Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Άλγεβρα

Κεφάλαιο: 5 Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

Θέμα 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1+\log 3-\log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1)=\log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων έχουμε:

$$1+\log 3-\log 6=\log 10+\log 3-\log 6=\log\frac{10\cdot 3}{6}=\log 5$$

οπότε η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1)=\log 5$.

β) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $x^2+1>0$. Έτσι με $x\in\mathbb{R}$ και με τη βοήθεια του ερωτήματος α) η εξίσωση γράφεται:

$$\log(x^2+1)=\log 5\Leftrightarrow x^2+1=5\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-2$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\log_4 3+\log_4 \alpha-\log_4 \beta$, όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A=\log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$

(Μονάδες 13)

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha=16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$A=\log_4 3+\log_4 \alpha-\log_4 \beta=\log_4(3\alpha)-\log_4 \beta=\log_4 \frac{3\alpha}{\beta}.$$

β) Η παράσταση Α με $3\alpha=16\beta$, γράφεται:

$$A=\log_4 \frac{16\beta}{\beta}=\log_4 16=\log_4 4^2=2\log_4 4=2.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 4$, $\gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$\alpha+\gamma=\ln 2+\ln 8=\ln(2\cdot 8)=\ln 16=\ln 4^2=2\ln 4=2\beta$.

β) Είναι $\beta+\gamma=\ln 4+\ln 8=\ln(4\cdot 8)=\ln 32=\ln 2^5=5\ln 2=5\alpha$.

Σημείωση :

Οι αριθμοί $2,4,8$ είναι με αυτή τη σειρά διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αφού $4^2=2\cdot 8$, ενώ οι αριθμοί $\alpha=\ln 2$, $\beta=\ln 4$, $\gamma=\ln 8$ είναι με αυτή τη σειρά διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αφού όπως δείξαμε $2\beta=\alpha+\gamma$.

Γενικά αν α,β,γ είναι με αυτή τη σειρά θετικοί διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε οι αριθμοί $\ln\alpha$, $\ln\beta$, $\ln\gamma$ είναι με αυτή τη σειρά διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow$$
$$e^x > 1 \Leftrightarrow$$
$$e^x > e^0 \Leftrightarrow$$
$$x > 0$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.

β) Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(e^x - 1\right) = \ln 1 \Leftrightarrow$$
$$e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow$$
$$e^x = 2 \Leftrightarrow$$
$$x = \ln 2$$

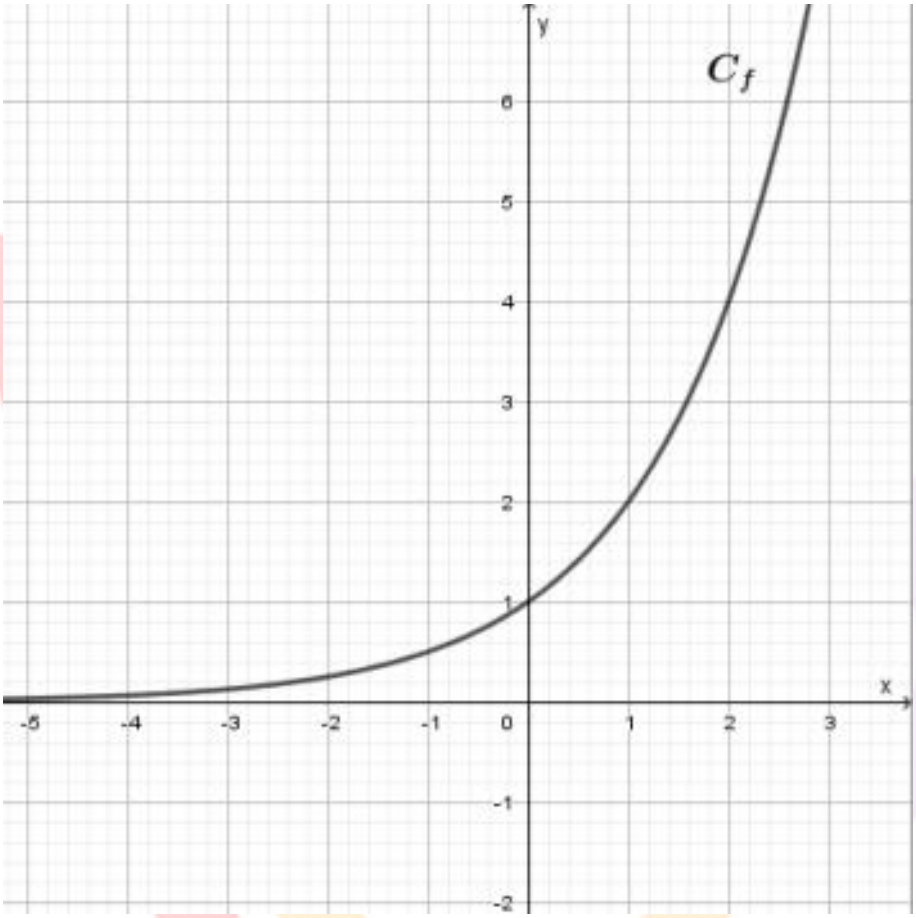
Η λύση $\ln 2$ είναι δεκτή αφού $\ln 2 > \ln 1 \Leftrightarrow \ln 2 > 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x,\ x\epsilon\mathbb{R}$.



α) Να λύσετε την εξίσωση $2^x - 1 = 0$.

(Μονάδες 10)

β)

i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^x - 1,\ x\epsilon\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

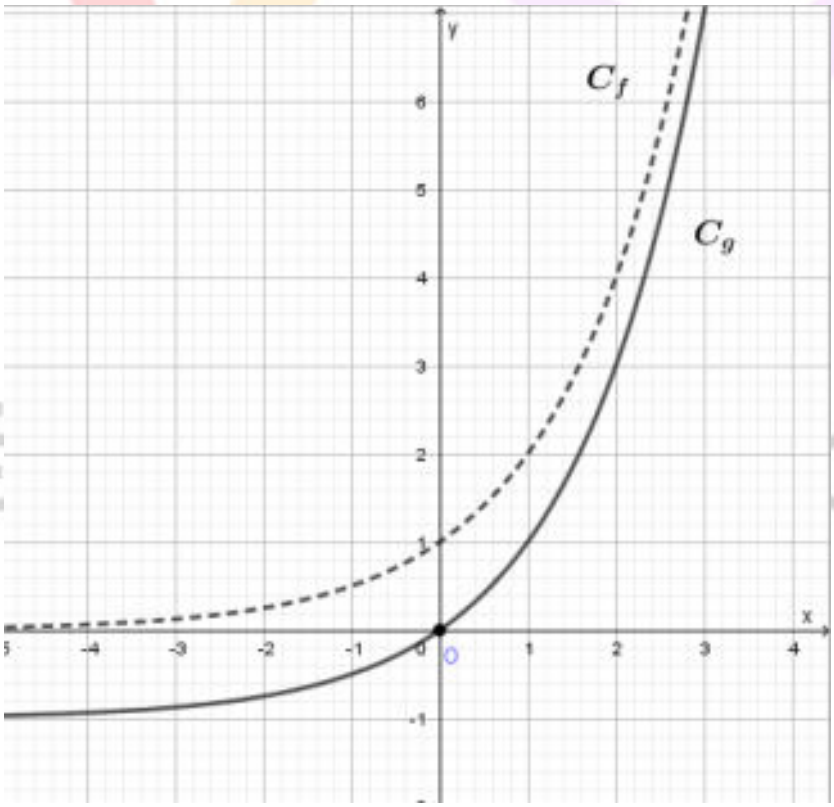
α) $2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0.$

β)

i. Επειδή $g(x) = f(x) - 1$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

ii. Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$, επιλύουμε την εξίσωση: $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 = 0 \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} x = 0$. Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο $O(0,0)$.

Εναλλακτική προσέγγιση: Παρατηρούμε από την γραφική παράσταση της f ότι τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1. Όταν λοιπόν η γραφική παράσταση μετακινηθεί κατά 1 μονάδα προς τα κάτω, τότε το σημείο τομής της g με τους άξονες συντεταγμένων θα είναι το $O(0,0)$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν ισχύει $x+1>0$. Είναι: $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=(-1,+\infty)$

β) Με $x=0$ έχουμε:

$$f(0)=\ln(0+1)=\ln 1=0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή Ο.

γ) Με $x>-1$ έχουμε:

$$f(x)=2 \Leftrightarrow \ln(x+1)=2 \Leftrightarrow x+1=e^2 \Leftrightarrow x=e^2-1$$

που είναι αποδεκτή αφού περιέχεται στο διάστημα $A=(-1,+\infty)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\log_2 8)\cdot x^3+\left(4\log_2\sqrt{2}\right)\cdot x^2-(4\log_2 1)\cdot x+1990$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8+2\log_2\sqrt{2}-\log_2 1=4$.

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3,\ \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ και } \log_2 1 = 0.$$

Οπότε

$$\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 3 + 2\cdot\frac{1}{2} - 0 = 3 + 1 = 4.$$

β) Ισχύει $\upsilon = \mathrm{P}(\rho)$ με $\rho = 2$.

Είναι

$$\begin{aligned}\upsilon = \mathrm{P}(2) &= (\log_2 8)\cdot 2^3 + 4\left(\log_2 \sqrt{2}\right)\cdot 2^2 - (4\log_2 1)\cdot 2 + 1990\\ &= 8\log_2 8 + 16\log_2 \sqrt{2} - 8\log_2 1 + 1990\\ &= 8\left(\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1\right) + 1990\\ &\overset{(\alpha)}{=} 8\cdot 4 + 1990\\ &= 2022\end{aligned}$$

Τελικά, το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ είναι ίσο με 2022.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = logx, x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$, $f(\sqrt{10})$

(Μονάδες 12)

β) Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = log10 - log5$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) $f(100) = log100 = 2$ διότι η βάση του λογαρίθμου είναι το 10, άρα από τον ορισμό έχουμε $10^2 = 100$.

$f(\sqrt{10}) = log(\sqrt{10}) = log\left(10^{1/2}\right) = \frac{1}{2}$.

β) Η εξίσωση γράφεται $log(x+1) + log(x-1) = log10 - log5 \Leftrightarrow$

$log[(x+1)(x-1)] = log\left(\frac{10}{5}\right) \Leftrightarrow log(x^2 - 1^2) = log2.$

Ώστε $x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3$. Αλλά $x > 1$, οπότε $x = \sqrt{3}$. (η λύση $x = -\sqrt{3}$ απορρίπτεται).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 20$ και $\beta = \log 50$. Να αποδείξετε ότι

α) $\beta + \alpha = 3$.

(Μονάδες 7)

β) $\ln(\beta + \alpha) > 1$.

(Μονάδες 6)

γ) $10^{\beta} - 10^{\alpha} = 10 \cdot (\beta + \alpha)$.

(Μονάδες 12)

Δίνεται ότι $e \simeq 2,71$.

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\beta+\alpha=\log 20+\log 50=\log(20\cdot 50)=\log 1000=\log 10^3=3$.

β) Είναι $\beta+\alpha=3>e\Rightarrow \ln(\alpha+\beta)>\ln e\Rightarrow \ln(\alpha+\beta)>1$.

γ) Είναι $10^{\beta}-10^{\alpha}=10^{\log 50}-10^{\log 20}=50-20=30=10\cdot(\beta+\alpha)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 3$ και $\beta = \log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι :

i. $\beta + \alpha > 1$.

(Μονάδες 6)

ii. $\ln \frac{\alpha}{\beta} < 0$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $1<3<4 \Leftrightarrow \log 1<\log 3<\log 4 \Leftrightarrow 0<\alpha<\beta$.

β)

i. Είναι $\beta+\alpha=\log 4+\log 3=\log(4\cdot 3)=\log 12>\log 10=1$, οπότε πράγματι $\beta+\alpha>1$.

ii. Είναι $0<\alpha<\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}<1 \Rightarrow \ln\frac{\alpha}{\beta}<\ln 1 \Rightarrow \ln\frac{\alpha}{\beta}<0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2\log 6 - \log 12 \quad \text{και} \quad B = \log 5 + \log 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log 3$ και $B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $A < B$.

(Μονάδες 05)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x < 1$.

(Μονάδες 08)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες λογαρίθμων, έχουμε:

$$A = 2\log 6 - \log 12 = \log 6^2 - \log 12 = \log 36 - \log 12 = \log\frac{36}{12} = \log 3$$

$$B = \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) = \log 10 = 1$$

β) Είναι:

$$A < B \Leftrightarrow \log 3 < 1 \Leftrightarrow \log 3 < \log 10 \overset{logx\uparrow}{\Longleftrightarrow} 3 < 10$$

Επομένως, αποδείξαμε την ζητούμενη σχέση.

γ) Η ανίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $x > 0$. Τότε έχουμε ισοδύναμα:

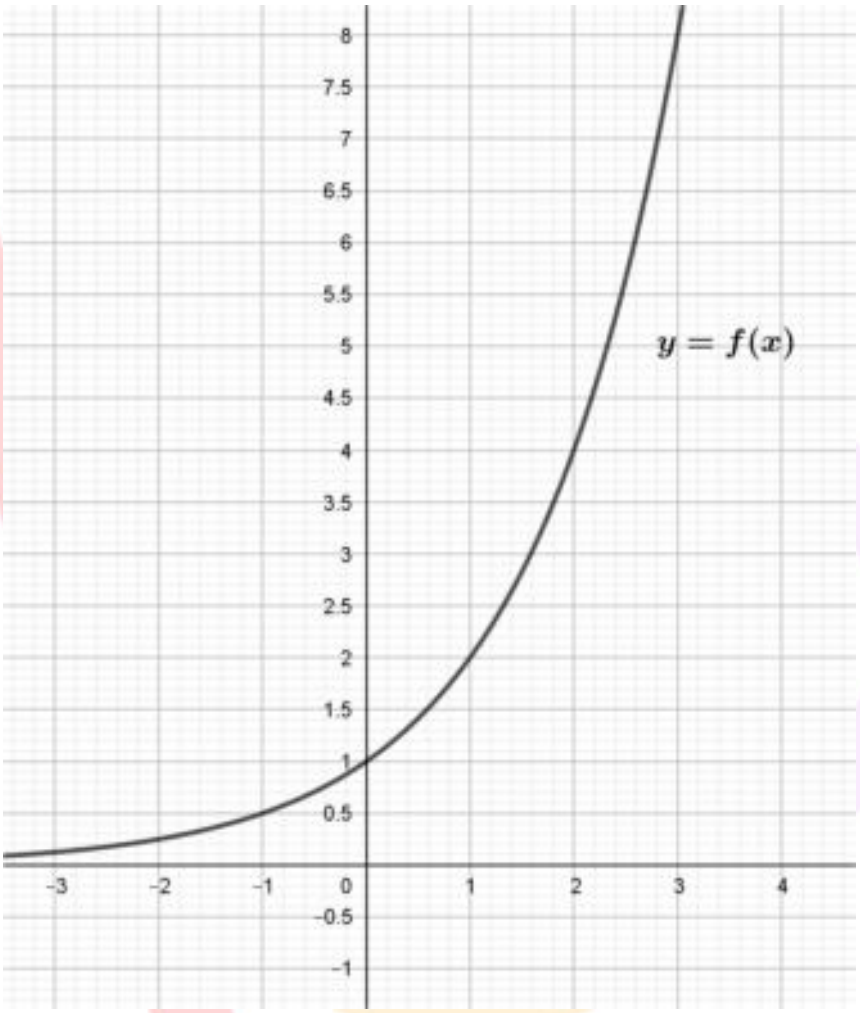
$$\log x < 1 \Leftrightarrow \log x < \log 10 \overset{logx\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Longleftrightarrow} x < 10.$$

Επομένως, είναι $0 < x < 10$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



α)

i. Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 32$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α)

i. Με βάση την γραφική παράσταση της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$0,5=\frac{1}{2}$	1	2	4	8

ii. Από τον παραπάνω πίνακα τιμών και με δεδομένο ότι η συνάρτηση είναι εκθετική παρατηρούμε ότι $f(-1)=\frac{1}{2}=2^{-1}$, $f(0)=1=2^0$, $f(1)=2=2^1$, $f(2)=4=2^2$ και $f(3)=8=2^3$. Άρα η εκθετική συνάρτηση έχει τύπο $f(x)=2^x$.

β) Έχουμε $f(x)=32$, δηλαδή $2^x=32$, οπότε $2^x=2^5$ και τελικά $x=5$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

α) Αν η συνάρτηση f είναι εκθετική συνάρτηση $a^x, 0<a<1$, να βρείτε το α.

(Μονάδες 13)

β) Για $a=\frac{1}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^{\sqrt{2}}, a^{\sqrt{3}}$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Εφόσον το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a^x$ οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν τον τύπο της και $0<\alpha<1$, οπότε θα ισχύει ότι

$a^1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

β) Η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ και είναι εκθετική με βάση $a<1$ οπότε θα είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Επειδή ισχύει $\sqrt{2}<\sqrt{3}$, θα έχουμε ότι $f(\sqrt{2})>f(\sqrt{3})\Rightarrow a^{\sqrt{2}}>a^{\sqrt{3}}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x) \quad (1)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1-x)$.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Για να ορίζεται η εξίσωση (1) πρέπει να είναι $x+1>0$ και $1-x>0$.

Ισοδύναμα πρέπει $x>-1$ και $x<1$. Οπότε η εξίσωση ορίζεται για $x \in (-1,1)$.

β) Για $x \in (-1,1)$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\log(x+1)=\log\left(\frac{1}{2}\right)-\log(1-x) \Leftrightarrow$

$\log(x+1)+\log(1-x)=\log(1)-\log(2) \Leftrightarrow \log[(x+1)(1-x)]=\log\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (x+1)(1-x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$1-x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2=\frac{-1}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1,1)$ δεκτές και οι δύο λύσεις.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1)=\ln(2x)$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1)>\ln(2x)$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ και $x_1, x_2 > 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 .$$

Επίσης η εξίσωση ορίζεται για $\begin{cases} x+1>0 \\ \text{και} \\ 2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ \text{και} \\ x>0 \end{cases}$, δηλαδή $x>0$.

Οπότε έχουμε:

$\ln(x+1) = \ln(2x) \Leftrightarrow$

$x+1 = 2x \Leftrightarrow$

$x = 1$, που είναι δεκτή γιατί $x > 0$.

β) Η ανίσωση ορίζεται επίσης για $x > 0$. Οπότε έχουμε:

$\ln(x+1) > \ln(2x) \Leftrightarrow x+1 > 2x \Leftrightarrow x < 1$

Επειδή $x > 0$, η ανίσωση αληθεύει για $0 < x < 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$A = \ln x + \ln(x+6).$$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln x + \ln(x+6) = \ln 7.$$

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση A ορίζεται για τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{cases} x>0 \\ \text{και} \\ x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \text{και} \\ x>-6 \end{cases}, \text{ δηλαδή } x>0.$$

β) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha>0, \alpha\neq 1$ και $x_1, x_2>0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Οπότε για $x>0$ έχουμε:

$$\ln x + \ln(x+6) = \ln 7 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left[x\cdot(x+6)\right] = \ln 7 \Leftrightarrow$$
$$x\cdot(x+6) = 7 \Leftrightarrow$$
$$x^2+6x-7=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)\cdot(x+7)=0 \Leftrightarrow$$

$x=1>0$, που είναι δεκτή ή $x=-7$ (απορρίπτεται).

Τελικά η λύση της εξίσωσης είναι $x=1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1-\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1-\log 2=\log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$1-\log 2=\log 10-\log 2=\log\frac{10}{2}=\log 5$$

β) Επειδή $x^2+1>0$ η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Με τη βοήθεια του ερωτήματος, α) έχουμε:

$$\log(x^2+1)=1-\log 2\Leftrightarrow\log(x^2+1)=\log 5\Leftrightarrow x^2+1=5$$

$$\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=2$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1,386$ και $\ln 5 = 1,609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln\frac{e}{5} - \ln\frac{4}{e}$

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80 = 5 \cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4,381$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων έχουμε:

$$A = \ln e - \ln 5 - (\ln 4 - \ln e) = 1 - \ln 5 - \ln 4 + 1$$

$$= 2 - 1,386 - 1,609 = 2 - 2,995 = -0,995$$

β) Δεδομένου ότι $80 = 5 \cdot 4^2$, σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$\ln 80 = \ln(5 \cdot 4^2) = \ln 5 + \ln 4^2 = \ln 5 + 2\ln 4 = 1,609 + 2 \cdot 1,386 = 4,381$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 2\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^{\lambda} = A$.

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln\lambda < 0$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$A = 2\log 5 + 2\log 2 = \log 5^2 + \log 2^2 = \log 25 + \log 4 = \log(25 \cdot 4) = \log 100 = 2$$

β) Είναι $e^{\lambda} = A \Leftrightarrow e^{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \ln 2$.

γ) Είναι $2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e \Leftrightarrow \lambda < 1 \Leftrightarrow \ln \lambda < \ln 1 \Leftrightarrow \ln \lambda < 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\sqrt{e} + \log\sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = \frac{7}{6}$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \ln A < 1$.

(Μονάδες 13)

Δίνεται $e \simeq 2.71$.

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A=\ln\sqrt{e}+\log\sqrt[3]{100}=\ln e^{\frac{1}{2}}+\log 10^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$.

β) Είναι $1<\frac{7}{6}<e \Leftrightarrow \ln 1<\ln\frac{7}{6}<\ln e \Leftrightarrow 0<\ln A<1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2\log\sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 7$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \log A < 1$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A = e^{\ln 2} + 10^{2\log\sqrt{5}} = e^{\ln 2} + 10^{\log(\sqrt{5})^2} = e^{\ln 2} + 10^{\log 5} = 2 + 5 = 7$.

β) Είναι $1 < 7 < 10 \Leftrightarrow \log 1 < \log 7 < \log 10 \Leftrightarrow 0 < \log A < 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10} = 10$

(Μονάδες 6)

ii. $A = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$, $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha^x = x$.

Οπότε για $x=\alpha=10$ έχουμε ότι $\log 10^{10}=10$.

Εναλλακτικά, $\log 10^{10}=10\cdot\log 10=10\cdot 1=10$.

ii. Είναι $A=\ln(\ln e)+\log(\log 10^{10})=\ln 1+\log 10=0+1=1$.

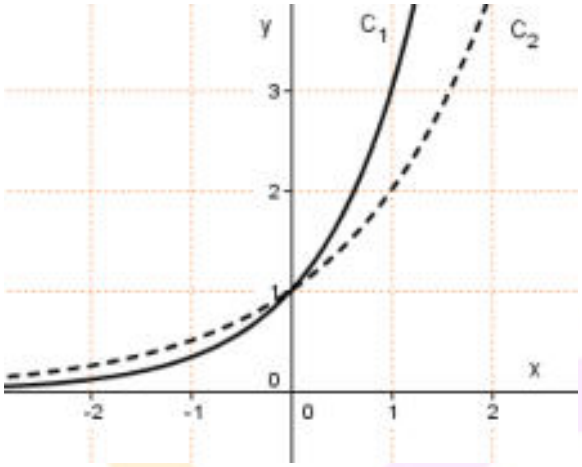
β) Η εξίσωση $\log(x^2+1)=A$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+1\geq 1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ισοδύναμα έχουμε :

$\log(x^2+1)=A \Leftrightarrow \log(x^2+1)=1 \Leftrightarrow x^2+1=10 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

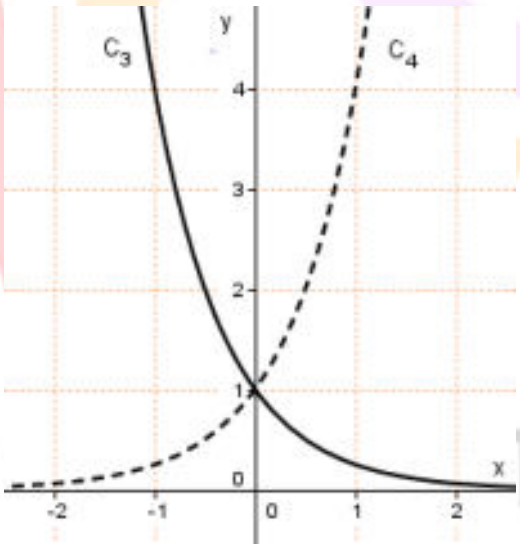
ΘΕΜΑ 2

α) Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x) = 3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 12)

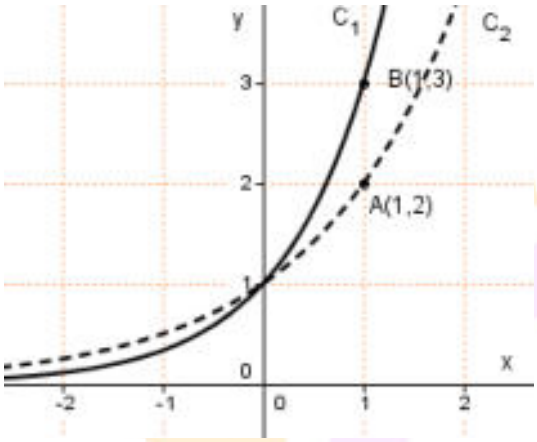
β) Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 13)

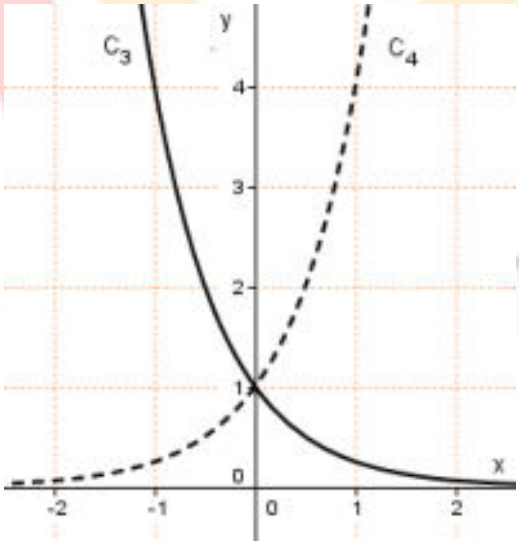
ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $f(1) = 2^1 = 2$, οπότε το σημείο $A(1,2)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Επίσης, και $g(1) = 3^1 = 3$, οπότε το σημείο $B(1,3)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g. Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αντιστοιχεί στην καμπύλη C_2 και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g αντιστοιχεί στην καμπύλη C_1.



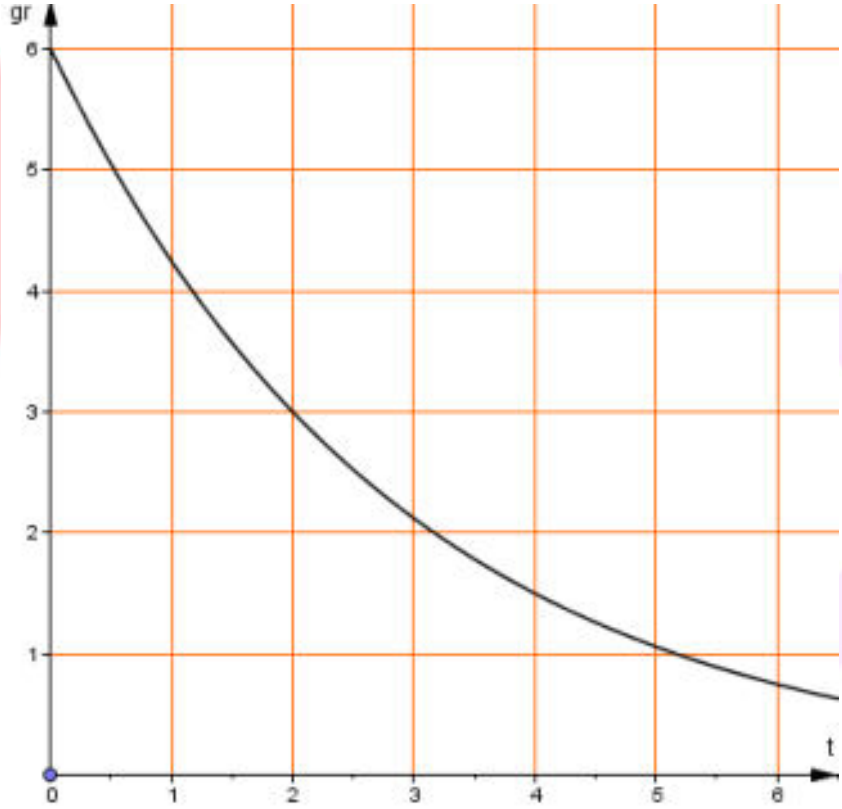
β) Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης α^x είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα όταν $0 < \alpha < 1$.

Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$, ως γνησίως αύξουσας, αντιστοιχεί στην καμπύλη C_4, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, ως γνησίως φθίνουσας, αντιστοιχεί στην καμπύλη C_3.



ΘΕΜΑ 2

Η καμπύλη που φαίνεται στο παρακάτω σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η $1^{η}$ ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 1$, η $2^{η}$ ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ μέχρι $t = 2$ κ.λπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).



α) Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική ($t = 0$) ποσότητα του ραδιενεργού υλικού;

(Μονάδες 8)

β) Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού;

(Μονάδες 9)

γ) Κατά τη διάρκεια ποιάς ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr;

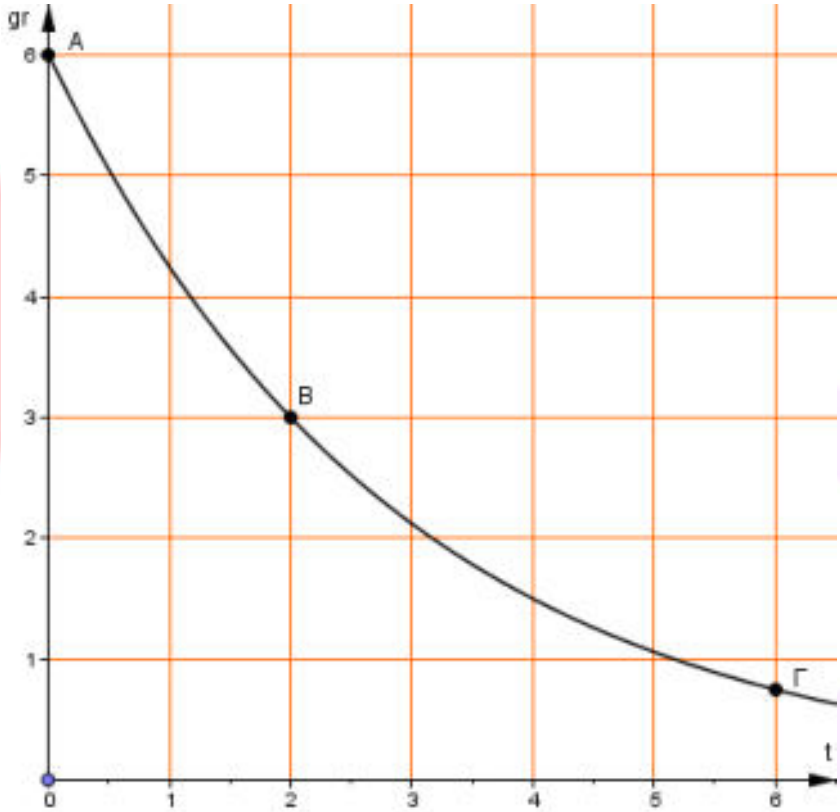
(Μονάδες 8)

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η αρχική ποσότητα του ραδιενεργού υλικού είναι το υψόμετρο του σημείου της γραφικής παράστασης που αντιστοιχεί στο $t = 0$, δηλαδή η τεταγμένη του σημείου Α. Οπότε, η αρχική ποσότητα του υλικού είναι 6 (γραμμάρια).



β) Η ημιζωή του ραδιενεργού υλικού είναι η τιμή του χρόνου t κατά την οποία η ποσότητα του υλικού μειώνεται στο ήμισυ της αρχικής, δηλαδή γίνεται 3 γραμμάρια. Είναι συνεπώς, η τετμημένη του σημείου Β, δηλαδή $t = 2$.

γ) Το υψόμετρο της καμπύλης γίνεται μικρότερο του 1 στο χρονικό διάστημα $(5, 6)$, δηλαδή κατά τη διάρκεια της $6^{ης}$ ημέρας. Άρα, κατά τη διάρκεια της $6^{ης}$ ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr.

νέο φροντιστήριο