Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Άλγεβρα

Κεφάλαιο: 5 Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x=0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x>0$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x^2-x-2)=0$. Οπότε $x=0$ ή $x^2-x-2=0$ που έχει $\Delta=9$ και ρίζες $x=-1$ και $x=2$. Τελικά ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ είναι οι $x=0$, $x=-1$ και $x=2$.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση, πρέπει $x>0$. Θέτουμε $\ln x=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $P(\omega)=0$.

Από το α) ερώτημα έχουμε τις ρίζες $\omega=0$, $\omega=-1$, $\omega=2$. Οπότε προκύπτουν τρείς εξισώσεις:

i) $\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln 1 \Leftrightarrow x=1$ δεκτή.

ii) $\ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{-1} \Leftrightarrow x=e^{-1}$ δεκτή.

iii) $\ln x=2 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^2 \Leftrightarrow x=e^2$ δεκτή.

γ) Η ανίσωση $x^3-x^2-2x>0 \Leftrightarrow P(x)>0 \Leftrightarrow x(x^2-x-2)>0$ αληθεύει για $x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε για την ανίσωση $(\ln x)^3-(\ln x)^2-2(\ln x)>0 \Leftrightarrow P(\ln x)>0$, προκύπτει ότι $\ln x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$. Λύνουμε τις δύο ανισώσεις:

i) $-1<\ln x<0 \Leftrightarrow \ln e^{-1}<\ln x<\ln 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e}<x<1$

ii) $2<\ln x \Leftrightarrow \ln e^2<\ln x \Leftrightarrow e^2<x$.

Τελικά $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)\cup(e^2,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f(\ln\frac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x \neq 0$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$. Επίσης,

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\dfrac{x^2+1}{x} = -f(x)$, για κάθε $x \in A$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι περιττή, δηλαδή η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

γ) Είναι $\ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ και αφού f περιττή είναι $f(\ln\frac{1}{2}) = f(-\ln 2) = -f(\ln 2)$, δηλαδή $f(\ln 2) + f(\ln\frac{1}{2}) = 0$.

δ) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ είναι $\eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$ και αφού f περιττή είναι $f(\eta\mu(\pi+\theta)) = f(-\eta\mu\theta) = -f(\eta\mu\theta)$, δηλαδή $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi+\theta)) = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ με $\omega\neq 3$ είναι ισοδύναμη με την $(\omega^2-1)(\omega-3)>0$.

Το πρόσημο του $(\omega^2-1)(\omega-3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ω	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$\omega-3$		-		-		-	0	+	
ω^2-1		+	0	-	0	+		+	
$(\omega-3)(\omega^2-1)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ αληθεύει για κάθε $\omega\in(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

β) Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}>0$. Αν θέσουμε $e^x=\omega$ η ανίσωση $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}>0$ γίνεται $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ που όπως δείξαμε στο α) αληθεύει για $\omega\in(-1,1)\cup(3,+\infty)$.

Συνεπώς θα πρέπει $-1<\omega<1\Leftrightarrow -1<e^x<1\Leftrightarrow x<0$ ή $\omega>3\Leftrightarrow e^x>3\Leftrightarrow x>\ln 3$

Τελικά η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(\ln 3,+\infty)$.

γ) Η εξίσωση $A=-\ln 3$ ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(\ln 3,+\infty)$ και γίνεται ισοδύναμα

$$\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)=\ln 3^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$3e^{2x}-3=e^x-3\Leftrightarrow$$

$$3e^{2x}-e^x=0\Leftrightarrow$$

$$e^x(3e^x-1)=0\overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$3e^x-1=0\Leftrightarrow$$

$$e^x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$x=\ln\frac{1}{3}$$

και επειδή $\frac{1}{3}<1\Leftrightarrow \ln\frac{1}{3}<0$ η λύση $x=\ln\frac{1}{3}$ είναι δεκτή.

ΘΕΜΑ 4

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε $P(x)=(4x^2-1)(3x-2)+1$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται ισοδύναμα

$$P(x)=1 \Leftrightarrow (4x^2-1)(3x-2)+1=1 \Leftrightarrow (4x^2-1)(3x-2)=0$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $\pm\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

β) Δείξαμε στο α) ότι αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση $P(x)=1$ είναι οι $\pm\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$.

Συνεπώς για να ήταν $P(\log 5)=1$, θα έπρεπε $\log 5=\frac{1}{2}$ ή $\log 5=-\frac{1}{2}$ ή $\log 5=\frac{2}{3}$.

Όμως $\log 5 \neq -\frac{1}{2}$ αφού $5>1 \Leftrightarrow \log 5>0$.

Επίσης $\log 5=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5=10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5=\sqrt{10}$ το οποίο είναι άτοπο .

Τέλος $\log 5=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 5=10^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 5=\sqrt[3]{10^2}$ το οποίο επίσης είναι άτοπο.

Συνεπώς $P(\log 5)\neq 1$.

γ) Είναι $P(x)=(4x^2-1)(3x-2)+1$, οπότε $P(-1)=(4(-1)^2-1)(3(-1)-2)+1=-14$ και $P(0)=(-1)(-2)+1=3$.

Αφού οι τιμές $P(-1), P(0)$ είναι ετερόσημες, η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):\left(x^2-3x+2\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)\left(2x-3\right)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$, θα ισχύει ότι $P(1)=0$.

Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow 2-9+\alpha-2-6=0 \Leftrightarrow \alpha=15$.

β) Για $\alpha=15$ έχουμε $P(x)=2x^3-9x^2+13x-6$.

i. Η διαίρεση $P(x):\left(x^2-3x+2\right)$ φαίνεται παρακάτω.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3-9x^2+13x-6 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
-2x^3+6x^2-4x & 2x-3 \\ \cline{1-1}
-3x^2+9x-6 & \\
3x^2-9x+6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής: $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)(2x-3)$.

ii. Αξιοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα διαίρεσης έχουμε :

$P(x)<0 \Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)(2x-3)<0$

Το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)(2x-3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-		-	0	+	
$2x-3$		-		-	0	+		+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)<0 \Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)(2x-3)<0$ αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

iii. Είναι $\ln 2<\ln e \Leftrightarrow \ln 2<1$ οπότε αφού δείξαμε παραπάνω ότι $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$, είναι $P(\ln 2)<0$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{lne}x^3 + 4x^2 ln\sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

(Μονάδες 4)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $P(x) = e^{lne}x^3 + 4x^2 ln\sqrt{e} + 2 = ex^3 + 4x^2 lne^{\frac{1}{2}} + 2 =$

$$= ex^3 + 4x^2 \cdot \frac{1}{2} lne + 2 = ex^3 + 2x^2 + 2.$$

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y = ex + 4$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$P(x) - (ex + 4) = 0 \Leftrightarrow ex^3 + 2x^2 + 2 - ex - 4 = 0 \Leftrightarrow ex^3 + 2x^2 - ex - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2(ex + 2) - (ex + 2) = 0 \Leftrightarrow (ex + 2) \cdot (x^2 - 1) = 0.$

Άρα οι τετμημένες των σημείων τομής είναι: $x = 1$, $x = -1$ και $x = -\frac{2}{e}$.

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y = ex + 4$ θα λύσουμε την ανίσωση:

$P(x) - (ex + 4) > 0 \Leftrightarrow (ex + 2) \cdot (x^2 - 1) > 0.$

Οι ρίζες του $(ex + 2) \cdot (x^2 - 1)$ είναι $x = 1$, $x = -1$ και $x = -\frac{2}{e}$.

Το πρόσημο του $(ex + 2) \cdot (x^2 - 1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{e}$		1		$+\infty$
$(ex + 2) \cdot (x^2 - 1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-1, -\frac{2}{e}) \cup (1, +\infty)$.

δ) Παρατηρούμε ότι το $P(e) - e^2 - 4$ είναι η τιμή του $P(x) - (ex + 4)$ για $x = e$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε $P(e) - e^2 - 4 > 0$, αφού $e > 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

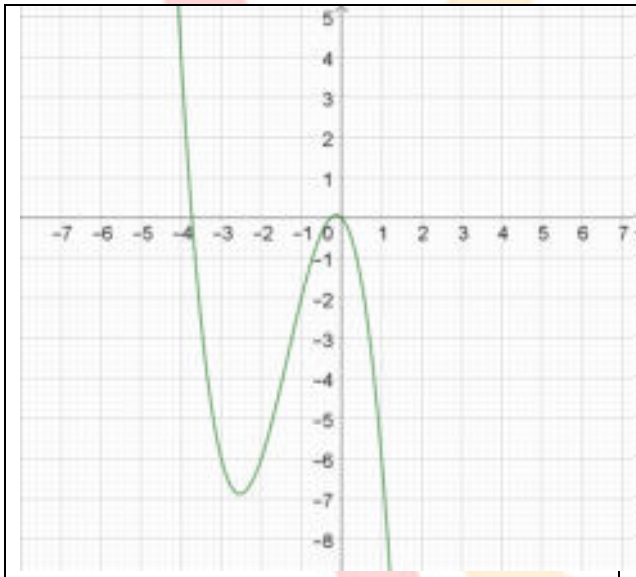
(Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

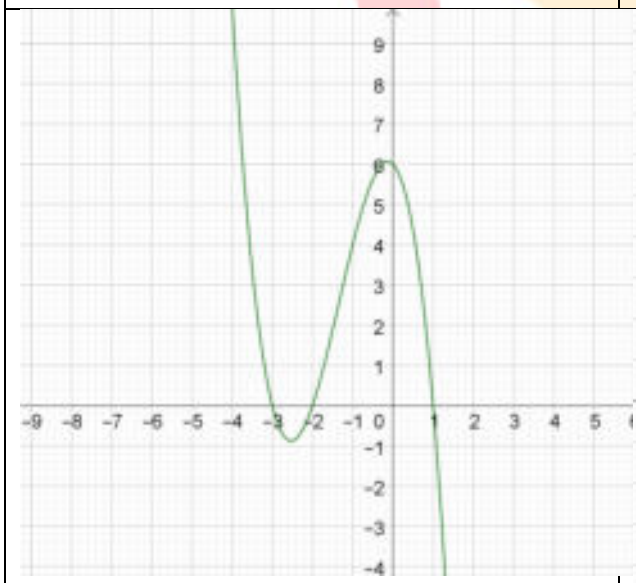
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

(Μονάδες 8)

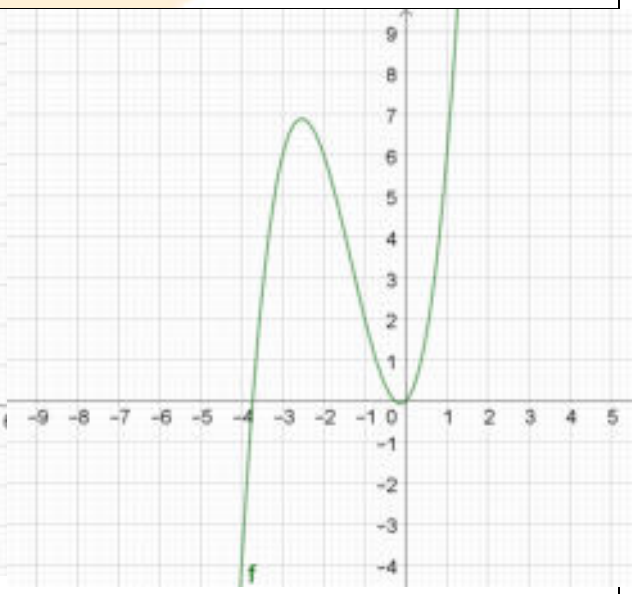


Σχήμα 1

Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

ΛΥΣΗ

α) Το $P(x)=-x^3-4x^2-x+6$ έχει άθροισμα συντελεστών ίσο με το 0, οπότε έχει ρίζα το 1.

Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

-1	-4	-1	6	1
	-1	-5	-6	
-1	-5	-6	0	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)<0$ γίνεται ισοδύναμα $(x-1)(-x^2-5x-6)<0$.

Ο πίνακας προσήμου του $(x-1)(-x^2-5x-6)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
x-1		-		-		-	0	+	
$-x^2-5x-6$		-	0	+	0	-		-	
$(x-1)(-x^2-5x-6)$		+	0	-	0	+	0	-	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)<0$ αληθεύει για κάθε $x\in(-3,-2)\cup(1,+\infty)$.

β) Με βάση το α) ερώτημα, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ θα πρέπει να είναι κάτω από τον άξονα xx', για κάθε $x\in(-3,-2)\cup(1,+\infty)$. Το μόνο από τα δοσμένα σχήματα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

Εναλλακτικά, αφού $P(0)=6$ θα πρέπει η γραφική παράσταση να διέρχεται από το σημείο (0,6) και το μόνο σχήμα που ικανοποιεί αυτήν την απαίτηση είναι το γ.

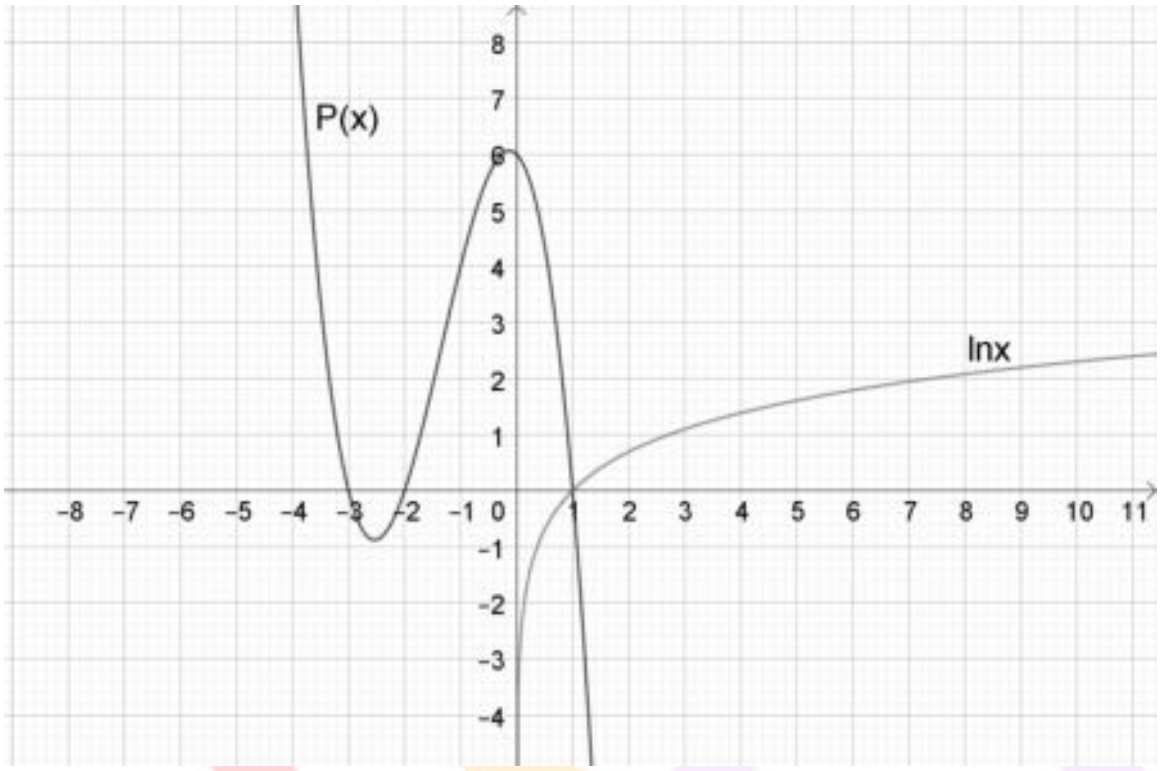
γ) Αν στο σχήμα γ συμπληρώσουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$ όπως φαίνεται παρακάτω, θα διαπιστώσομε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη 1, που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

Εναλλακτικά, η εξίσωση $P(x)=\ln x$ ορίζεται για $x>0$.

Για $x>1$ έχουμε ότι $P(x)<0<\ln x$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x)=\ln x$ δεν έχει ρίζα στο $(1,+\infty)$.

Επίσης για $0<x<1$ έχουμε ότι $\ln x<0<P(x)$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x)=\ln x$ δεν έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Τέλος $P(1)=\ln 1=0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=0$.

(Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha=-1$ και $\beta=0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log\sqrt{10})>0$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x=x\left(\alpha x^2+\beta x+1\right)$, οπότε έχει μία ρίζα τη $x=0$. Συνεπώς οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες, θα είναι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+1$, που επειδή έχει ακέραιους συντελεστές, θα πρέπει οι δύο αυτές ακέραιες ρίζες να είναι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή του 1. Δεδομένου ότι οι μόνοι διαιρέτες του 1 είναι το 1 και το -1, συμπεραίνουμε ότι οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες είναι το 1 και το -1.

Τελικά το $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς 0 , 1 και -1.

β) Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0$ (1).

Επίσης $P(-1)=0 \Leftrightarrow -\alpha+\beta-1=0$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε ότι $2\beta=0 \Leftrightarrow \beta=0$ και με αντικατάσταση στην (1) έχουμε ότι $\alpha=-1$.

γ) Με $\alpha=-1$ και $\beta=0$ είναι $P(x)=-x^3+x=x(1-x^2)$

i. Το πρόσημό του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
$1-x^2$		-	0	+		+	0	-	
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)>0$ αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

ii. Είναι $\log\sqrt{10}=\log 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\log 10=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$, οπότε $P(\log\sqrt{10})=P(\frac{1}{2})>0$, αφού όπως δείξαμε παραπάνω $P(x)>0$ για $x\in(0,1)$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Καθώς υπάρχουν λογάριθμοι μόνο θετικών αριθμών, απαιτούμε $10^x - 1 > 0$, άρα $10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 10^0 \Leftrightarrow x > 0$, αφού η συνάρτηση $g(x) = 10^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Πρέπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow log(10^x - 1) > 0 \Leftrightarrow log(10^x - 1) > log1$ και καθώς η συνάρτηση $h(x) = logx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ παίρνουμε $10^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 10^x > 2$ σχέση που γράφεται $10^x > 10^{log2}$. Ώστε $x > log2$, δηλαδή $x \in (log2, +\infty)$.

γ) Έχουμε $f(x) + x = log(10^x - 1) + log10^x = log[10^x(10^x - 1)] = log(10^x \cdot 10^x - 10^x) = log(10^{2x} - 10^x)$.

δ) Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow log(10^{2x} - 10^x) = 0$ άρα $10^{2x} - 10^x = 1 \Leftrightarrow (10^x)^2 - 10^x - 1 = 0$. Θέτοντας $10^x = y > 0$, παίρνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $y^2 - y - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, οπότε $y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Έτσι $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, αφού $y > 0$.

Τελικά $10^x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x = log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

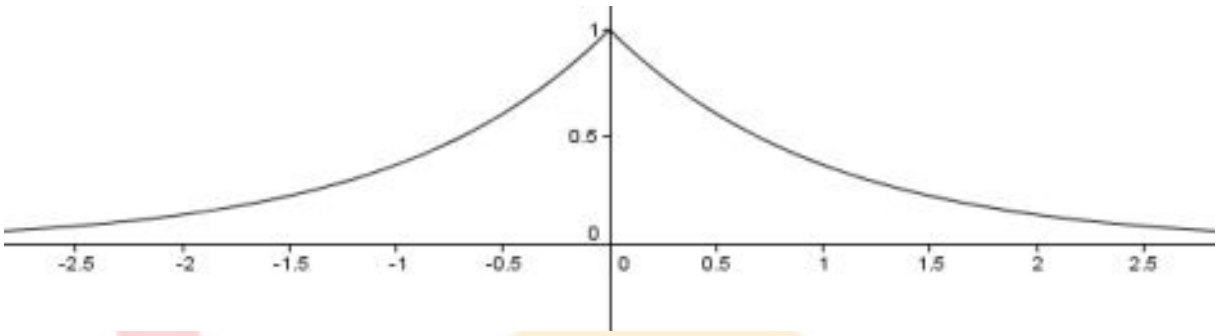
Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), -log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f.

A. $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x<0 \\ e^{-x}, & x\geq 0 \end{cases}$ B. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ e^{x}, & x\geq 0 \end{cases}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

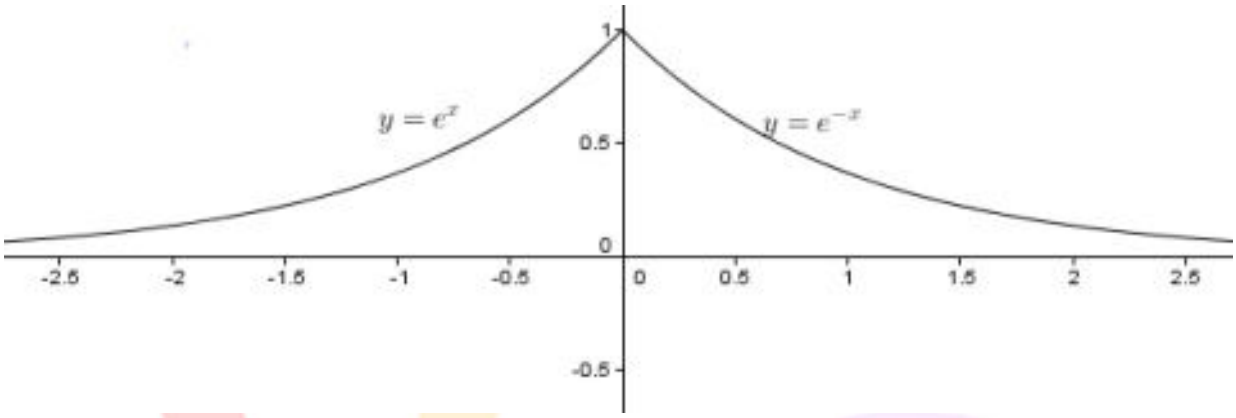
δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0, 1)$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την $y=e^x$ για $x<0$ και την $y=e^{-x}$ για $x\geq 0$ οπότε ο τύπος της είναι ο πρώτος από τους δοσμένους τύπους.

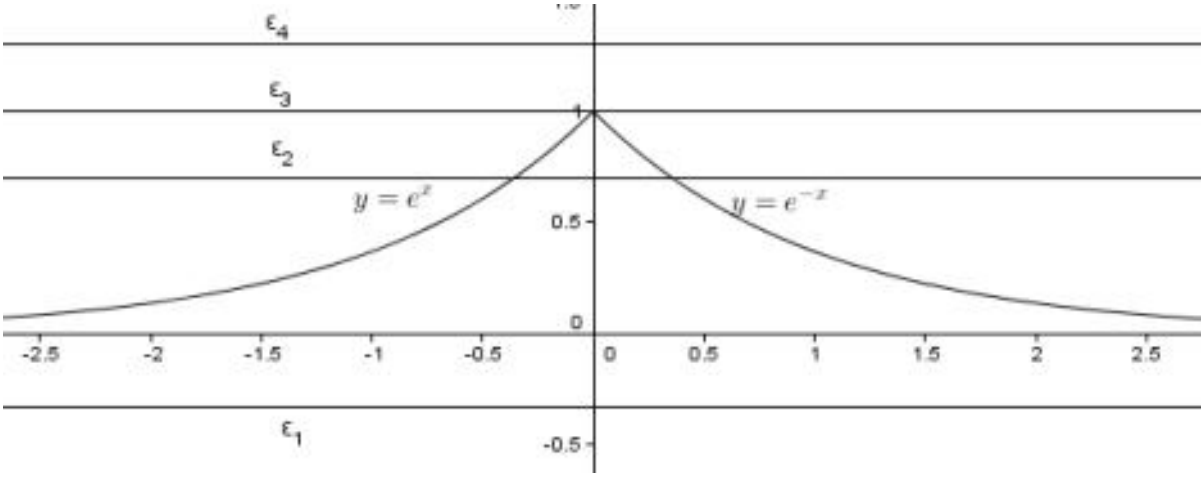


β) Από την παραπάνω γραφική παράσταση της f συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι:

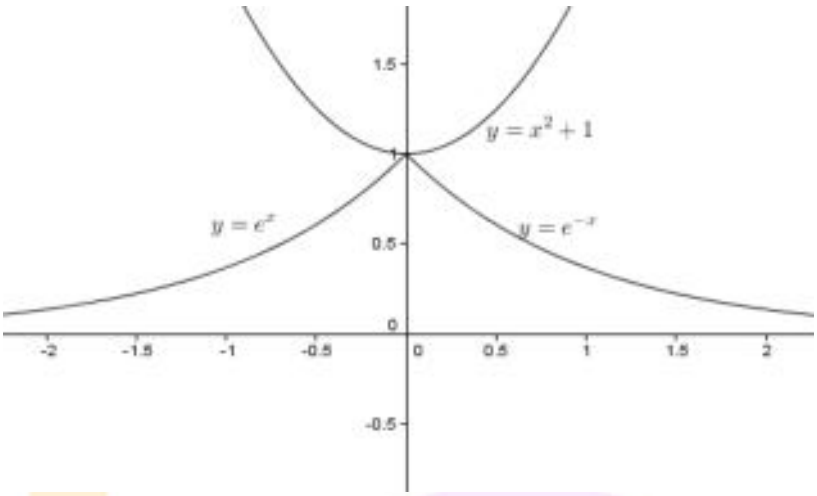
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και
- παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$, το $f(0)=1$

γ) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $\alpha\leq 0$, (ευθεία ε_1) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.
- Αν $0<\alpha<1$, (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.
- Αν $\alpha=1$, (ευθεία ε_3) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Αν $\alpha>1$, (ευθεία ε_4) τότε η C_f και η ευθεία $y=\alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.



δ) Η παραβολή $y=x^2+1$ διέρχεται από το σημείο $(0,1)$ αφού για $x=0$ είναι $y=0^2+1=1$. Το σημείο $(0,1)$ είναι και σημείο της C_f, αφού $f(0)=1$. Με $x\neq 0$ έχουμε $x^2>0$, οπότε $y=x^2+1>1$ και $f(x)\leq 1$. Άρα η παραβολή και η C_f δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε το μοναδικό κοινό σημείο τους είναι το $(0,1)$.



Σχόλιο

Στο πλαίσιο μιας γραφικής λύσης θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε την παραβολή και τη γραφική παράσταση της f και να διαπιστώσουμε ότι έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(0,1)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=\ln x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y=2$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=\mathbb{R}-\{0\}$.

Για κάθε $x\in A$, είναι φανερό ότι $-x\in A$ και

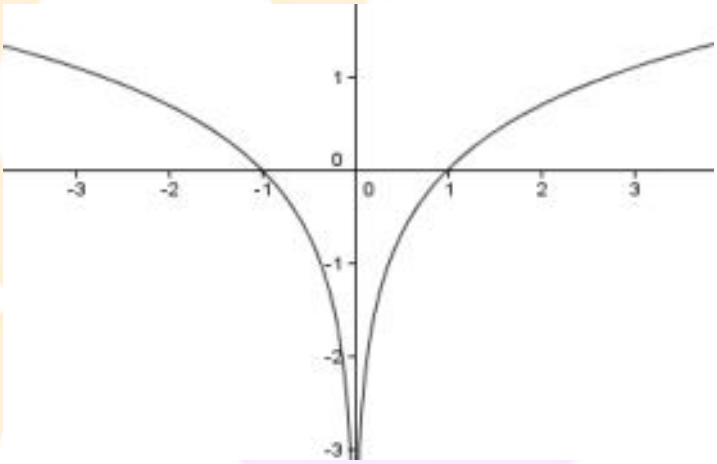
$$f(-x)=\frac{1}{2}\ln(-x)^2=\frac{1}{2}\ln x^2=f(x)$$

Επομένως η f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2=\frac{1}{2}\ln|x|^2=2\cdot\frac{1}{2}\ln|x|=\ln|x|=\ln x$$

γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και, σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x,\ x>0$ και στη συνέχεια θεωρήσουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον άξονα $y'y$.



δ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=2$, μόνο όταν $f(x)<2$. Με $x\neq 0$ έχουμε:

$$f(x)<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln x^2<2\Leftrightarrow\ln x^2<4\Leftrightarrow x^2<e^4\Leftrightarrow|x|<e^2\Leftrightarrow -e^2<x<e^2$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=2$ για κάθε x με $x\in(-e^2,0)\cup(0,e^2)$

.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

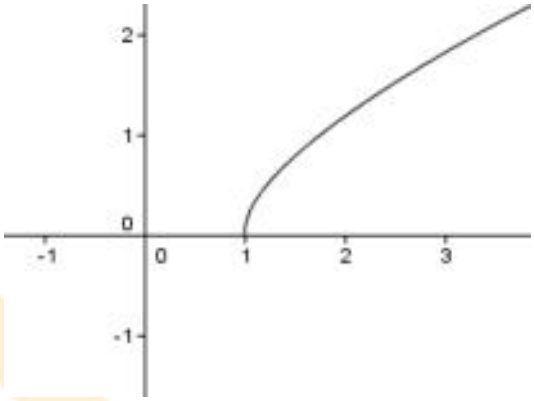
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x\ln x}$ και $g(x)=\sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

(Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο όταν $x>0$ και $x\ln x\geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x\geq 1$, οπότε $A_f=[1,+\infty)$. Ομοίως η g ορίζεται μόνο όταν $x>0$ και $\ln x\geq 0$, δηλαδή μόνο όταν $x\geq 1$, οπότε $A_g=[1,+\infty)$.

β) Με $x\geq 1$ έχουμε:

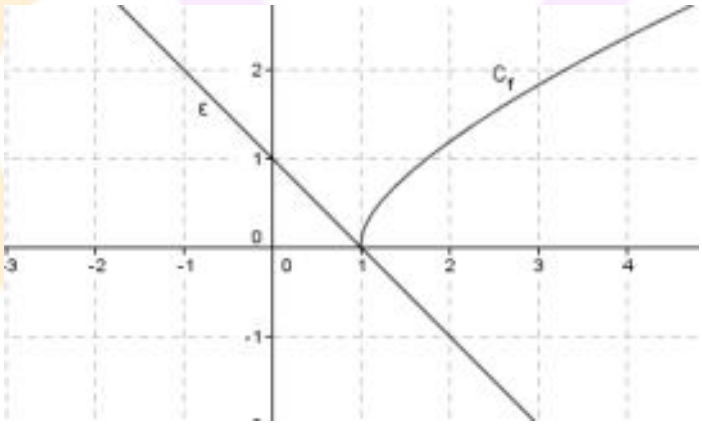
$$f(x)-g(x)=\sqrt{x\ln x}-\sqrt{\ln x}=\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{\ln x}\geq 0$$

αφού καθένας από τους όρους του γινομένου είναι μη αρνητικός. Επομένως, η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

γ) i. Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A_f=[1,+\infty)$.

ii. Επειδή $\frac{5}{3}-\frac{7}{5}=\frac{25-21}{15}=\frac{4}{15}>0$, ισχύει $\frac{5}{3}>\frac{7}{5}$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα συμπεραίνουμε ότι $f\left(\frac{5}{3}\right)>f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Η ευθεία $\varepsilon: y=1-x$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $(1,0)$ και $(0,1)$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την C_f είναι το $(1,0)$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=1-x$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.



Επισήμανση.

Στο πλαίσιο μιας αλγεβρικής λύσης θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε ρίζες στο διάστημα $[1,+\infty)$, να διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός 1 είναι η μία ρίζα της και να αποδείξουμε ότι αν $x>1$ έχουμε $f(x)>f(1)$, δηλαδή $f(x)>0$ και $1-x<0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει ρίζα μεγαλύτερη από τη μονάδα.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\dfrac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 3-\log 7$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει

$$\frac{4^x-1}{2^x+5}>0 \overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow}$$
$$4^x-1>0 \Leftrightarrow$$
$$4^x>1 \Leftrightarrow$$
$$4^x>4^0 \Leftrightarrow$$
$$x>0.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(0,+\infty)$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha>0, \alpha\neq 1$ και $x_1,x_2>0$ ισχύει η ισοδυναμία: $\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$. Οπότε έχουμε:

$$f(x)=\log 3-\log 7 \Leftrightarrow$$
$$\log\frac{4^x-1}{2^x+5}=\log\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4^x-1}{2^x+5}=\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$
$$7\cdot 4^x-7=3\cdot 2^x+15 \Leftrightarrow$$
$$7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22=0 \overset{2^x=y}{\Leftrightarrow}$$
$$7\cdot y^2-3\cdot y-22=0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot 7\cdot(-22)=625>0$ και ρίζες $y_1=\frac{3+25}{14}=\frac{28}{14}=2$, $y_2=\frac{3-25}{14}=\frac{-22}{14}=-\frac{11}{7}$.

Οπότε $2^x=2 \Leftrightarrow x=1$, που είναι δεκτή διότι $x>0$ (η εξίσωση $2^x=-\frac{11}{7}$ είναι αδύνατη).

γ) Έχουμε

$$f(x)>\log 3-\log 7 \Leftrightarrow$$
$$\log\frac{4^x-1}{2^x+5}>\log\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4^x-1}{2^x+5}>\frac{3}{7} \overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow}$$
$$7\cdot 4^x-7>3\cdot 2^x+15 \Leftrightarrow$$
$$7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22>0 \overset{2^x=y}{\Leftrightarrow}$$
$$7\cdot y^2-3\cdot y-22>0 \qquad (1)$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $7\cdot y^2-3\cdot y-22$ έχει ρίζες $y=2$ και $y=-\frac{11}{7}$. Οπότε η ανίσωση (1) αληθεύει για $y<-\frac{11}{7}$ ή $y>2$, δηλαδή $2^x<-\frac{11}{7}$ (αδύνατη διότι $2^x>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x) ή $2^x>2 \Leftrightarrow x>1$.

Τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x>1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{x}-2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $e^x - 2 > 0$

Δηλαδή: $e^x > 2 \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \ln 2.$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A = (\ln 2, +\infty)$.

β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&f(x) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x - 2\right) + x = \ln 2^3 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x - 2\right) + \ln e^x = \ln 8 \Leftrightarrow \\
&\ln\left[\left(e^x - 2\right)\cdot e^x\right] = \ln 8 \Leftrightarrow \\
&\left(e^x\right)^2 - 2e^x = 8 \overset{e^x = y}{\Leftrightarrow} \\
&y^2 - 2y - 8 = 0.
\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 36 > 0$ και ρίζες $y = 4$, $y = -2$. Άρα $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$ (η εξίσωση $e^x = -2$ είναι αδύνατη, διότι $e^x > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x). Η λύση $x = \ln 4$ είναι δεκτή, διότι $\ln 4 > \ln 2$.

Τελικά η εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$ έχει λύση $x = \ln 4$.

γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&f(x) + x \geq 3\ln 2 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x - 2\right) + x \geq \ln 2^3 \Leftrightarrow \\
&\ln\left(e^x - 2\right) + \ln e^x \geq \ln 8 \Leftrightarrow \\
&\ln\left[\left(e^x - 2\right)\cdot e^x\right] \geq \ln 8 \Leftrightarrow \\
&\left(e^x\right)^2 - 2e^x \geq 8 \overset{e^x = y}{\Leftrightarrow} \\
&y^2 - 2y - 8 \geq 0 \qquad (1).
\end{aligned}$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $y^2 - 2y - 8$ έχει ρίζες $y = 4$ και $y = -2$. Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $y \leq -2$ ή $y \geq 4$, δηλαδή $e^x \leq -2$ (που είναι αδύνατη) ή $e^x \geq 4 \Leftrightarrow \ln e^x \geq \ln 4 \Leftrightarrow x \geq \ln 4$. Πρέπει και $x > \ln 2$, οπότε τελικά η ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$ αληθεύει για $x \geq \ln 4$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t)=q_0\cdot\alpha^t,\ t\geq 0,$$

όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0<\alpha<1$.

(Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f, εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0.

(Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha=\frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

(Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Στο πλαίσιο του προβλήματος η σταθερά q_0 παριστάνει τη δόση του φαρμάκου που πήρε ο ασθενής (την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό τη χρονική στιγμή $t=0$).

Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό του ασθενούς μειώνεται όσο περνούν οι ημέρες, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση $f(t)=q_0\cdot\alpha^t$ είναι φθίνουσα, το οποίο συμβαίνει όταν $0<\alpha<1$.

β)

i. Μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί, δηλαδή

$$f(1)=\frac{q_0}{2}\Leftrightarrow$$

$$q_0\cdot\alpha=\frac{q_0}{2}\Leftrightarrow$$

$$\alpha=\frac{1}{2}.$$

ii. Παρατηρούμε ότι:

$$f(0)=q_0\cdot\alpha^0=q_0,\quad f(1)=q_0\cdot\frac{1}{2}=\frac{q_0}{2},\quad f(2)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{q_0}{4},\quad f(3)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{q_0}{8},$$

$$f(4)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{q_0}{16},\ f(5)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{q_0}{32},\ f(6)=q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{q_0}{64}.$$

Οπότε:

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$

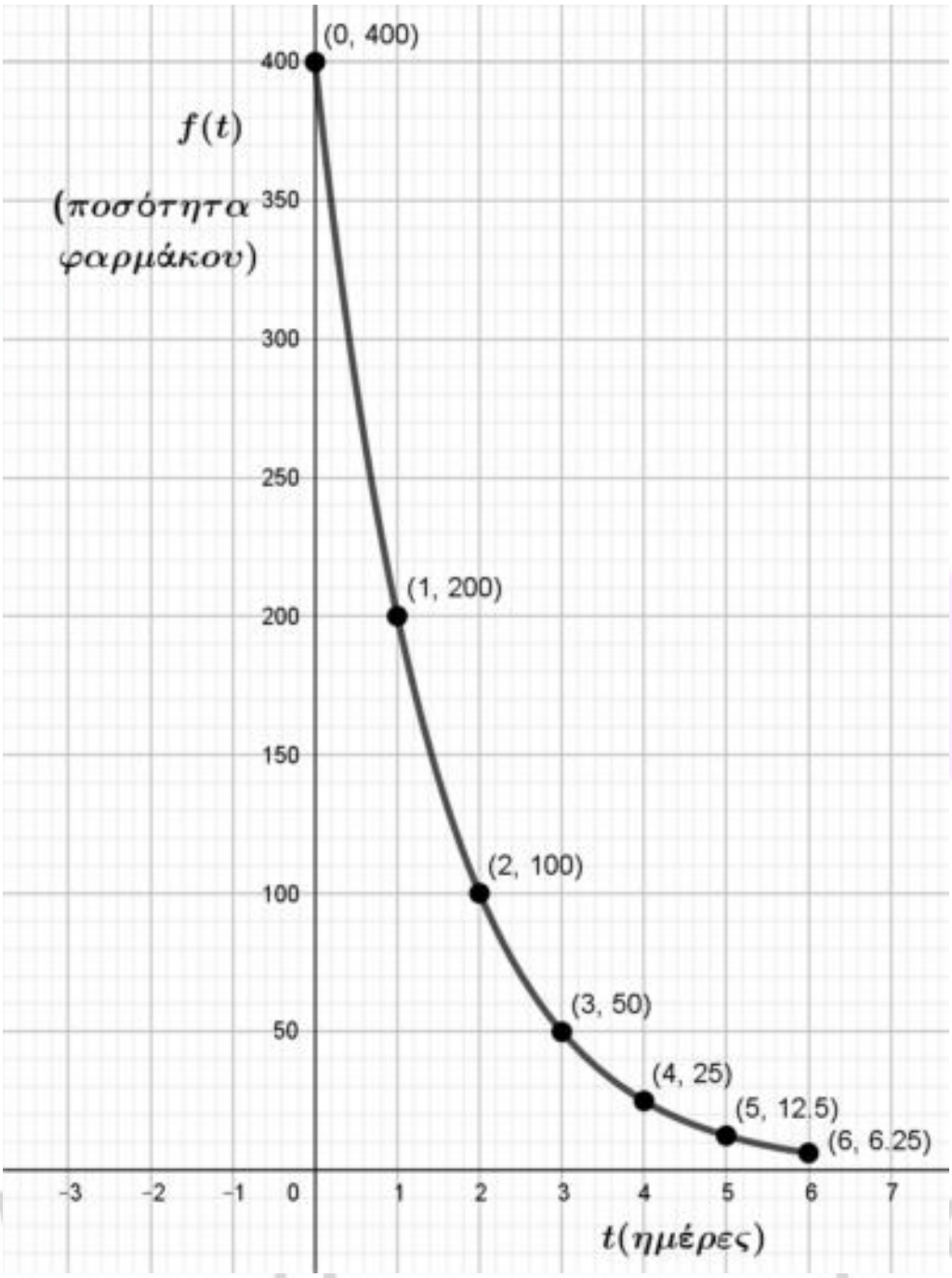
γ)

i. Έχουμε $f(4)=25\Leftrightarrow\frac{q_0}{16}=25\Leftrightarrow q_0=25\cdot16\Leftrightarrow q_0=400$ mg.

ii. Με τη βοήθεια του βii) ερωτήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $f(t)=400\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$ στο διάστημα $[0,6]$:

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	400	200	100	50	25	12,5	6,25

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.



ΘΕΜΑ 4

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου *t* (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, δηλαδή:

$Q(2)=\frac{1}{3}\cdot Q_0 \Leftrightarrow Q_0\cdot e^{2c}=\frac{Q_0}{3}\Leftrightarrow \left(e^c\right)^2=\frac{1}{3}\overset{e^c>0}{\Leftrightarrow} e^c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Οπότε

$Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}\Leftrightarrow$

$Q(t)=Q_0\cdot\left(e^c\right)^t\Leftrightarrow$

$Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

β) Γνωρίζουμε ότι μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό ραδιενεργού υλικού και από το α) ερώτημα γνωρίζουμε επίσης ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. Ζητούμενη είναι η αρχική ποσότητα που θάφτηκε, δηλαδή το Q_0.

Επομένως: $Q(4)=1\Leftrightarrow Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4=1\Leftrightarrow Q_0\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=1\Leftrightarrow Q_0=9$ κιλά.

γ) Στα ερωτήματα α) και β) δείξαμε ότι $Q(t)=9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. Έχουμε

$$Q(t)=\frac{1}{81}\Leftrightarrow$$

$$9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t=\frac{1}{81}\Leftrightarrow$$

$$3^2\cdot\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^t=3^{-4}\Leftrightarrow$$

$$3^{2-\frac{t}{2}}=3^{-4}\Leftrightarrow$$

$$2-\frac{t}{2}=-4\Leftrightarrow$$

$$\frac{t}{2}=6\Leftrightarrow t=12.$$

Συνεπώς μετά από 12 χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,3)$ και $\mathrm{B}(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

(Μονάδες 7)

Αν $\alpha=5$ και $\beta=-7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>4^x-3$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$, οπότε:

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 2^1+\beta=3 \\ \alpha\cdot 2^2+\beta=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=13 \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\alpha=10 \\ 2\alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=-7. \end{cases}$$

β) Για $\alpha=5$ και $\beta=-7$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=5\cdot 2^x-7$ και για $x=0$ έχουμε $f(0)=5\cdot 2^0-7=5\cdot 1-7=-2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-2)$.

γ) Παρατηρούμε ότι για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,έχουμε

$$2^{x_1}<2^{x_2} \Leftrightarrow$$
$$5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow$$
$$5\cdot 2^{x_1}-7<5\cdot 2^{x_2}-7 \Leftrightarrow$$
$$f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η $f(x)=5\cdot 2^x-7$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

δ) Έχουμε

$$f(x)>4^x-3 \Leftrightarrow$$
$$5\cdot 2^x-7>\left(2^x\right)^2-3 \overset{2^x=y}{\Leftrightarrow}$$
$$y^2-5y+4<0 \qquad (1).$$

Το τριώνυμο y^2-5y+4 έχει ρίζες $y_1=4$, $y_2=1$ (διότι $1+4=5=S$ και $1\cdot 4=4=P$). Η ανίσωση (1) αληθεύει για $1<y<4$, δηλαδή:

$$1<2^x<4 \Leftrightarrow 2^0<2^x<2^2 \Leftrightarrow 0<x<2.$$

Τελικά η ανίσωση $f(x)>4^x-3$ αληθεύει για $x\in(0,2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $a \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)+f(x+1)=14$$

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η εκθετική συνάρτηση πρέπει η βάση

$$\frac{a}{a+5}>0 \Leftrightarrow a(a+5)>0 \Leftrightarrow a \in (-\infty,-5) \cup (0,+\infty).$$

Επιπλέον πρέπει $\frac{a}{a+5} \neq 1$. Όμως, αν $\frac{a}{a+5}=1 \Leftrightarrow a=a+5 \Leftrightarrow 0=5$, το οποίο δε συμβαίνει για κανέναν πραγματικό αριθμό α.

β) Για να είναι η συνάρτηση γνησίως αύξουσα πρέπει

$$\frac{\alpha}{a+5}>1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+5}-1>0 \Leftrightarrow \frac{a-a-5}{a+5}>0 \Leftrightarrow -\frac{5}{a+5}>0 \Leftrightarrow a+5<0 \Leftrightarrow a<-5.$$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα όταν $a<-5$.

Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του $\alpha=-6$, για την οποία η συνάρτηση f είναι εκθετική και γνησίως αύξουσα και γίνεται $f(x)=\left(\frac{-6}{-6+5}\right)^x=6^x$.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x)+f(x+1)=14 \Leftrightarrow 6^x+6^{x+1}=14 \Leftrightarrow 6^x+6\cdot 6^x=14 \Leftrightarrow 7\cdot 6^x=14 \Leftrightarrow 6^x=2 \Leftrightarrow x=\log_6 2.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3{,}26$ έτη φωτός $= 30{,}9 \cdot 10^{12}\, Km$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

(Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1{,}157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

(Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d.

(Μονάδες 7)

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος $0{,}46$ και απόλυτο μέγεθος $-5{,}14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Θέλουμε να είναι $m - M < 0 \Leftrightarrow 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right) < 0 \Leftrightarrow log\left(\frac{d}{10}\right) < 0 \Leftrightarrow log\left(\frac{d}{10}\right) < log1$

επομένως $\frac{d}{10} < 1 \Leftrightarrow d < 10$, αφού η συνάρτηση $f(x) = logx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Έχουμε $M = m - 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right) = 1{,}157 - 5 \cdot log\left(\frac{100}{10}\right) =$

$= 1{,}157 - 5 \cdot log10 = 1{,}157 - 5 = -3{,}843.$

γ) Είναι $log\left(\frac{d}{10}\right) = \frac{m-M}{5} \Leftrightarrow \frac{d}{10} = 10^{\frac{m-M}{5}}$, άρα $d = 10 \cdot 10^{\frac{m-M}{5}} = 10^{1+\frac{m-M}{5}} = 10^{\frac{5+m-M}{5}}$.

δ) Με χρήση της παραπάνω σχέσης, έχουμε

$d = 10^{\frac{5+0{,}46+5{,}14}{5}} = 10^{\frac{10{,}6}{5}} = 10^{\frac{53}{25}} = \sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$ parsec.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να λύσετε την εξίσωση $x\left(e^x-1\right)=0$

(Μονάδες 03)

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x\left(e^x-1\right)$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x\left(e^x-1\right)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

(Μονάδες 06)

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x\left(e^x-1\right)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε:

$$x\left(e^x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } e^x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } e^x=1$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } e^x=e^0$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

ii. Από το ερώτημα (i) γνωρίζουμε ότι κάθε παράγοντας του γινομένου $x\left(e^x-1\right)$ έχει ρίζα το 0. Ακόμη είναι $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$ και $e^x-1<0 \Leftrightarrow x<0$. Ο προσδιορισμός του προσήμου του γινομένου $x\left(e^x-1\right)$ γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$		$+$
e^x-1	$-$		$+$
$x\left(e^x-1\right)$	$+$		$+$

Ώστε το γινόμενο $x\left(e^x-1\right)$ είναι θετικό για κάθε $x\neq 0$.

β)

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνες τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $x\left(e^x-1\right)\geq 0$. Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι $x\left(e^x-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

ii. Είναι

$$f(0)=\sqrt{0\cdot\left(e^0-1\right)}=0$$

$$f(\ln 2)=\sqrt{\ln 2\cdot\left(e^{\ln 2}-1\right)}=\sqrt{\ln 2\cdot(2-1)}=\sqrt{\ln 2}$$

$$f(-\ln 2)=\sqrt{-\ln 2\cdot\left(e^{-\ln 2}-1\right)}=\sqrt{-\ln 2\cdot\left(e^{\ln\frac{1}{2}}-1\right)}=\sqrt{-\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}=\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$$

iii. Επειδή ισχύει $-\ln 2<0$ και $f(-\ln 2)>f(0)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή ισχύει $0<\ln 2$ και $f(0)<f(\ln 2)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Τελικά, ο ισχυρισμός « η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x(e^x-1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της» είναι ψευδής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

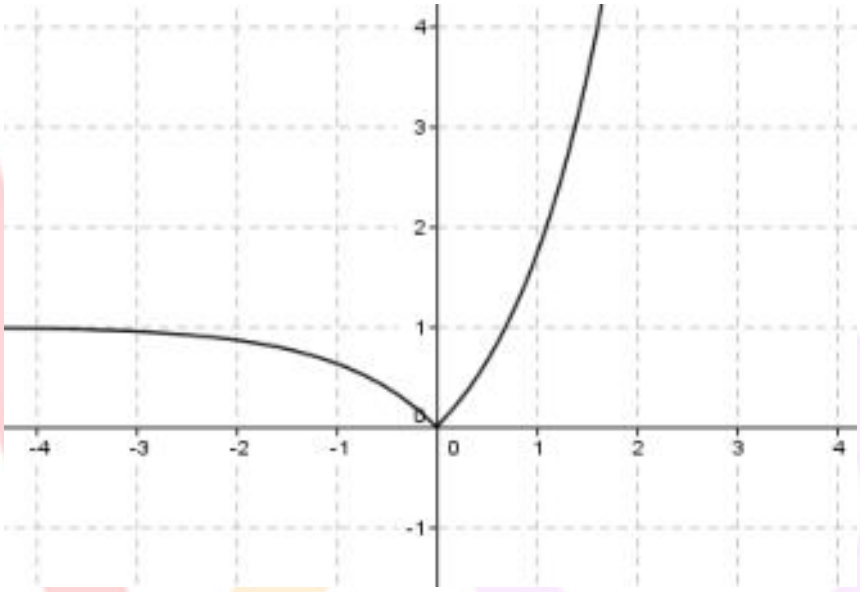
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=|e^x-1|, x\in\mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y=\alpha$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

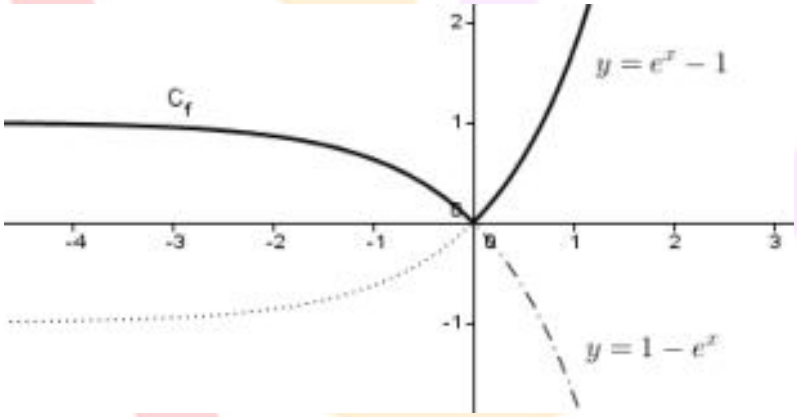
α) Ισχύει:

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0 .$$

Έτσι, ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0 \\ 1 - e^x, & x < 0 \end{cases}$$

Αν μεταφέρουμε μια μονάδα προς τα κάτω τη γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$, προκύπτει η γραφική παράσταση της $g_1(x) = e^x - 1$, ενώ αν μεταφέρουμε μια μονάδα προς τα πάνω την γραφική παράσταση της $h(x) = -e^x$, προκύπτει η γραφική παράσταση της $h_1(x) = 1 - e^x$. Σύμφωνα με τον απλοποιημένο τύπο, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της γραφικής παράστασης της g_1 που είναι από τον άξονα $y'y$ και δεξιά και το τμήμα της h_1 που είναι από τον άξονα $y'y$ και αριστερά, οπότε προκύπτει το σχήμα της εκφώνησης.



β) Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι αυτή είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και
- παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$

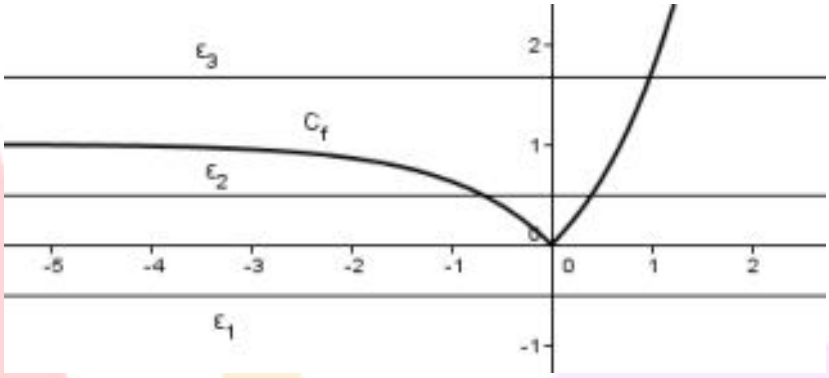
γ) Είναι:

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |e^x - 1| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x - 1 = \frac{1}{2} \text{ ή } e^x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{3}{2} \text{ ή } e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{3}{2} \text{ ή } x = \ln\frac{1}{2}$$

δ) Είναι γνωστό ότι το σύνολο τιμών της $y = e^x$ είναι το $(0, +\infty)$. Έτσι, για $x \le 0$ έχουμε $0 < e^x \le 1$, οπότε $-1 < e^x - 1 \le 0$, άρα $0 \le f(x) < 1$.

Σχετικά με το πλήθος των κοινών σημείων, με τη βοήθεια του σχήματος, διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:



- Αν $\alpha < 0$, (ευθεία ε_1) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.
- Αν $\alpha = 0$, τότε η C_f και η ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Αν $0 < \alpha < 1$, (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.
- Αν $\alpha \ge 1$, (ευθεία ε_3) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ένα κοινό σημείο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο $(1W/m^2)$. Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12}\ w/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100\ w/m^2$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

(Μονάδες 10)

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $D = 10 \cdot log\left(\frac{100}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot log(10^2 \cdot 10^{12}) = 10 \cdot log(10^{14}) = 10 \cdot 14 = 140$ Db.

β) Είναι $D_2 - D_1 = 20$, οπότε $10 \cdot log\left(\frac{I_2}{10^{-12}}\right) - 10 \cdot log\left(\frac{I_1}{10^{-12}}\right) = 20$, άρα

$log(10^{12} I_2) - log(10^{12} I_1) = 2 \Leftrightarrow log\left(\frac{10^{12} I_2}{10^{12} I_1}\right) = 2 \Leftrightarrow log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^2$.

Ώστε $I_2 = 100 \cdot I_1$.

γ) Έχουμε $120 = 10 \cdot log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Leftrightarrow 12 = log(I \cdot 10^{12}) \Leftrightarrow 10^{12} = I \cdot 10^{12} \Leftrightarrow I = 1\ w/m^2$

.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες Χ, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λ.π.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda > 0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

(Μονάδες 3)

β) Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1{,}4\ m^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $ln2 = 0{,}7$)

(Μονάδες 12)

γ) Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος $10\ m$ η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξτε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_o \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αν υπάρχει τέτοιο βάθος, θα έχουμε $I = 0 = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, άρα $e^{-\lambda h} = 0$, το οποίο δεν είναι αποδεκτό, αφού είναι $e^x > 0$, για κάθε $x \in R$.

β) Θέλουμε να ισχύει $I \leq \frac{1}{4} I_0$, άρα $I_0 \cdot e^{-\lambda h} \leq \frac{1}{4} I_0 \Leftrightarrow e^{-\lambda h} \leq \frac{1}{4}$ οπότε έχουμε

$-\lambda h \leq ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow -\lambda h \leq -ln4 \Leftrightarrow h \geq \frac{ln4}{1{,}4m^{-1}} = \frac{2ln2}{1{,}4} m = \frac{2 \cdot 0{,}7}{1{,}4} = 1m.$

Άρα σε βάθος τουλάχιστον ενός μέτρου δεν υπάρχει η συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής.

γ) Για το συγκεκριμένο μέσο έχουμε ότι για $h = 10m$ ισχύει $I = \frac{1}{2} I_0$, άρα $I_0 \cdot e^{-10\lambda} = \frac{1}{2} I_0$.

Έτσι, παίρνουμε $e^{-10\lambda} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow \left(e^{-\lambda}\right)^{10} = 2^{-1} \Leftrightarrow e^{-\lambda} = \sqrt[10]{2^{-1}} = 2^{-\frac{1}{10}}$.

Ώστε $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h} = I_0 \cdot \left(e^{-\lambda}\right)^h = I_0 \cdot \left(2^{-\frac{1}{10}}\right)^h = I_o \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = -192\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}}\right) + 576,$$

με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος ΟΚ της αψίδας είναι $192\ m$.

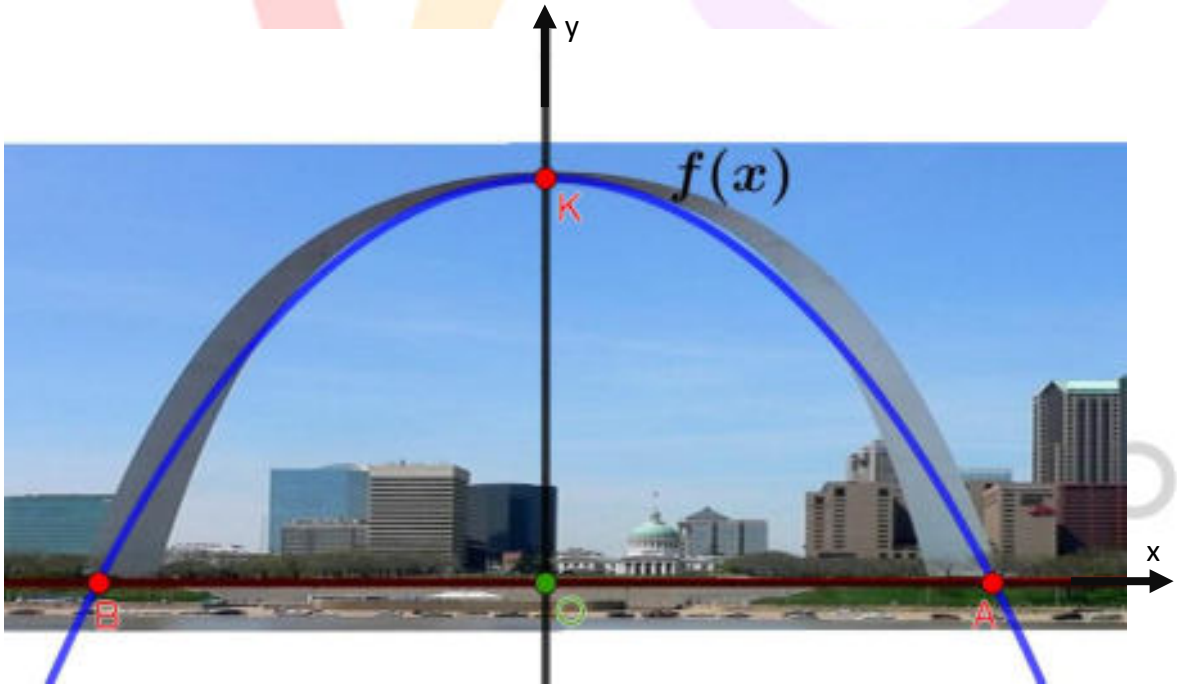
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox. Δίνεται ότι $ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0{,}96$.

(Μονάδες 13)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της ΟΚ.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Το ύψος (OK)είναι η τεταγμένη του σημείου στο οποίο τέμνει τον άξονα $y'y$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης, δηλαδή ο αριθμός:

$f(0) = 576 - 192(e^0 + e^0) = 576 - 2 \cdot 192 = 192\ m.$

β) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$, είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία ισοδύναμα γράφεται:

$192\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}}\right) = 576 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}} + \frac{1}{e^{\frac{x}{100}}} = 3.$

Θέτοντας $e^{\frac{x}{100}} = y$, παίρνουμε την εξίσωση $y + \frac{1}{y} = 3$, η οποία γράφεται ισοδύναμα:

$y^2 + 1 = 3y \Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 = 0$, με διακρίνουσα $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$, οπότε

$y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, αφού το σημείο Α βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Ox, οπότε $x > 0$, άρα

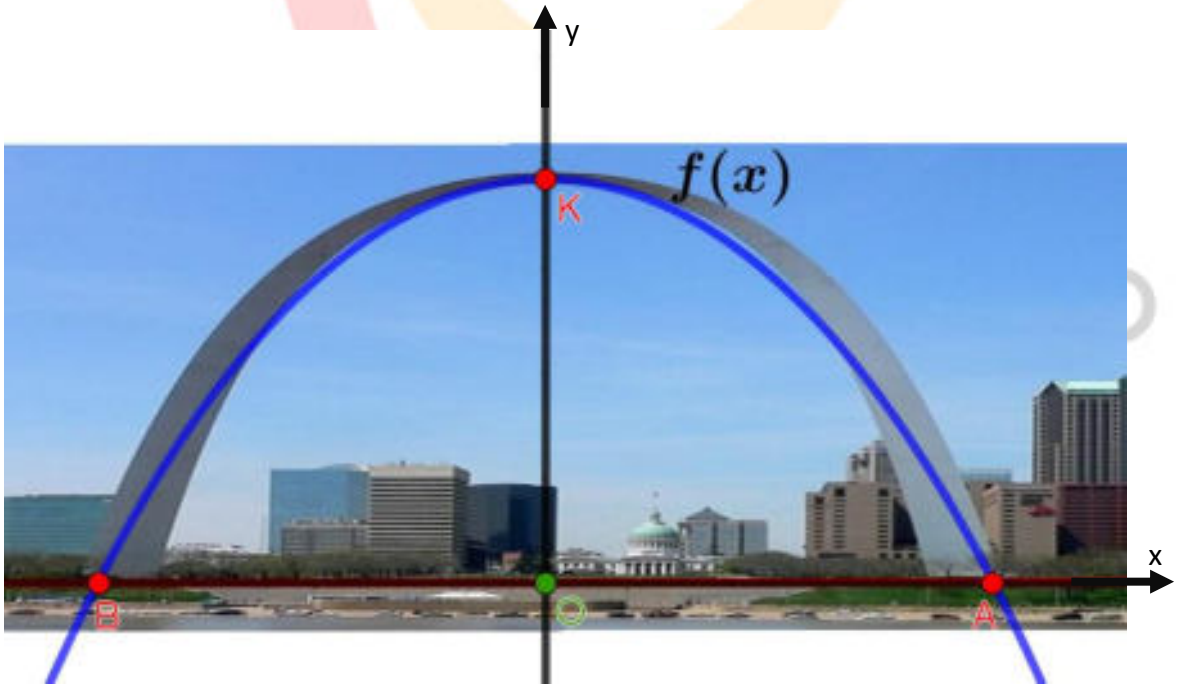
$\frac{x}{100} > 0 \Leftrightarrow y = e^{\frac{x}{100}} > e^0 = 1.$

Η άλλη ρίζα $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ είναι μικρότερη του 1, καθώς $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} < 2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{5}$, αληθές.

Άρα, $e^{\frac{x}{100}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, άρα $\frac{x}{100} = ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0{,}96.$

Έτσι, $x = 96\ m$, οπότε $A(96{,}0)$.

γ) Το σημείο Β έχει θα έχει τετμημένη -96, άρα θα είναι $(AB) = 96 \cdot 2 = 192\ m = (OK)$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$\varphi(x) = \sqrt{x}$, με $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, με $x \geq 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 08)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ.

i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 02)

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

(Μονάδες 04)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 06)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{ln10 - 1} > \frac{1+ln10}{3}$.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\begin{cases} y = f(x), & x \geq 1 \\ y = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \\ y = \frac{x+1}{3} \end{cases}$.

Επομένως προκύπτει η εξίσωση $\sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3}$, $x \geq 1$, η οποία ισοδύναμα γίνεται:

$$3\sqrt{x-1} = x+1 \overset{x \geq 1}{\Longleftrightarrow} 9(x-1) = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$ και οι ρίζες της εξίσωσης

$x_1, x_2 = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 5.$

Για $x = 2$, είναι $y = \frac{2+1}{3} = 1.$

Για $x = 5$, είναι $y = \frac{5+1}{3} = 2.$

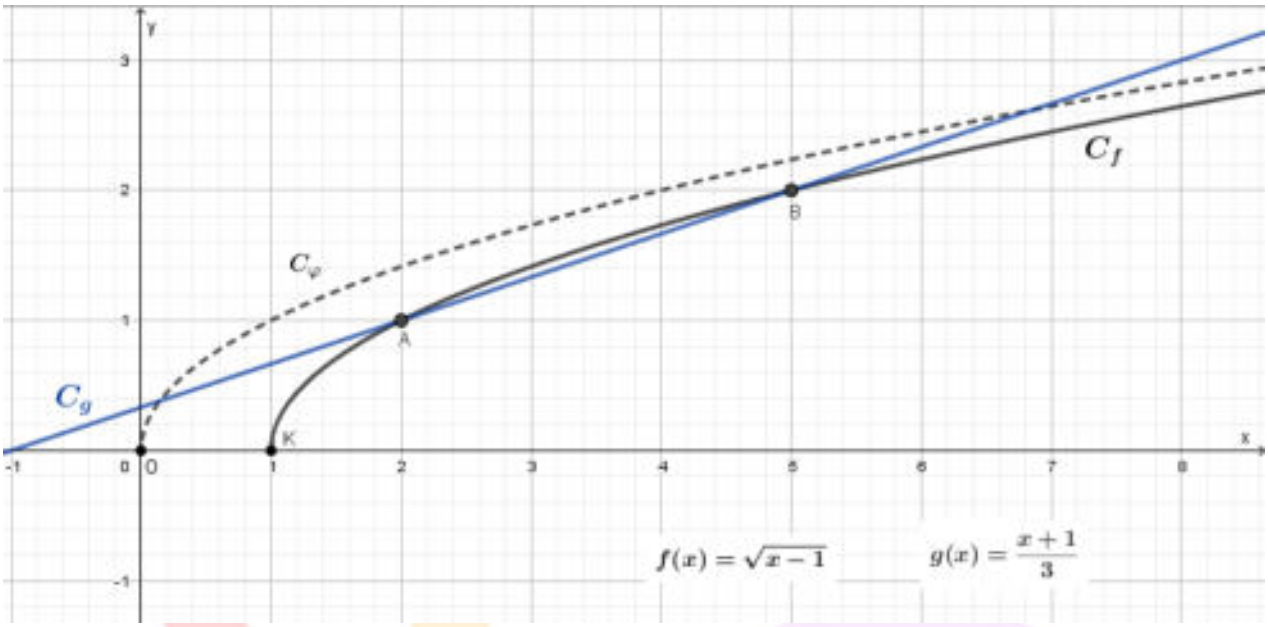
Επομένως, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, είναι το $A(2,1)$ και το $B(5,2)$.

β)

i. Επειδή $f(x) = \varphi(x-1)$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ κατά μία μονάδα προς τα δεξιά. Έτσι, το σημείο $O(0,0)$ θα μεταφερθεί στο σημείο $K(1,0)$.

ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι ευθεία, οπότε για τον σχεδιασμό της χρειάζονται δύο σημεία της. Επιλέγουμε τα σημεία $A(2,1)$ και $B(5,2)$, τα οποία είναι και τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, είναι οι ακόλουθες:

νέο φροντιστήριο



γ) Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g όταν $x\epsilon(2,5)$.

Εναλλακτική – αλγεβρική – προσέγγιση:

Επιλύουμε την ανίσωση $\sqrt{x-1} > \frac{x+1}{3}$, με $x \geq 1$.

Ακολουθώντας τα βήματα επίλυσης της αντίστοιχης εξίσωσης που έγιναν στο α) ερώτημα, έχουμε:

$$3\sqrt{x-1} > x+1 \overset{x\geq 1}{\Longleftrightarrow} 9(x-1) > x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-7x+10 < 0$$

Αφού ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός και $x_1 = 2,\ x_2 = 5$, έχουμε ότι το τριώνυμο είναι αρνητικό όταν το x βρίσκεται μεταξύ των ριζών του. Επομένως $x\epsilon(2,5)$.

δ) Είναι: $\sqrt{ln10-1} > \frac{1+ln10}{3} \Leftrightarrow f(ln10) > g(ln10)$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $2 < ln10 < 5 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} e^2 < e^{ln10} < e^5 \Leftrightarrow e^2 < 10 < e^5$.

Πραγματικά είναι: $e < 3 \Leftrightarrow e^2 < 3^2 < 10$ και $e > 2 \Leftrightarrow e^5 > 2^5 > 10$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 03)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 06)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $\Gamma(x, lnx)$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα, είναι:

$$|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Επομένως $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Είναι: $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$.

Έτσι για κάθε $x \in D_f$ το $-x \in D_f$ και ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Επομένως η συνάρτηση είναι άρτια και ως εκ τούτου συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

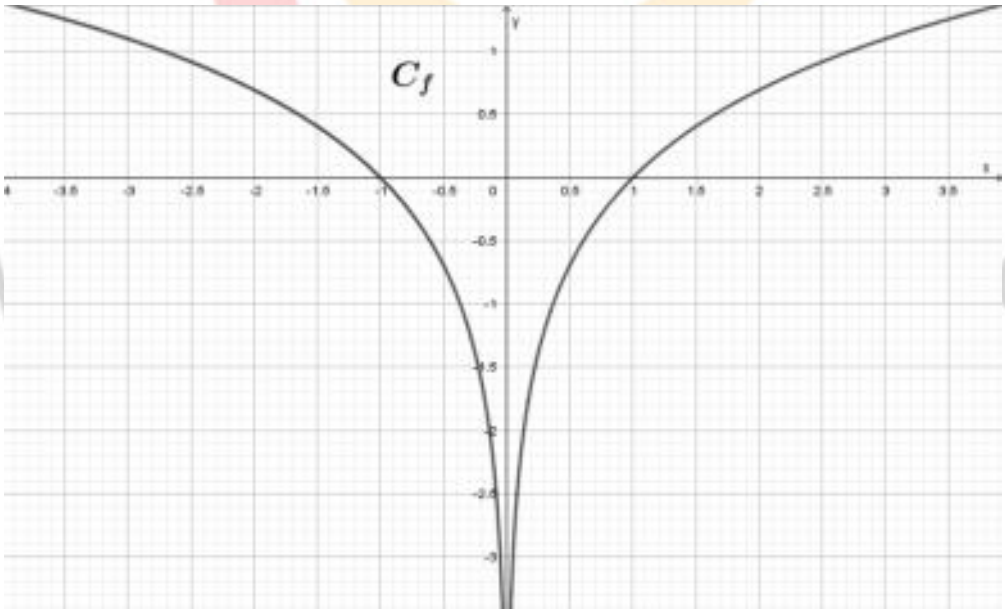
γ) Είναι: $f(x) = ln|x| = \begin{cases} lnx, & \text{αν } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από δύο κλάδους.

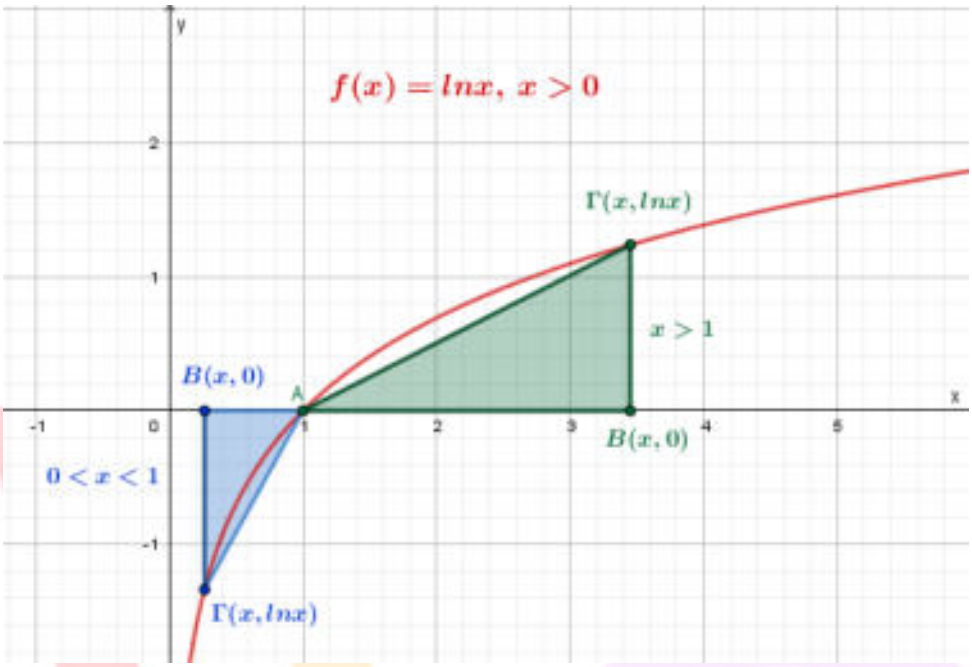
Αν $x > 0$, τότε έχουμε τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = lnx$.

Αν $x < 0$, παίρνουμε την συμμετρική καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = lnx$ ως προς τον άξονα $y'y$.

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η ακόλουθη:



δ) Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- Αν $x > 1$:

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma)$, όπου $(AB) = |x-1| = x-1$ και $(B\Gamma) = |lnx| = lnx$.

Άρα $(AB\Gamma) = \frac{(x-1)lnx}{2}$.

- Αν $0 < x < 1$:

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma)$, όπου $(AB) = |x-1| = 1-x$ και $(B\Gamma) = |lnx| = -lnx$.

Άρα $(AB\Gamma) = \frac{(x-1)lnx}{2}$.

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι:

$$E(x) = \frac{(x-1)lnx}{2},\quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ, σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t, σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους $100^o\ C$ και στη συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία $30^o\ C$. Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι $80^o\ C$.

α) Να αποδείξετε ότι $k = -0{,}0672$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\theta(t) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά.

(Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $ln\left(\frac{5}{7}\right) = -0{,}336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} \cong 0{,}034$.

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε

$\theta_0 = 100^0 C, T = 30^0 C$, ενώ $\theta(5) = 80^0 C$.

Άρα $80^0 = 30^0 + (100^0 - 30^0)e^{5k}$, οπότε $e^{5k} = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}$.

Έτσι, θα έχουμε $5k = ln\left(\frac{5}{7}\right)$.

Τελικά, $k = \frac{-0,336}{5} = -0,0672$.

β) Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι $e^{5k} = \frac{5}{7}$ άρα $(e^k)^5 = \frac{5}{7}$, οπότε $e^k = \left(\frac{5}{7}\right)^{1/5}$.

Άρα $\theta(t) = 30 + (100 - 30)(e^k)^t = 30 + 70 \cdot \left[\left(\frac{5}{7}\right)^{1/5}\right]^t = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$.

Εναλλακτικά, $\theta(t) = 30 + (100 - 30)e^{5kt/5} = 30 + 70 \cdot (e^{5k})^{t/5} = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$.

γ) Ζητάμε τον αριθμό $\theta(100) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{20} = 30 + 70 \cdot \left[\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\right]^2 \cong 30 + 70 \cdot (0,034)^2$

$= 30 + 70 \cdot 0,001156 = 30 + 0,08092 \cong 30,08^o C$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1}-x>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x)+g(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

(Μονάδες 04)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι $-x > 0$ και $\sqrt{x^2+1} > 0$, οπότε $\sqrt{x^2+1} - x > 0$.

ii. Για να βρούμε τα ζητούμενα διαστήματα αρκεί να επιλύσουμε την $f(x) > 0$ με $x \in \mathbb{R}$.

- Από το ερώτημα (i) γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ ισχύει $\sqrt{x^2+1} - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$.
- Ακόμη, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1} - x > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 > x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+1 > x^2 \\ &\Leftrightarrow 1 > 0, \text{ που ισχύει.}\end{aligned}$$

Τελικά, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

<u>β τρόπος</u>

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > |x|$, όμως $|x| \geq x$, άρα $\sqrt{x^2+1} > |x| \geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $g(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned}g(-x) + g(x) &= \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1} - (-x)\right) \\ &= \ln\left(\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\right) \\ &= \ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2\right) = \\ &= \ln\left(x^2+1-x^2\right) \\ &= \ln 1 = 0\end{aligned}$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

- $-x \in \mathbb{R}$ και
- από το προηγούμενο υποερώτημα ισχύει ότι $g(-x)+g(x)=0 \Leftrightarrow g(-x)=-g(x)$.

Άρα η συνάρτηση g είναι περιττή και έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1}>0$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

(Μονάδες 03)

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

(Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -1$.

Είναι $\frac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 2$.

Τελικά $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

β)

i. Η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0$.

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι: $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα αν και μόνο αν $0 < \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1$.

Από το ερώτημα (i) έχουμε ότι: $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

Ακόμη είναι:

$$\frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha-2}{\alpha+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-2-1(\alpha+1)}{\alpha+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{\alpha+1} < 0 \Leftrightarrow \alpha+1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1.$$

Οι παραπάνω ανισώσεις συναληθεύουν για $\alpha \in (2, +\infty)$. Επομένως για $\alpha \in (2, +\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Ισχύει $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0$.

- Αν $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} > 1$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν $0 < \frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Αν ισχύει $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} = 1$, η f είναι σταθερή αφού $f(x) = 1^x = 1$.

  Τότε $\frac{\alpha-2}{\alpha+1} = 1 \Rightarrow \alpha - 2 = \alpha + 1 \Rightarrow 0\alpha = 3$, αδύνατη.

Τελικά, δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = e^{\kappa x},\ \kappa \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι αν $\kappa > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

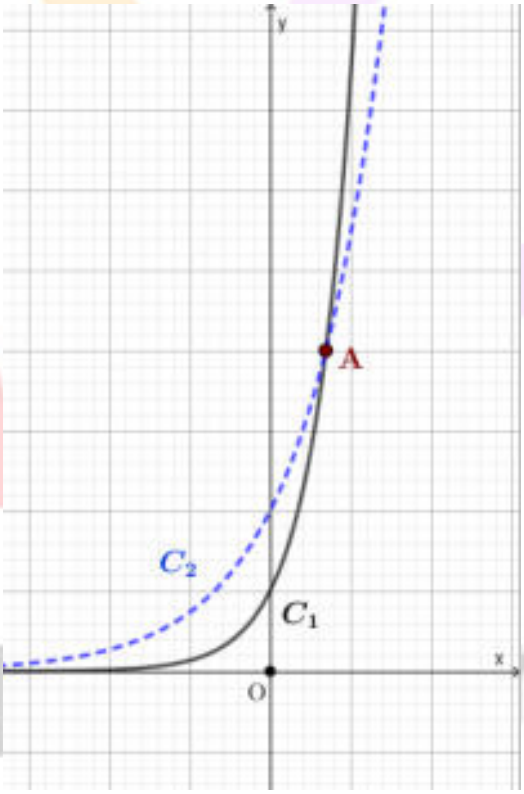
γ)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^{x}$.

(Μονάδες 05)

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^{x}$ και $k(x) = e^{2x}$.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου Α;



(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$f(1)-f(0)\geq f(0)-f(-1)\Leftrightarrow e^{\kappa}-1\geq 1-e^{-\kappa}\Leftrightarrow e^{\kappa}-1\geq 1-\frac{1}{e^{\kappa}}\Leftrightarrow$

$e^{2\kappa}-e^{\kappa}\geq e^{\kappa}-1\Leftrightarrow e^{2\kappa}-2e^{\kappa}+1\geq 0\Leftrightarrow (e^{\kappa}-1)^2\geq 0$, η οποία ισχύει πάντα.

Η ισότητα ισχύει, όταν $e^{\kappa}-1=0\Leftrightarrow e^{\kappa}=1\Leftrightarrow \kappa=0$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

<u>1ος τρόπος</u>:

Αφού $\kappa>0\overset{e^x\uparrow}{\Longrightarrow}e^{\kappa}>1$ και η συνάρτηση γράφεται $f(x)=e^{\kappa x}=(e^{\kappa})^x$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

<u>2ος τρόπος</u>:

Έστω $\kappa>0$ και $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Τότε $\kappa\cdot x_1<\kappa\cdot x_2\overset{e^x\uparrow}{\Longrightarrow}e^{\kappa\cdot x_1}<e^{\kappa\cdot x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ)

i. Είναι:

$$e^{2x}>2e^x\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x>0\Leftrightarrow e^x(e^x-2)>0\overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow}e^x-2>0\Leftrightarrow$$

$$e^x>2\Leftrightarrow e^x>e^{ln2}\Leftrightarrow x>ln2.$$

ii. Το σημείο τομής των δύο καμπυλών προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης

$$e^{2x}=2e^x\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x=0\Leftrightarrow e^x(e^x-2)=0\overset{e^x\neq 0}{\Longleftrightarrow}e^x-2=0\Leftrightarrow$$

$$e^x=2\Leftrightarrow e^x=e^{ln2}\Leftrightarrow x=ln2,$$

και $\varphi(ln2)=2e^{ln2}=2\cdot 2=4$

Επομένως, το σημείο τομής των δύο καμπυλών είναι το $A(ln2,4)$.

Από την ισοδυναμία $e^{2x}>2e^x\Leftrightarrow x>ln2$, προκύπτει ότι η καμπύλη C_1 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $k(x)=e^{2x}$, ενώ η C_2 απεικονίζει γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x)=2e^x$.

ΘΕΜΑ 4

Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	$0\ ντεσιμπέλ$
Θρόισμα φύλλων	$10\ ντεσιμπέλ$
Συνήθης ψίθυρος	$20\ ντεσιμπέλ$
Αθόρυβο αυτοκίνητο	$50\ ντεσιμπέλ$
Συνήθης ομιλία	$65\ ντεσιμπέλ$
Κυκλοφοριακή κίνηση	$80\ ντεσιμπέλ$
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	$90\ ντεσιμπέλ$
Όριο πόνου	$120\ ντεσιμπέλ$
Αεριωθούμενο	$140\ ντεσιμπέλ$

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.

(Μονάδες 08)

β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι 1 W/m^2 να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.

(Μονάδες 07)

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0{,}3$).

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Απο τον πίνακα φαίνεται οτι $D = 10$. Άρα έχουμε:

$$10 = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I) \Leftrightarrow \log(10^{12} \cdot I) = 1 \Leftrightarrow 10^{12} \cdot I = 10 \Leftrightarrow I = \frac{10}{10^{12}} \Leftrightarrow I = 10^{-11}$$

Επομένως, η ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων είναι $10^{-11}\, W/m^2$.

β) Αφού $I = 1$, έχουμε:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 1) = 10 \cdot \log(10^{12}) = 10 \cdot 12 \cdot \log 10 = 120 \cdot 1 = 120$$

Επομένως, η ηχοστάθμη είναι 120 ντεσιμπέλ, δηλαδή αγγίζει το όριο του πόνου.

γ) Αν I είναι η αρχική ένταση του ήχου, τότε $D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$ είναι η αντίστοιχη ηχοστάθμη και για την D' έχουμε:

$$D' = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 2\, I) = 10 \cdot [\log(2 \cdot 10^{12} \cdot I)] = 10 \cdot [\log 2 + \log(10^{12} \cdot I)] =$$

$$= 10 \cdot \log 2 + 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I) = 10 \cdot 0{,}3 + D = 3 + D$$

Επομένως, η ένταση του ήχου θα αυξηθεί κατά 3 ντεσιμπέλ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|},\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

(Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x) = συνx,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, διότι:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το $-x \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$e^{|x|} \geq e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Longleftrightarrow} |x| \geq 0,$$

η οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Επομένως, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ και η ελάχιστη τιμή της είναι η $f(0) = 1$.

γ) Αν $x \geq 0$, τότε $|x| = x$ και $f(x) = e^x$.

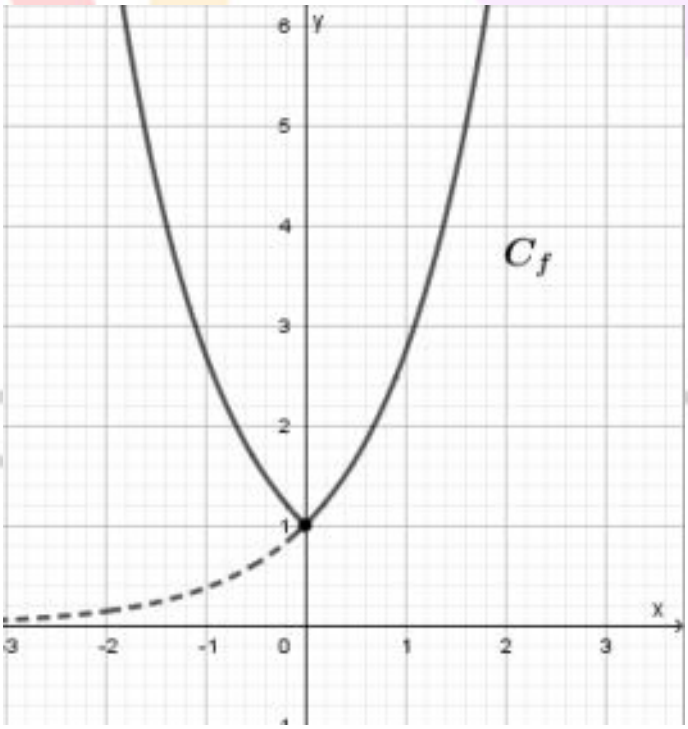
Αν $x < 0$, τότε $|x| = -x$ και $f(x) = e^{-x}$.

Έτσι προκύπτει η δίκλαδη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$, η οποία σύμφωνα με το ερώτημα α) είναι άρτια. Οπότε είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Επομένως, αποτελείται από την γραφική παράσταση της $h(x) = e^x$, $x \geq 0$ και την συμμετρική της h ως προς τον άξονα $y'y$ για $x < 0$.

Επιπλέον, από το ερώτημα β) γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ και η ελάχιστη τιμή της είναι η $f(0) = 1$.

Επομένως η γραφική παράσταση της f δίνεται από το παρακάτω σχήμα:

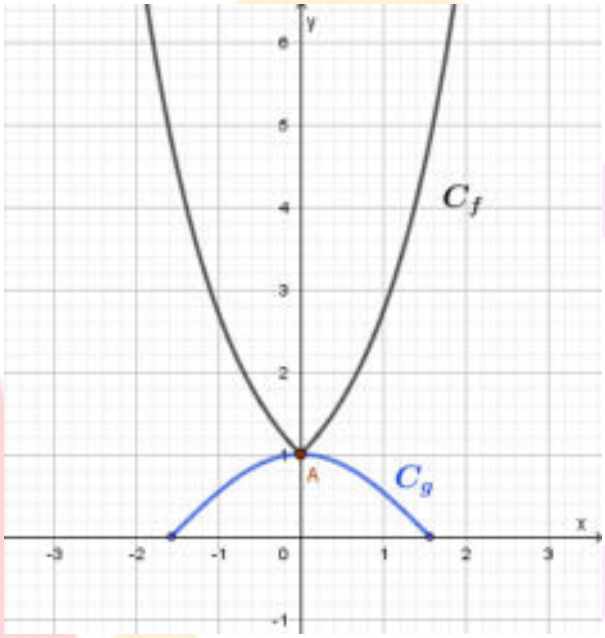


δ) Έχουμε αποδείξει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Για την συνάρτηση $g(x) = συνx,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ γνωρίζουμε ότι έχει μέγιστη τιμή το 1 στη θέση $x = 0$. Επομένως, είναι $g(x) \leq 1 \leq f(x)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Ως εκ τούτου, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A(0,1)$.

Τα παραπάνω φαίνονται στο επόμενο σχήμα:



ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο A.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Οι λύσεις τις εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Έχουμε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow$$
$$4^x=2^x-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$
$$4\cdot\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x+1=0\overset{y=2^x}{\Leftrightarrow}$$
$$4y^2-4y+1=0\Leftrightarrow$$
$$(2y-1)^2=0\Leftrightarrow$$
$$y=\frac{1}{2}.$$

Άρα

$$2^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$2^x=2^{-1}\Leftrightarrow$$
$$x=-1.$$

Οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $\mathrm{A}\left(-1,\frac{1}{4}\right)$, αφού $f(-1)=g(-1)=\frac{1}{4}$.

β) Θα δείξουμε ότι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\neq -1$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x)>g(x)\Leftrightarrow$$
$$4^x>2^x-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$
$$4\cdot\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x+1>0\overset{y=2^x}{\Leftrightarrow}$$
$$4y^2-4y+1>0\Leftrightarrow$$
$$(2y-1)^2>0.$$

που ισχύει για κάθε για κάθε πραγματικό αριθμό $y\neq\frac{1}{2}$, δηλαδή για κάθε πραγματικό αριθμό x για τον οποίο ισχύει:

$2^x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2^x \neq 2^{-1} \Leftrightarrow$

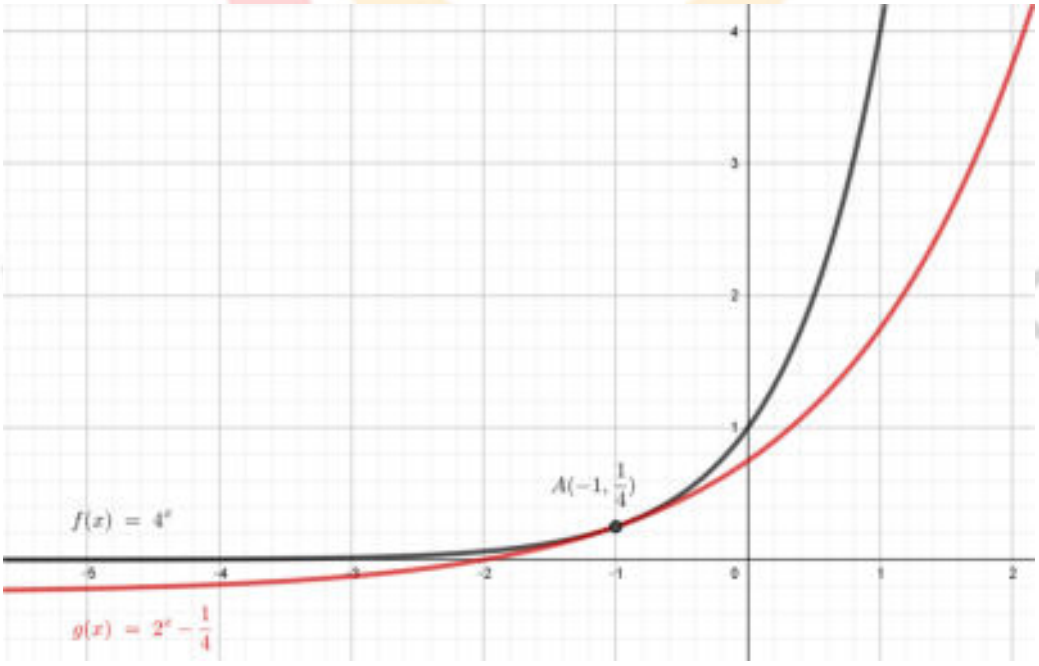
$x \neq -1.$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο $A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$.

γ) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g. Να σημειώσουμε ότι η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = 2^x$ κατά $\frac{1}{4}$ μονάδες προς τα κάτω και με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών.

x	-2	-1	0	1
$f(x) = 4^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4

x	-2	-1	0	1
$g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$



ΘΕΜΑ 4

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα ήταν $P(0)=200\cdot e^{c\cdot 0}=200$ βακτήρια.

β) Έχουμε:

$$P(1)=328 \Leftrightarrow 200\cdot e^{c\cdot 1}=328 \Leftrightarrow e^{c}=\frac{328}{200} \Leftrightarrow e^{c}=1,64 \Leftrightarrow c=\ln\left(1,64\right) \Leftrightarrow c=0,5.$$

Άρα $c=\frac{1}{2}$.

γ) Ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής, δηλαδή

$$\begin{aligned}
&10\cdot P(0)<P(t)<100\cdot P(0) \Leftrightarrow\\
&10\cdot 200<200\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot t}<100\cdot 200 \Leftrightarrow\\
&10<e^{\frac{1}{2}\cdot t}<100 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}\\
&\ln 10<\ln(e^{\frac{1}{2}\cdot t})<\ln 100 \Leftrightarrow\\
&\ln 10<\frac{1}{2}\cdot t<\ln 10^{2} \Leftrightarrow\\
&2\cdot\ln 10<t<4\cdot\ln 10 \Leftrightarrow\\
&2\cdot 2,3<t<4\cdot 2,3 \Leftrightarrow\\
&4,6<t<9,2.
\end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο χρονικό διάστημα (σε ώρες) είναι $4,6<t<9,2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1^{ης} και στο τέλος της 2^{ης} εβδομάδας.

(Μονάδες 8)

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t)=V_0\cdot\alpha^t$, όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t)=10\cdot(0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0,5)\simeq-0,3$ και $\log(0,85)\simeq-0,07$).

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της $1^{ης}$ εβδομάδας είναι: $10-\frac{15}{100}\cdot 10=10\cdot(1-0,15)=10\cdot 0,85=8,5$ λίτρα.

Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της $2^{ης}$ εβδομάδας είναι: $(10\cdot 0,85)-\frac{15}{100}\cdot(10\cdot 0,85)=(10\cdot 0,85)\cdot(1-0,15)=10\cdot(0,85)^2=7,225$ λίτρα.

β) Η αρχική ποσότητα του υγρού στο δοχείο (δηλαδή η ποσότητα τη χρονική στιγμή $t=0$) είναι 10 λίτρα, οπότε $V(0)=V_0=10$.

Από το α) ερώτημα, ο όγκος V του υγρού μετά από 1 εβδομάδα είναι $V(1)=10\cdot 0,85 \Leftrightarrow V_0\cdot\alpha^1=10\cdot 0,85 \Leftrightarrow 10\cdot\alpha=10\cdot 0,85 \Leftrightarrow \alpha=0,85.$

γ) Θα βρούμε μετά από πόσες εβδομάδες ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής, δηλαδή θα βρούμε τις τιμές του t ώστε:

$$V(t)<\frac{V_0}{2}\Leftrightarrow$$
$$10\cdot(0,85)^t<\frac{10}{2}\Leftrightarrow$$
$$(0,85)^t<0,5\Leftrightarrow$$
$$\log(0,85)^t<\log(0,5)\Leftrightarrow$$
$$t\cdot(-0,07)<-0,3\Leftrightarrow$$
$$t>\frac{0,3}{0,07}\Leftrightarrow t>\frac{30}{7}\Leftrightarrow t>4\frac{2}{7}.$$

Άρα μετά από $4\frac{2}{7}$ εβδομάδες (4 εβδομάδες και 2 ημέρες) ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΘΕΜΑ 4

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_o είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t)=Q_o e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t'=-\frac{\ln 2}{c}$.

(Μονάδες 8)

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο

$$Q(t)=Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

(Μονάδες 8)

γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακας -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$Q(t') = \frac{1}{2}Q_o \Leftrightarrow Q_o e^{ct'} = \frac{1}{2}Q_o \Leftrightarrow e^{ct'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ct' = \ln\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow ct' = -\ln 2 \Leftrightarrow t' = -\frac{\ln 2}{c}$$

που είναι το ζητούμενο.

β) Για το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 ισχύει $t' = 5730$, οπότε έχουμε

$$-\frac{\ln 2}{c} = 5730 \Leftrightarrow 5730c = -\ln 2 \Leftrightarrow c = -\frac{\ln 2}{5730}$$

οπότε ο τύπος που μας δίνει την ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

γ) Αν στον προηγούμενο τύπο θέσουμε $Q(t) = \frac{25}{100}Q_o = \frac{1}{4}Q_o$, έχουμε:

$$Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} = \frac{1}{4}Q_o \Leftrightarrow e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{5730}t = \ln\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{5730}t = -\ln 4 \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{5730}t = 2\ln 2 \Leftrightarrow t = 11460$$

οπότε το οστό εκτιμάται ότι είναι ηλικίας 11.460 χρόνων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_\alpha = 25^\circ C$, έχει θερμοκρασία $T_o = 73^\circ C$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση

$$T(t) = T_\alpha + ce^{-\kappa t}$$

όπου όπου c , κ κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι $61^\circ C$, τότε:

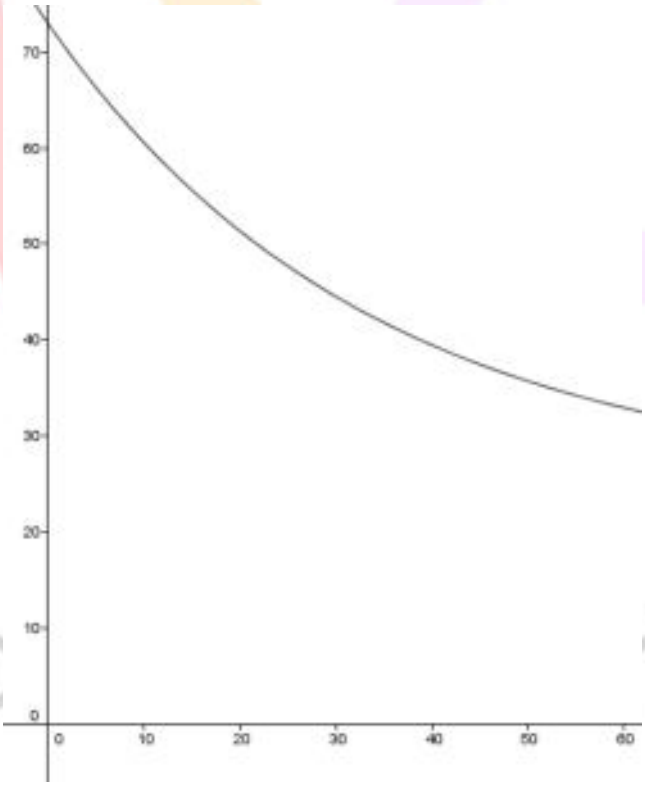
α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την σταθερά κ. (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

(Μονάδες 8)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$).

(Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από $40^\circ C$, να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση

και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$T(0)=T_{\alpha}+ce^{-\kappa\cdot 0}\Leftrightarrow 73=25+ce^{0}\Leftrightarrow 73=25+c\Leftrightarrow c=48$$

β) Δεδομένου ότι $T(10)=61$, έχουμε:

$$61=25+48e^{-10\kappa}\Leftrightarrow 48e^{-10\kappa}=36\Leftrightarrow e^{-10\kappa}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{-10\kappa}=0,75\Leftrightarrow -10\kappa=\ln(0,75)\Leftrightarrow -10\kappa=-0,3\Leftrightarrow \kappa=0,03$$

Επομένως η σταθερά κ είναι ίση με $0,03$.

γ)Η θερμοκρασία $T(40)$ του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμά του είναι

$$T(40)=25+48e^{-0,03\cdot 40}=25+48e^{-1,2}=25+48\cdot 0,3$$

$$=25+14,4=39,4$$

Επομένως η θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμά του είναι $39,4^{o}C$.

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)=25+48e^{-0,3t}$, όπως φαίνεται και στο δοσμένο σχήμα είναι γνησίως φθίνουσα και από το ερώτημα γ) ισχύει $T(40)=39,4$, οπότε αν $T(t_o)=40$, τότε $T(t_o)>T(40)$ και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης παίρνουμε $t_o<40$.

Επομένως, πριν περάσουν 40 λεπτά, η θερμοκρασία του ροφήματος έχει ήδη πέσει κάτω από τους 40° και ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x,\ x>0$ και η ευθεία $\varepsilon: y=2x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της συνάρτησης σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$f(2)+f(4)=\ln 2+3\ln 4=\ln 2+3\ln 2^2=\ln 2+6\ln 2=7\ln 2$$

και

$$\frac{1}{3}f(8)=\frac{1}{3}\cdot 7\ln 8=\frac{1}{3}\cdot 7\ln 2^3=\frac{3}{3}(7\ln 2)=7\ln 2$$

οπότε $f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8)$.

β) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $0<x\le 1$, τότε $x-1\le 0$ και $\ln x\le 0$, οπότε $(x-1)\ln x\ge 0\Rightarrow f(x)\ge 0$.
- Αν $x>1$, τότε $x-1>0$ και $\ln x>0$, οπότε $(x-1)\ln x>0\Rightarrow f(x)>0$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, ισχύει $f(x)\ge 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ) i.Οι τετμημένες των κοινών σημείων προσδιορίζονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=2x-2,\ x>0$. Είναι:

$$f(x)=2x-2\Leftrightarrow (x-1)\ln x=2(x-1)\Leftrightarrow (x-1)(\ln x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } \ln x-2=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=e^2$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι τα κοινά σημεία είναι τα $A(1,0)$ και $B(e^2,2e^2-2)$.

ii. Η C_f είναι κάτω από την ευθεία (ε) για όλες τις θετικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)<2(x-1)$. Είναι:

$$f(x)<2(x-1)\Leftrightarrow (x-1)\ln x-2(x-1)<0\Leftrightarrow (x-1)(\ln x-2)<0$$

Το πρόσημο κάθε παράγοντα και του γινομένου φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(\ln x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από την τελευταία γραμμή του πίνακα συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία (ε) για κάθε x με $x\in(1,e^2)$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx'.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\omega^2+4\omega-12$ έχει ρίζες τις $\omega=2$ και $\omega=-6$. Για $\omega\neq 2$ και $\omega\neq -6$ έχουμε ισοδύναμα

$\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0 \Leftrightarrow \dfrac{(\omega-2)(\omega^2+2\omega+4)}{(\omega-2)(\omega+6)}>0 \Leftrightarrow (\omega^2+2\omega+4)(\omega+6)>0$ και επειδή το τριώνυμο $\omega^2+2\omega+4$ έχει αρνητική διακρίνουσα θα είναι για κάθε $\omega\in\mathbb{R}$ ομόσημο του συντελεστή του ω^2, δηλαδή θετικό, έχουμε τελικά ότι $\omega+6>0 \Leftrightarrow \omega>-6$.

Το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

β) Η συνάρτηση f ορίζεται για τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}>0$. Αν θέσουμε $e^x=\omega$ η τελευταία ανίσωση γίνεται $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ που όπως δείξαμε στο α) αληθεύει για κάθε $\omega\in(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

Συνεπώς θα πρέπει $e^x\neq 2 \Leftrightarrow x\neq \ln 2$ και $e^x>-6$ που ισχύει. Τελικά το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφική παράσταση της f με τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ με $x\neq \ln 2$. Είναι

$$\begin{aligned}
&f(x)=0 \Leftrightarrow\\
&\ln\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}=\ln 1 \Leftrightarrow\\
&\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}=1 \Leftrightarrow\\
&e^{3x}-8=e^{2x}+4e^x-12 \Leftrightarrow\\
&e^{3x}-e^{2x}-4e^x+4=0 \Leftrightarrow\\
&e^{2x}(e^x-1)-4(e^x-1)=0 \Leftrightarrow\\
&(e^x-1)(e^{2x}-4)=0 \Leftrightarrow\\
&(e^x-1)(e^x-2)(e^x+2)=0
\end{aligned}$$

Συνεπώς θα πρέπει $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ που είναι δεκτή ή

$e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$ που απορρίπτεται ή

$e^x+2=0 \Leftrightarrow e^x=-2$ που είναι αδύνατη.

Τελικά το μοναδικό σημείο τομής της γραφική παράσταση της f με τον άξονα xx' είναι το $(0,0)$.

νέο φροντιστήριο