\beta \qquad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases}-\frac{3}{4}=\alpha\cdot 1+\beta\\ -3=\alpha\cdot 4+\beta\end{cases}\overset{(-)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}3\alpha=-3+\frac{3}{4}\\ 4\alpha+\beta=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{3}{4}\\ 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{3}{4}\\ \beta=0.\end{cases}$$

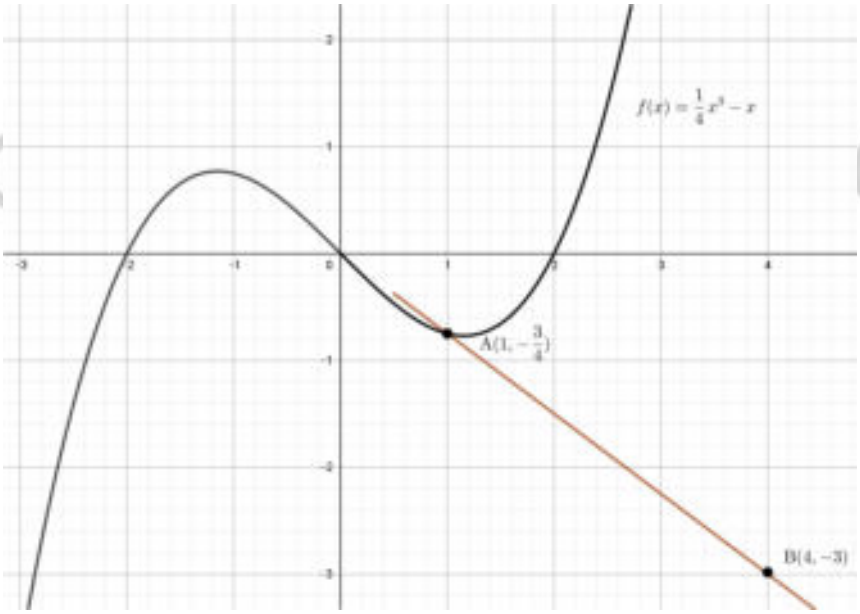
Άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=-\frac{3}{4}x$.

β)

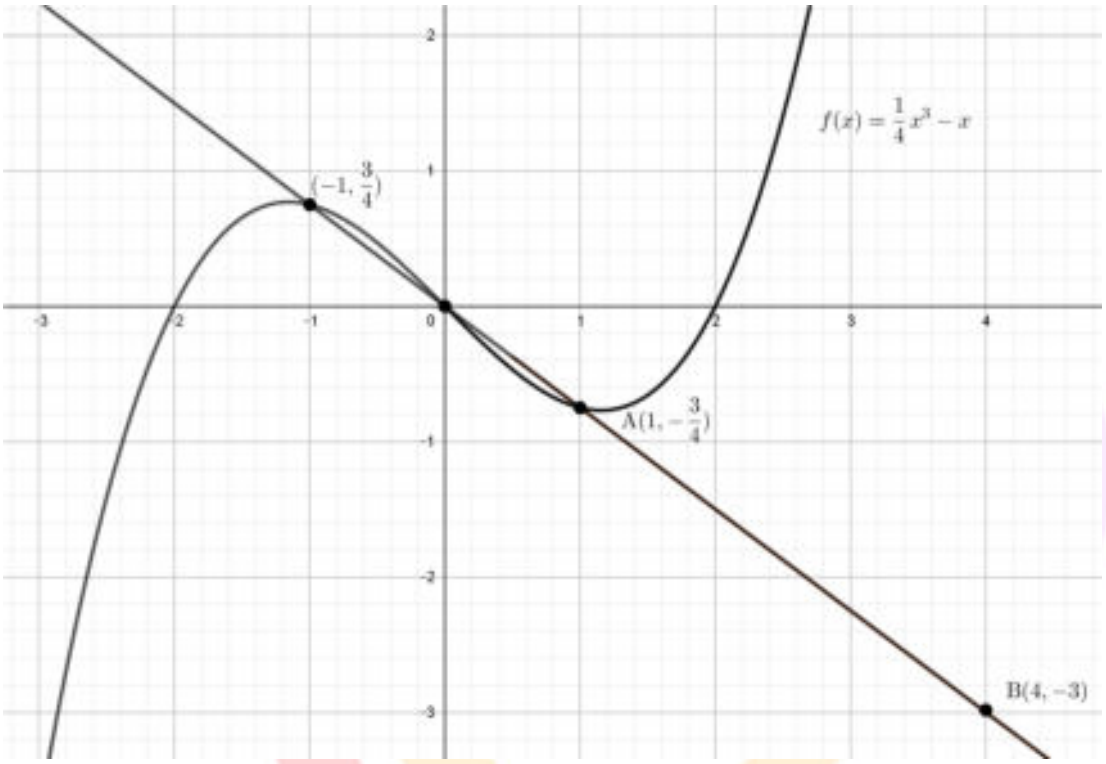
i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{4}x^3+x=-\left(\frac{1}{4}x^3-x\right)=-f(x).$$

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή ότι η f είναι περιττή. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $(0,0)$:



γ) Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς το $(0,0)$, το σημείο $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση η οποία διέρχεται και από το $(0,0)$. Όμως τα σημεία αυτά ανήκουν και στην ευθεία AB. Άρα τα κοινά σημεία της ευθείας και της καμπύλης είναι τα $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.



Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4}x$. Έχουμε ισοδύναμα:

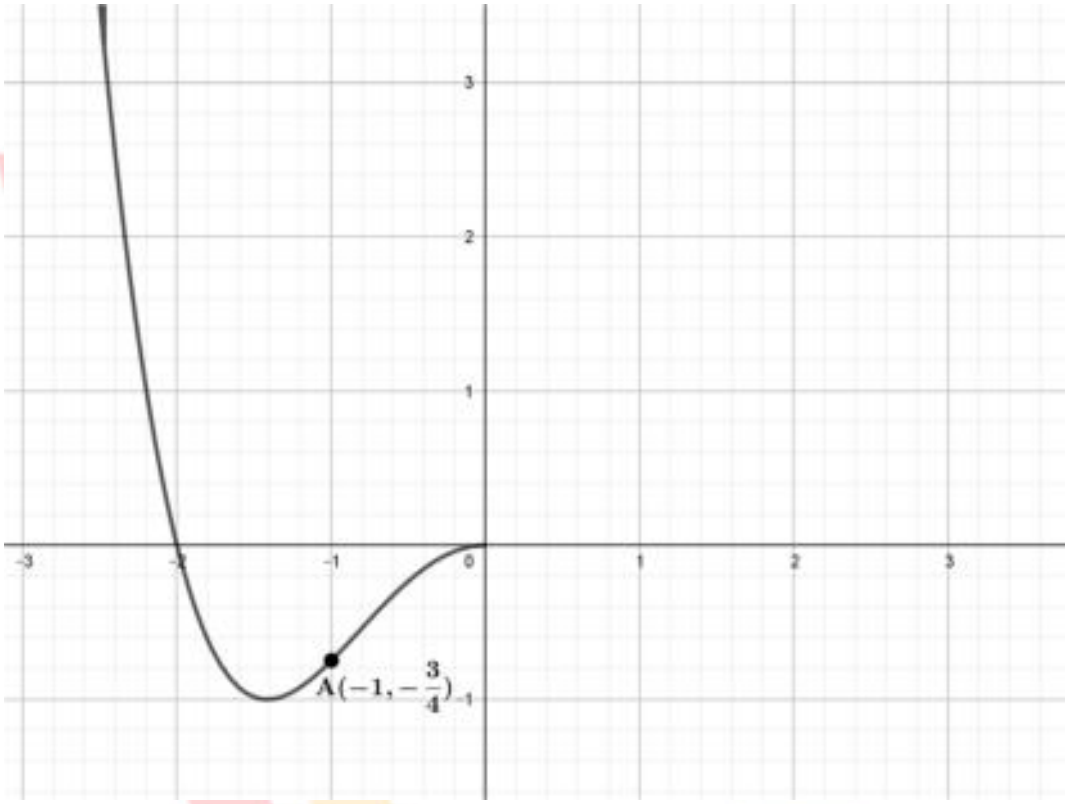
$$\frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4}x \Leftrightarrow$$
$$x^3-4x+3x=0 \Leftrightarrow$$
$$x^3-x=0 \Leftrightarrow$$
$$x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $\mathrm{A}\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=-1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στο $(-2,0)$, οπότε έχουμε ισοδύναμα:

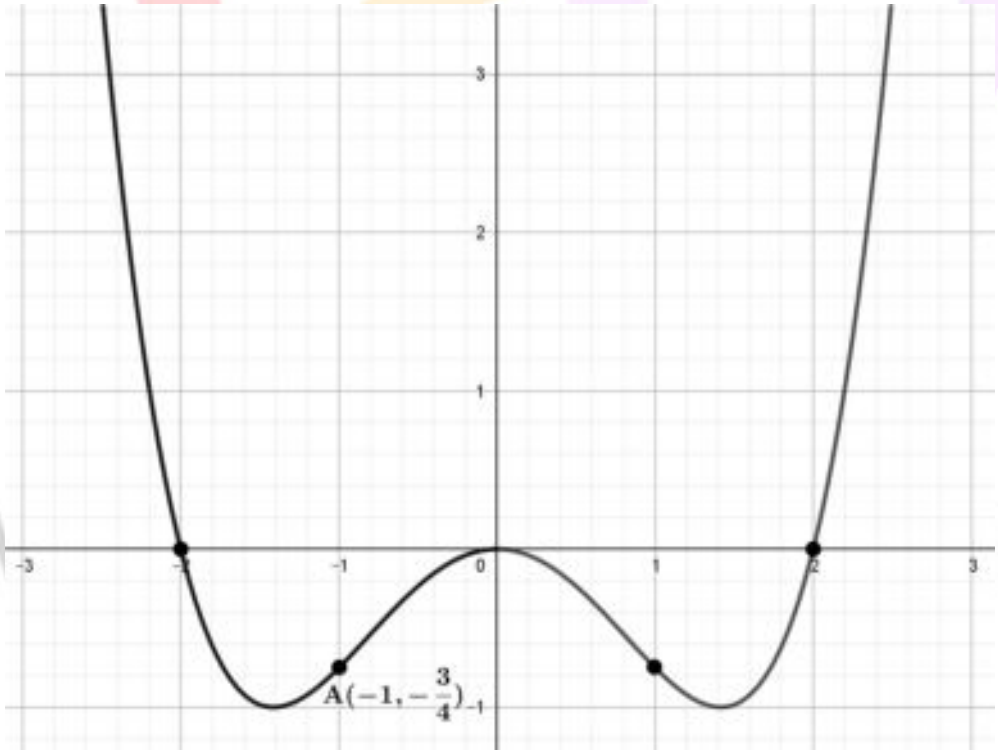
$$f(-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}(-2)^4+\alpha\cdot(-2)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$4+4\alpha=0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha=-1.$$

β)

i. Έχουμε $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$. Οπότε:

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^4-(-x)^2=\frac{1}{4}x^4-x^2=f(x).$$

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x)=f(x)$, δηλαδή ότι η f είναι άρτια. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα:



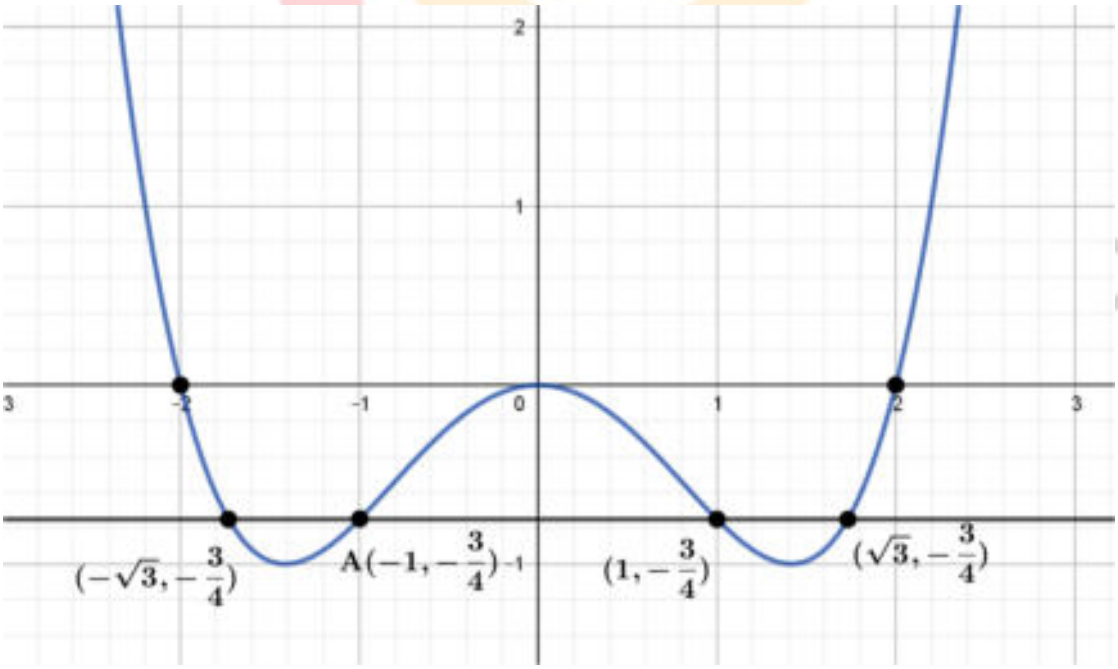
γ) Πραγματικά $f(-\sqrt{3})=\frac{1}{4}(-\sqrt{3})^4-(-\sqrt{3})^2=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$, οπότε το σημείο $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς τον $y'y$ άξονα, τα σημεία $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ θα ανήκουν επίσης στη γραφική παράσταση και η ευθεία $y=-\frac{3}{4}$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με αυτήν, τα $\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$.

Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=-\frac{3}{4}$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x)=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}x^4-x^2=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$
$$x^4-4x^2+3=0\Leftrightarrow$$
$$x^2=1 \quad \text{ή} \quad x^2=3$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι τέσσερις: $x=-1,\ x=1,\ x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$ και συνεπώς τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f είναι τα $\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 60cm^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά $2cm$ μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x^3 + x^2 - 3600 = 0.$$

(Μονάδες 10)

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα δεδομένα έχει κάθετες πλευρές x, y και υποτείνουσα $(x+2)$. Το εμβαδόν του είναι $E = 60cm^2$, οπότε: $\frac{xy}{2} = 60 \Leftrightarrow y = \frac{120}{x}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$(x+2)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)^2 = x^2 + \left(\frac{120}{x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + \frac{14400}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$x + 1 = \frac{3600}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$x^3 + x^2 - 3600 = 0. \qquad (1)$$

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $x^3 + x^2 - 3600 = 0$ που είναι μικρότερες του 16 και είναι θετικοί αριθμοί (το x είναι μήκος πλευράς τριγώνου), είναι οι $1,2,3,4,5,6,8,9,10,12$ και 15. Οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 10 δεν μπορεί να είναι ρίζες, γιατί το άθροισμα $(x^3 + x^2)$ πρέπει να ισούται με 3600. Παρατηρούμε ότι $10^3 + 10^2 - 3600 \neq 0$, άρα το 10 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, όπως δεν είναι και το 12. Καταλήγουμε στο 15 και κάνουμε τη διαίρεση $(x^3 + x^2 - 3600) \div (x - 15)$:

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3 + x^2 + 0x - 3600 & x - 15 \\ \cline{3-3}
(+) & -x^3 + 15x^2 & x^2 + 16x + 240 \\ \cline{1-1}
 & 16x^2 + 0x - 3600 & \\
(+) & -16x^2 + 240x & \\ \cline{1-1}
 & 240x - 3600 & \\
(+) & -240x + 3600 & \\ \cline{1-1}
 & 0 &
\end{array}$$

Οπότε η εξίσωση (1) γράφεται: $(x-15)(x^2 + 16x + 240) = 0$.

Η μόνη λύση της εξίσωσης είναι $x = 15$, γιατί η $x^2 + 16x + 240 = 0$ είναι αδύνατη ($\Delta = -704 < 0$).

Άρα οι κάθετες πλευρές του τριγώνου είναι $15cm$ και $\frac{120}{15}=8cm$. Η υποτείνουσα είναι $15+2=17cm$.

γ) Ένα είναι το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος και αυτό είναι το τρίγωνο που βρήκαμε στο β) ερώτημα, γιατί η εξίσωση $x^3+x^2-3600=0$ δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $x=15$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=a, a \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1) .

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $a=0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) Για $a=2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii) Για $a \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2,2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Για να έχει νόημα η εξίσωση (1) πρέπει οι παραστάσεις στις ρίζες να είναι μη αρνητικές.

Οπότε πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα: $2-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$ και $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$.

Συνεπώς $x\in[-2,2]$.

β) Για α=0 η εξίσωση γίνεται: $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=0$. Το άθροισμα δύο μη αρνητικών ποσοτήτων είναι ίσο με μηδέν αν και μόνο αν και οι δύο είναι ταυτόχρονα 0. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$\begin{cases}\sqrt{2-x}=0\\ \sqrt{x+2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ x=-2\end{cases}$, τα οποία είναι αδύνατο να συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Συνεπώς, η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) Ισχύει ότι αν $x\in[-2,2]\Rightarrow -x\in[-2,2]$, οπότε για τη συνάρτηση g έχουμε:

$g(-x)=\sqrt{2-(-x)}+\sqrt{-x+2}=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=g(x)$, για κάθε $x\in[-2,2]$, που είναι το πεδίο ορισμού της g, οπότε η συνάρτηση είναι άρτια.

δ) i)

Η εξίσωση γίνεται:

$\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow 2-x+x+2+2\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}=4\cdot 2\Leftrightarrow$

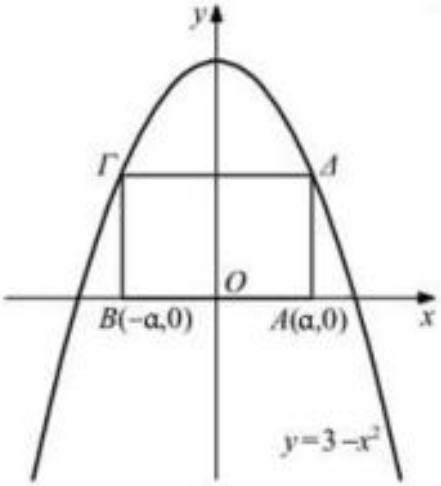
$\Leftrightarrow 4+2\sqrt{2^2-x^2}=8\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=2\Leftrightarrow 4-x^2=4\Leftrightarrow x=0$.

Άρα έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

ii) Για $a\neq 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει ρίζα την $x=\rho$, άρα θα ισχύει ότι $g(\rho)=a$. Όμως η συνάρτηση g είναι άρτια, οπότε θα ισχύει ότι $g(-\rho)=g(\rho)=a$, οπότε και η $x=-\rho$ θα είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή $y=3-x^2$ και τα σημεία της Γ,Δ. Δίνεται ακόμα ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$.



α) Αν Ε είναι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, τότε:

i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $\text{Ε}=f\left(\alpha\right)=-2\alpha^3+6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 08)

ii. να βρεθεί το εμβαδό Ε στη θέση $\alpha=1$.

(Μονάδες 02)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό Ε δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρεθεί η θέση του α, ώστε το εμβαδό Ε να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

(Μονάδες 03)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $AB=\alpha-(-\alpha)=2\alpha$.

Επειδή το Δ ανήκει στην παραβολή $y=3-x^2$ ισχύει $y_\Delta=3-x_\Delta{}^2=3-\alpha^2$. Οπότε $A\Delta=y_\Delta-y_A=3-\alpha^2-0=3-\alpha^2$.

Είναι $E=AB\cdot A\Delta=2\alpha\left(3-\alpha^2\right)=6\alpha-2\alpha^3$.

Επομένως για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $E=f(\alpha)=-2\alpha^3+6\alpha$.

ii. Το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $f(1)=-2\cdot1^3+6\cdot1=4$ τετ. μονάδες.

β) Για να αποδείξουμε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες αρκεί να αποδείξουμε ότι $E\le4$.

Έχουμε

$E\le4\Leftrightarrow-2\alpha^3+6\alpha\le4$

$\Leftrightarrow2\alpha^3-6\alpha+4\ge0$

$\Leftrightarrow\alpha^3-3\alpha+2\ge0$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}(\alpha+2)(\alpha-1)^2\ge0$

που ισχύει για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$

1	0	-3	2	ρ = - 2
	-2	4	-2	
1	-2	1	0	

Οπότε,

$$\alpha^3-3\alpha+2=(\alpha+2)\left(\alpha^2-2\alpha+1\right)$$
$$=(\alpha+2)(\alpha-1)^2 \qquad :(1)$$

γ) Για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $E\le4\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}f(\alpha)\le f(1)$ άρα το εμβαδό έχει μέγιστη τιμή 4 τετραγωνικές μονάδες στη θέση $\alpha=1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-\beta x+3,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

(Μονάδες 7)

Αν επιπλέον $P(1)=0$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=\frac{21}{2}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le 0$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x)=0$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αν υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο έχει ακέραιους συντελεστές, τότε κάθε ακέραια ρίζα του θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου του. Ο σταθερός όρος του όμως είναι ίσος με 3 και ο αριθμός 2 που είναι ρίζα του πολυωνύμου δεν είναι διαιρέτης του 3. Άρα το πολυώνυμο δεν έχει όλους τους συντελεστές του ακέραιους, οπότε υπάρχει ένας τουλάχιστον συντελεστής του που δεν είναι ακέραιος.

β) Με την επιπλέον πληροφορία ότι $P(1)=0$ έχουμε:

$$\begin{cases} P(2)=0 \\ P(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha+4\beta-2\beta+3=0 \\ \alpha+\beta-\beta+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-3 \\ 2\beta=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-3 \\ \beta=\dfrac{21}{2} \end{cases}$$

γ) Με $\alpha=-3$ και $\beta=\dfrac{21}{2}$ έχουμε $P(x)=-3x^3+\dfrac{21}{2}x^2-\dfrac{21}{2}x+3$.

Αρχικά θα βρούμε τις ρίζες του πολυωνύμου.

Είναι: $P(x)=0 \Leftrightarrow -3x^3+\dfrac{21}{2}x^2-\dfrac{21}{2}x+3=0 \Leftrightarrow -6x^3+21x^2-21x+6=0$

Είναι όμως γνωστό ότι $P(1)=0$, οπότε με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner έχουμε:

-6	21	-21	6	1
	-6	15	-6	
-6	15	-6	0	

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(-6x^2+15x-6)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } -6x^2+15x-6=0$$

Η εξίσωση $-6x^2+15x-6=0$ που είναι ισοδύναμη με την $2x^2-5x+2=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και $\dfrac{1}{2}$. Επομένως το πολυώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{1}{2}$, 1 και 2.

Έχουμε λοιπόν:

$$P(x)\le 0 \Leftrightarrow -6(x-1)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\le 0$$

και όταν $x>2$ όλοι οι παράγοντες του πολυωνύμου είναι θετικοί, οπότε αυτό είναι ομόσημο του -6, δηλαδή αρνητικό. Σε καθένα από τα προηγούμενα διαστήματα αλλάζει πρόσημο ακριβώς ένας όρος του γινομένου, οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων του πολυωνύμου.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι λύση της ανίσωσης είναι κάθε αριθμός x με

$$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup [2, +\infty)$$

δ) Από το ερώτημα γ) έχουμε:

$$P(\text{συν}x) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}x = \frac{1}{2} \text{ ή } \text{συν}x = 1 \text{ ή } \text{συν}x = 2$$

Η τελευταία είναι αδύνατη, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \le \text{συν}x \le 1$. Έτσι, έχουμε:

- $\text{συν}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\text{συν}x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο B επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο A επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α) Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $a = 2$, μετά ο Β επιλέγει $b = 1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c = 2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2.

(Μονάδες 5)

β) Ο μαθητής Α επιλέγει $a = -1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 7)

δ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = x^2(x+2) + (x+2) = (x+2)(x^2+1)$.

Αλλά $x^2 + 1 > 0$ για κάθε τιμή του x. Έτσι η εξίσωση $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+1) = 0$, δίνει $x + 2 = 0$, άρα $x = -2$.

β) Θέλουμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + bx + c$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 1.

Άρα πρέπει $P(1) = 0$, δηλαδή $1^3 - 1^2 + b + c = 0$, άρα $b + c = 0$.

Παρατηρούμε λοιπόν πως όποιον αριθμό και να επιλέξει ο μαθητής Β για τον συντελεστή b ή c, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει τον αντίθετό του.

γ) Για να έχει το πολυώνυμο $P(x)$ ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ αρκεί να ισχύει $P(0) \cdot P(1) < 0$, σύμφωνα με το Θεώρημα σελ. 145 του σχολικού βιβλίου.

Αλλά $P(0) = 1$ και $P(1) = (-1)^3 + a(-1)^2 - b + 1 = a - b$.

Αν λοιπόν ο μαθητής Β επιλέξει έναν αριθμό στη θέση του α, τότε αρκεί ο μαθητής Α να επιλέξει έναν μεγαλύτερο αυτού στη θέση του b.

Αν ο μαθητής Β επιλέξει έναν αριθμό στη θέση του b, τότε αρκεί ο μαθητής Α να επιλέξει έναν μικρότερο αυτού στη θέση του α.

δ) Αν ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές έχει ακέραια ρίζα, τότε αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου. Αλλά στο $P(x)$ ο σταθερός όρος είναι το 2022 το οποίο όμως δεν είναι πολλαπλάσιο του 13, αφού $\frac{2022}{13} = 155 + \frac{7}{13}$. Έτσι, αποκλείεται το 13 να είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3+4x^2-5x-2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3+4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2-5\left(\frac{5}{x^2+1}\right)-2>0$.

(Μονάδες 11)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από το θεώρημα ακέραιων ριζών πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2$. Με δοκιμή βρίσκουμε $P(1)=0$, άρα το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. Με το σχήμα Horner θα παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο ώστε να βρούμε τις υπόλοιπες ρίζες.

3	4	−5	−2	1
	3	7	2	
3	7	2	0	

Οπότε:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+7x+2)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \ \ ή \ \ 3x^2+7x+2=0 \Leftrightarrow x=1,\ \ x=-2,\ \ x=-\frac{1}{3}.$$

β) Συμπληρώνουμε το σχετικό πίνακα προσήμου.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2+7x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως $P(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left(-2,-\frac{1}{3}\right) \cup (1,+\infty)$.

γ) Η δοθείσα ανίσωση είναι ισοδύναμη με $P\left(\frac{5}{x^2+1}\right)>0, x \in \mathbb{R}$. Επομένως από το β) ερώτημα πρέπει $-2<\frac{5}{x^2+1}<-\frac{1}{3}$ (1)

ή $1<\frac{5}{x^2+1}$. (2)

Επιλύουμε τις δύο ανισώσεις:

Η (1) είναι αδύνατη, αφού $\frac{5}{x^2+1}>0$.

Η (2) γίνεται: $1<\frac{5}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2+1<5 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$.

ΘΕΜΑ 4

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1)$$

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «*Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες*». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η ποσότητα x^4+1 είναι αυστηρά θετική, μάλιστα $x^4+1 \geq 0+1=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, το x^4+1 δεν μηδενίζεται για καμιά τιμή του x και συνεπώς, το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Εναλλακτικά: Αν υπήρχε πραγματικός αριθμός ρ τέτοιος ώστε $\rho^4+1=0$, τότε θα έπρεπε $\rho^4=-1$, πράγμα άτοπο.

β) Θα εκτελέσουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος και στη συνέχεια θα εξισώσουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του x.

$x^4+1=(x^2+\alpha x+1)\cdot(x^2+\beta x+1) \Leftrightarrow$

$x^4+1=x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha\beta+2)x^2+(\alpha+\beta)x+1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha\cdot\beta=-2\\ \alpha+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha\cdot\beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha=\pm\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}\alpha=\sqrt{2} \text{ και } \beta=-\sqrt{2}\\ \alpha=-\sqrt{2} \text{ ή } \beta=\sqrt{2}\end{matrix}$$

Άρα: $\alpha=\sqrt{2}$ και $\beta=-\sqrt{2}$ ή $\alpha=-\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{2}$

Συνεπώς, $x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$.

γ) Η πρόταση είναι λάθος, σύμφωνα με το α) και β) ερώτημα. Το αντιπαράδειγμα είναι το πολυώνυμο $P(x)=x^4+1$ το οποίο αναλύεται σε γινόμενο δύο πολυωνύμων $2^{ου}$ βαθμού:

$$x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right).$$

αλλά δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο