Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Γεωμετρία

Κεφάλαιο: 8 Ομοιότητα

Θέμα 2

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

ΑΒ = 9, ΑΓ =15 και $\hat{A}$ = 48° , ΖΔ = 12, ΖΕ = 20 και $\hat{Z}$ = 48°.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

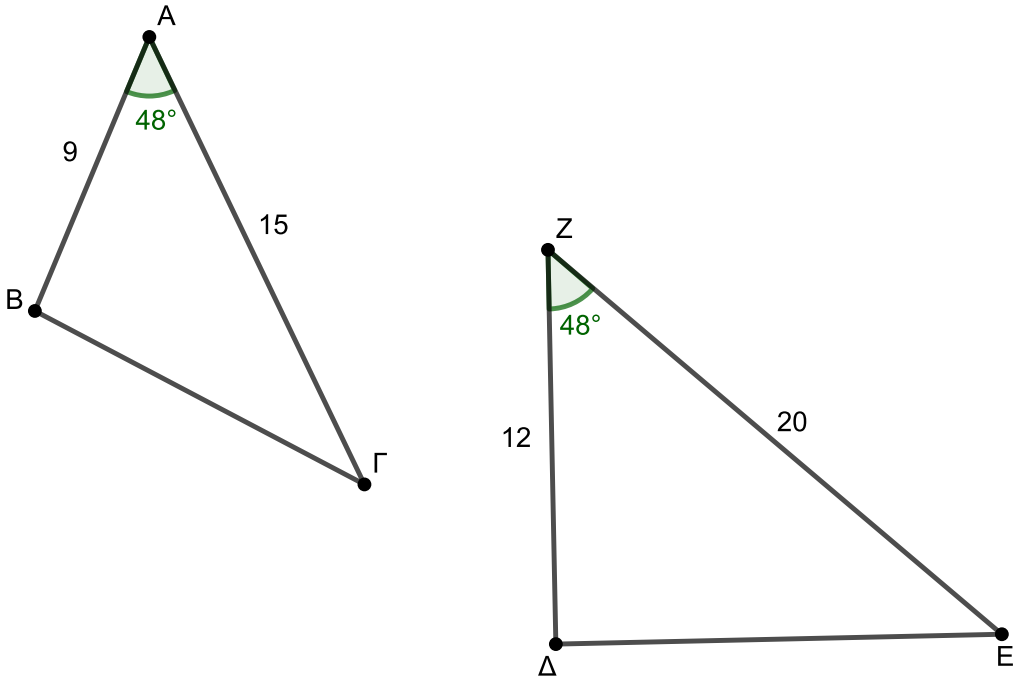
ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ ώστε $\widehat{A} = \widehat{Z} = 48^o$, ΑΒ=9, ΑΓ=15, ΖΔ=12 και ΖΕ=20.



α) Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{Z}$ που καθεμιά είναι ίση με 48°, περιέχονται στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΖΔ, ΖΕ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύει $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, οπότε $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{ZE}$. Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ έχουν δυο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές ίσες, οπότε τα τρίγωνα είναι όμοια.

β)

i. Δύο λόγοι πλευρών των δυο τριγώνων είναι οι $\frac{AB}{Z\Delta}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE}$ που αποδείξαμε πριν ότι είναι μεταξύ τους ίσοι αφού καθένας από τους λόγους αυτούς είναι ίσος με $\frac{3}{4}$. Οι τρίτες πλευρές των δύο τριγώνων είναι οι ΒΓ και ΔΕ που είναι ομόλογες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{Z}$. Οι τρεις λόγοι των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι $\frac{AB}{Z\Delta}$, $\frac{A\Gamma}{ZE}$ και $\frac{B\Gamma}{\Delta E}$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους που όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα α) ισούται με $\frac{3}{4}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Για δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ) γνωρίζουμε ότι:

$\hat{A} = 48^o$, $\hat{Z} = 66^o$ και ΑΒ = 3·ΕΔ.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων

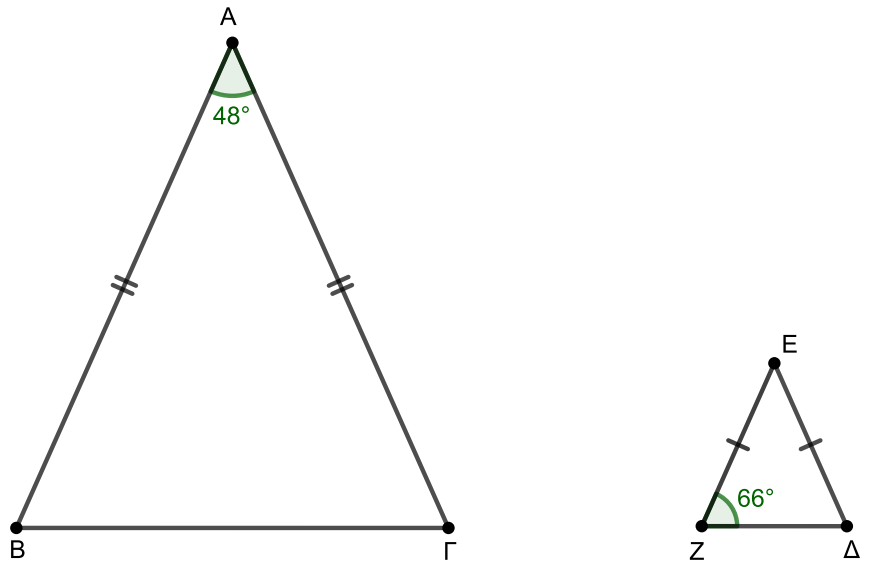
ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ), τέτοια ώστε $\widehat{A}$ = 48°, $\widehat{Z}$ = 66° και ΑΒ = 3·ΕΔ.



Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των γωνιών του είναι 180°. Οπότε καθεμιά από τις γωνίες της βάσης του θα είναι ίση με $\frac{180°-48°}{2} = \frac{132°}{2}$ = 66° . Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΖΔ έχουμε ότι η μια γωνία της βάσης του $\widehat{Z}$ είναι ίση με 66° , οπότε $\widehat{\Delta} = \widehat{Z}$ = 66° και άρα η γωνία της κορυφής είναι ίση με 180° – (66° + 66°) = 180° – 132° = 48° . Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΔ έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι όμοια.

β)

i. Στα όμοια τρίγωνα ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες. Οι λόγοι που σχηματίζονται είναι $\frac{AB}{EZ}$, $\frac{A\Gamma}{E\Delta}$ και $\frac{B\Gamma}{Z\Delta}$ οι οποίοι είναι ίσοι μεταξύ τους, αφού τα τρίγωνα είναι όμοια. Δηλαδή ισχύει ότι: $\frac{AB}{EZ} = \frac{A\Gamma}{E\Delta} = \frac{B\Gamma}{Z\Delta}$.

ii. Ο λόγος των βάσεων είναι ο λόγος $\frac{B\Gamma}{Z\Delta}$ ο οποίος είναι ίσος με το λόγο $\frac{AB}{EZ}$.

$\frac{B\Gamma}{Z\Delta} = \frac{AB}{EZ} = \frac{3\cdot E\Delta}{EZ} = \frac{3\cdot EZ}{EZ}$ = 3. Άρα ο ζητούμενος λόγος των βάσεων είναι ίσος με 3.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$\hat{A} = 48^o$, $\hat{B} = 53^o$, $\hat{E} = 79^o$ και $\hat{Z} = 48^o$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β)

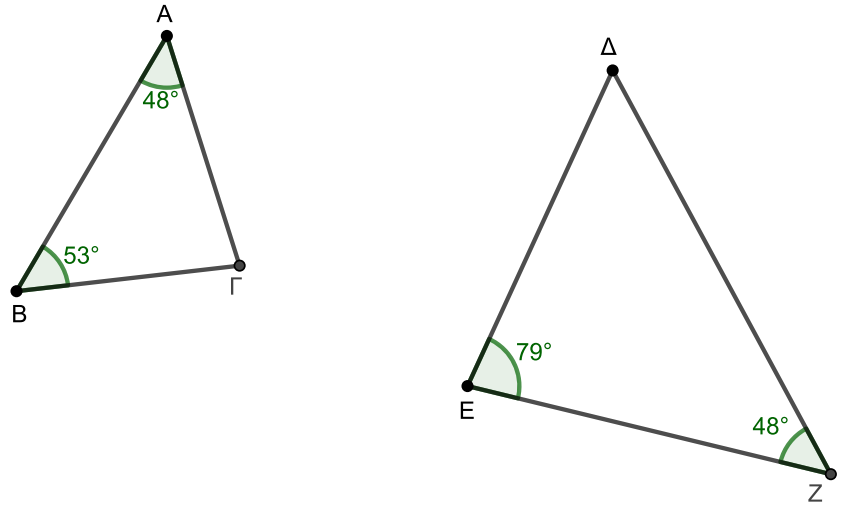
i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων. (Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ τέτοια ώστε $\widehat{A}$ = 48°, $\widehat{B}$ = 53°, $\widehat{E}$ = 79° και $\widehat{Z}$ = 48°.



α) Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180°. Οπότε $\widehat{\Gamma}$ = 180° – (48° + 53°) = 180° – 101° = 79°. Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε $\widehat{\Delta}$ = 180° – (79° + 48°) = 180° – 127° = 53°. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

β)

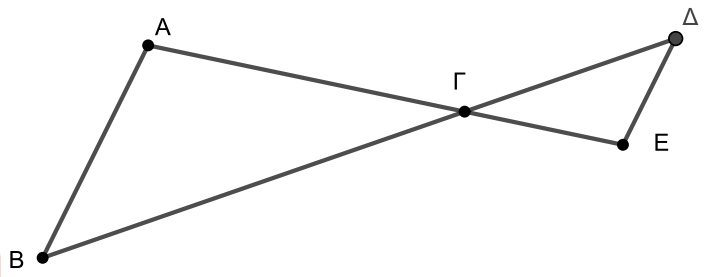
i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Δηλαδή οι πλευρές ΒΓ και ΔΕ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ = $\widehat{Z}$ = 48°. Αντίστοιχα οι πλευρές ΑΓ και ΕΖ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ = $\widehat{\Delta}$ = 53°, και οι πλευρές ΑΒ και ΔΖ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Gamma}$ = $\widehat{E}$ = 79°.

ii. Οι ίσοι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{ΒΓ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΕΖ} = \frac{ΑΒ}{ΔΖ}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ=2ΓΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

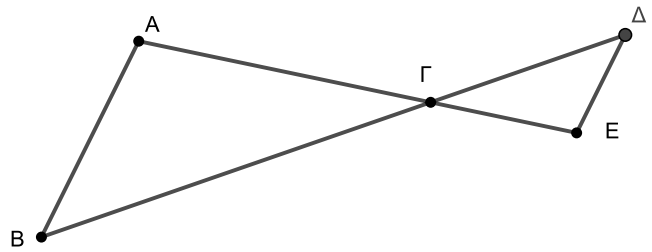
i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α) Δίνεται ότι ΑΒ//ΔΕ οπότε οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{E}$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΔΕ με τέμνουσα την ΑΕ. Ομοίως $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΔΕ με τέμνουσα τη ΒΔ. Οι γωνίες $A\widehat{\Gamma}B$ και $\Delta\widehat{\Gamma}E$ είναι ίσες ως κατακορυφήν. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μία, οπότε είναι όμοια.

β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι :

$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{E}$

$\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$ και

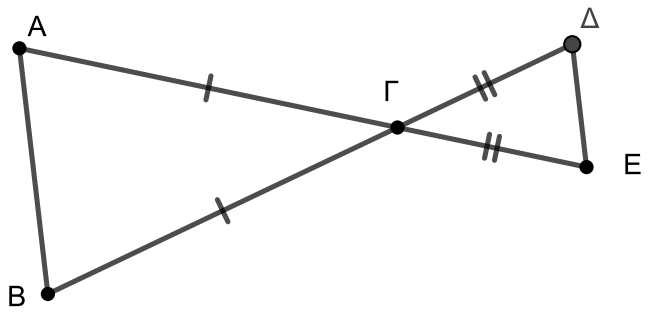
$\frac{AB}{\Delta E}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{\Gamma}B$ και $\Delta\widehat{\Gamma}E$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή οποιοσδήποτε από τους ίσους λόγους $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$, $\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$, $\frac{AB}{\Delta E}$. Οπότε ο λόγος ομοιότητας ισούται με $\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{2\cdot\Gamma E}{\Gamma E} = 2$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε ΑΒ = 2·ΔΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

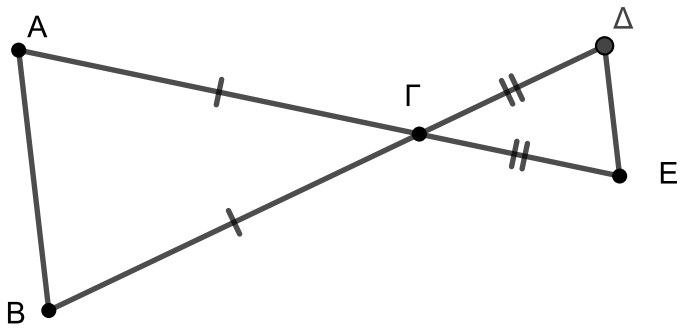
i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΕΔ είναι ισοσκελή με βάσεις ΑΒ και ΔΕ αντίστοιχα και έχουν τις γωνίες στην κορυφή τους ίσες αφού, $A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{\Gamma}E$, ως κατακορυφήν.

Έτσι $\hat{A} = \hat{B} = \frac{180° - A\hat{\Gamma}B}{2} = \frac{180° - \Delta\hat{\Gamma}E}{2} = \hat{E} = \hat{\Delta}$. Οπότε τα τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια.

β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι :

$\frac{AB}{\Delta E}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$

$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$, $\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$, $\hat{E}$ και $\hat{B}$, $\hat{\Delta}$ αντίστοιχα.

Αφού τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΕΔ είναι όμοια οι λόγοι των ομόλογων πλευρών του είναι ίσοι δηλαδή, ισχύει $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει $\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{2\cdot\Delta E}{\Delta E} = 2$. Δηλαδή ισχύει $\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = 2$ ή $A\Gamma = 2\cdot\Gamma E$. Οπότε η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι διπλάσια από την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΓΔΕ.

νέο φροντιστήριο

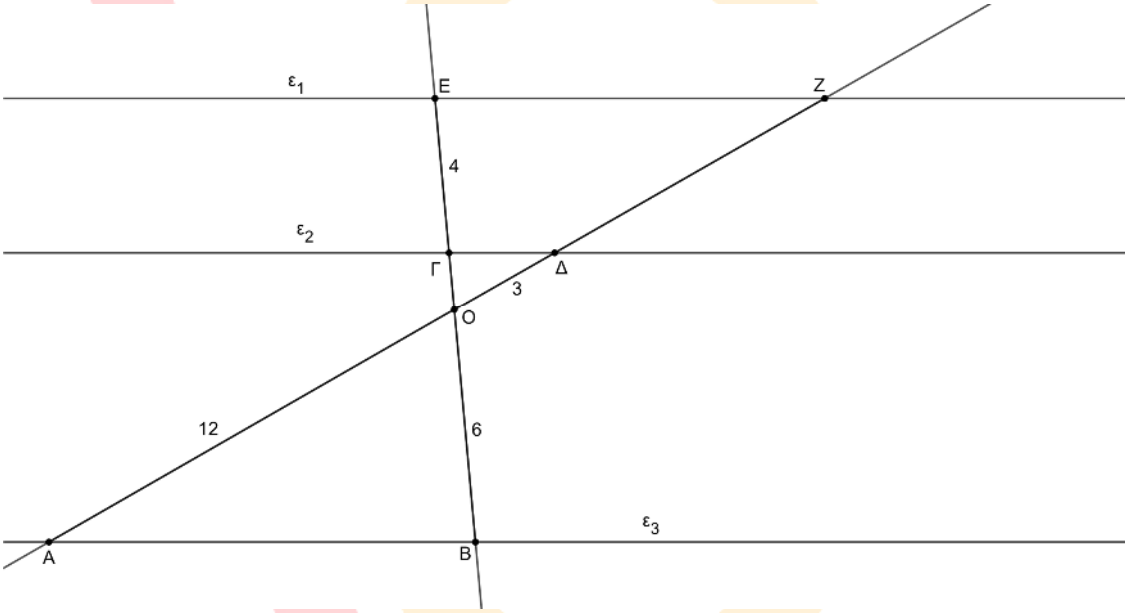
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες. Δίνονται ότι ΓΕ = 4, ΟΔ = 3, ΟΑ = 12, ΟΒ = 6.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΟΓ και ΔΖ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ είναι όμοια. (Μονάδες 09)

γ) Αν ΟΓ = 1.5 και ΔΖ = 8, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{AB}$. (Μονάδες 06)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Φέρνουμε ε_4 // ε_2 που διέρχεται από το Ο. Τότε από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε_2, ε_4, ε_3 που τέμνονται από τις ΓΒ και ΔΑ, έχουμε: $\frac{OA}{O\Delta}=\frac{OB}{O\Gamma}$,

επομένως $\frac{12}{3}=\frac{6}{O\Gamma}$, άρα $12\cdot O\Gamma=6\cdot 3$ ή ΟΓ = 1.5.

Από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε_2, ε_4, ε_1 που τέμνονται από τις ΟΕ και ΟΖ, έχουμε: $\frac{O\Gamma}{\Gamma E}=\frac{O\Delta}{\Delta Z}$, επομένως $\frac{1,5}{4}=\frac{3}{\Delta Z}$, άρα $1,5\cdot\Delta Z=4\cdot 3$ ή ΔΖ = 8.

β) Τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουν:

$E\hat{Z}O=B\hat{A}O$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΖΑ.

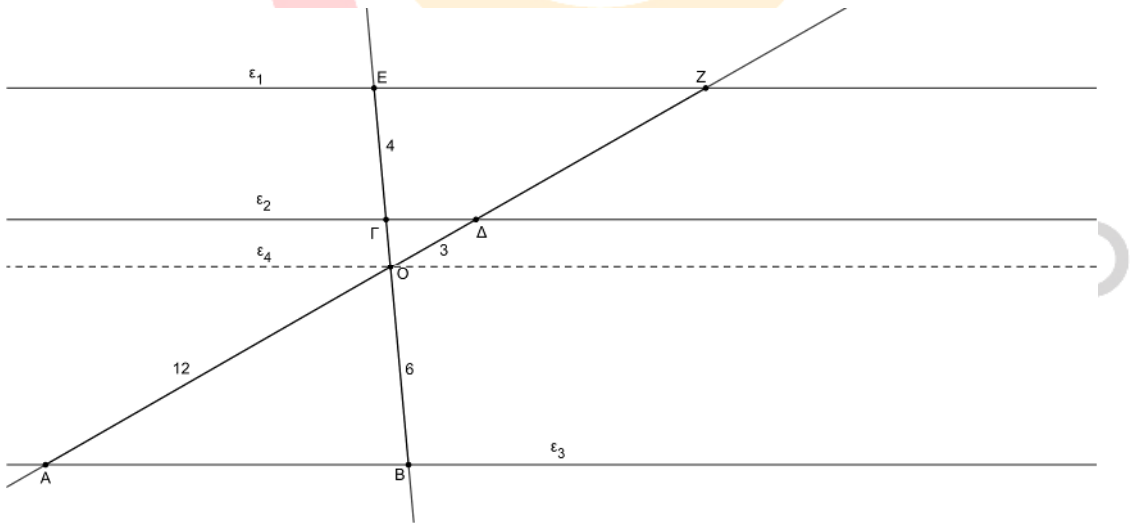
$Z\hat{E}O=A\hat{B}O$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΕΒ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουμε:

	Ίσες γωνίες		
	$E\hat{Z}O=B\hat{A}O$	$Z\hat{E}O=A\hat{B}O$	$E\hat{O}Z=B\hat{O}A$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΟΒ	ΟΒ	ΟΑ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΖΟΕ	ΟΕ	ΟΖ	ΕΖ

$\frac{EZ}{AB}=\frac{OZ}{OA}=\frac{O\Delta+\Delta Z}{OA}=\frac{3+8}{12}=\frac{11}{12}$.



ΘΕΜΑ 2

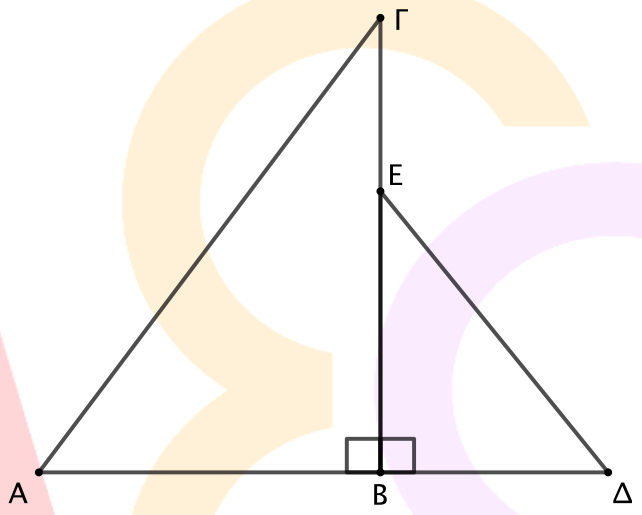
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, ΑΓ $= 36$, ΒΔ $= 16$ και ΕΔ $= 24$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.

(Μονάδες 15)

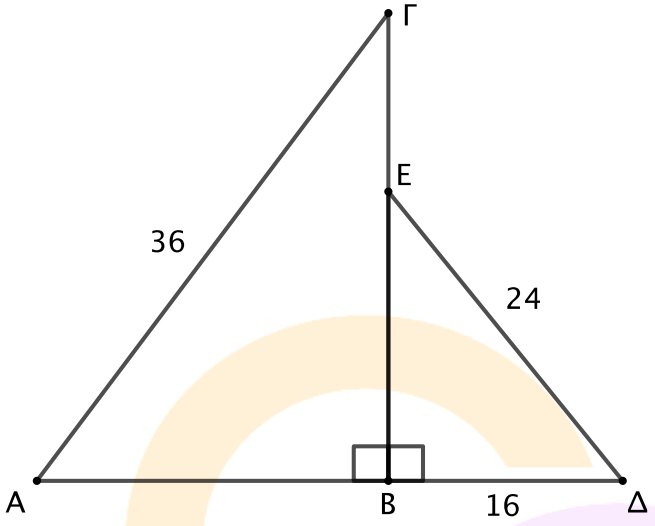
β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

(Μονάδες 10)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ (από υπόθεση) και $A\widehat{B}\Gamma = \Delta\widehat{B}E = 90^o$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{A} = \widehat{\Delta}$	$A\widehat{B}\Gamma = \Delta\widehat{B}E$	$A\widehat{\Gamma}B = \Delta\widehat{E}B$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΔΒΕ	ΒΕ	ΕΔ	ΒΔ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{E\Delta} = \frac{AB}{B\Delta} \text{ ή } \frac{36}{24} = \frac{AB}{16} \text{ ή } AB = \frac{36.16}{24} = 24$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι ΑΕ = 5, ΑΓ = 4, ΕΓ = 2, ΔΕ = 6, ΒΕ = 15 και ΒΔ = 12.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{ΒΔ}{ΑΓ}, \frac{ΔΕ}{ΕΓ}, \frac{ΒΕ}{ΑΕ}$$

(Μονάδες 9)

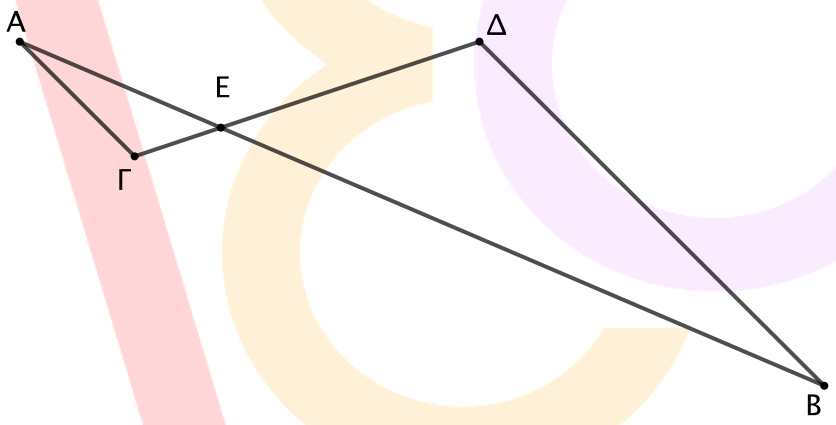
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια.

(Μονάδες 8)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΓ και ΒΕΔ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

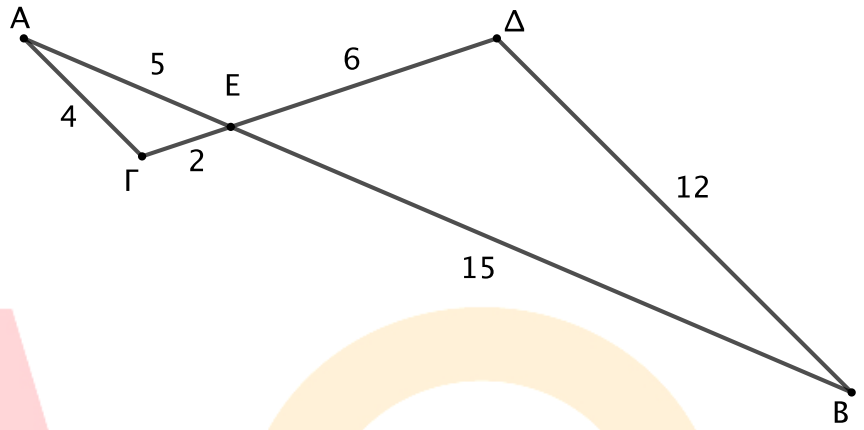
$\hat{Α} = \ldots\ldots$, $\hat{Γ} = \ldots\ldots$, $Α\hat{Ε}Γ = \ldots\ldots$

(Μονάδες 8)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α) Είναι:

$$\frac{ΒΔ}{ΑΓ} = \frac{12}{4} = 3\,, \qquad \frac{ΔΕ}{ΕΓ} = \frac{6}{2} = 3\,, \qquad \frac{ΒΕ}{ΑΕ} = \frac{15}{5} = 3$$

β) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

$\hat{A} = \hat{B}$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΕΓ και ΔΕ αντίστοιχα

$\hat{Γ} = \hat{Δ}$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΕ και ΒΕ αντίστοιχα

$A\hat{E}Γ = B\hat{E}Δ$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα

νέο φροντιστήριο

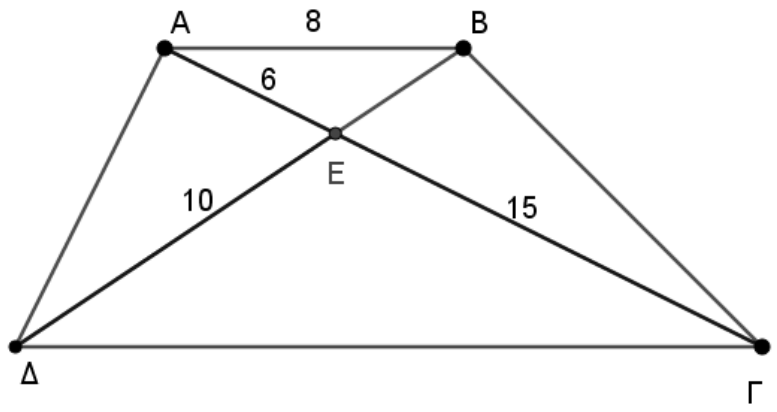
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΔΓ, Ε σημείο τομής των διαγώνιων, ΑΕ = 6, ΑΒ = 8, ΓΕ = 15 και ΔΕ = 10.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ είναι όμοια. (Μονάδες 09)

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίστε τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ. (Μονάδες 07)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ έχουν:

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ.

$\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$, σαν εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια, αφού έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

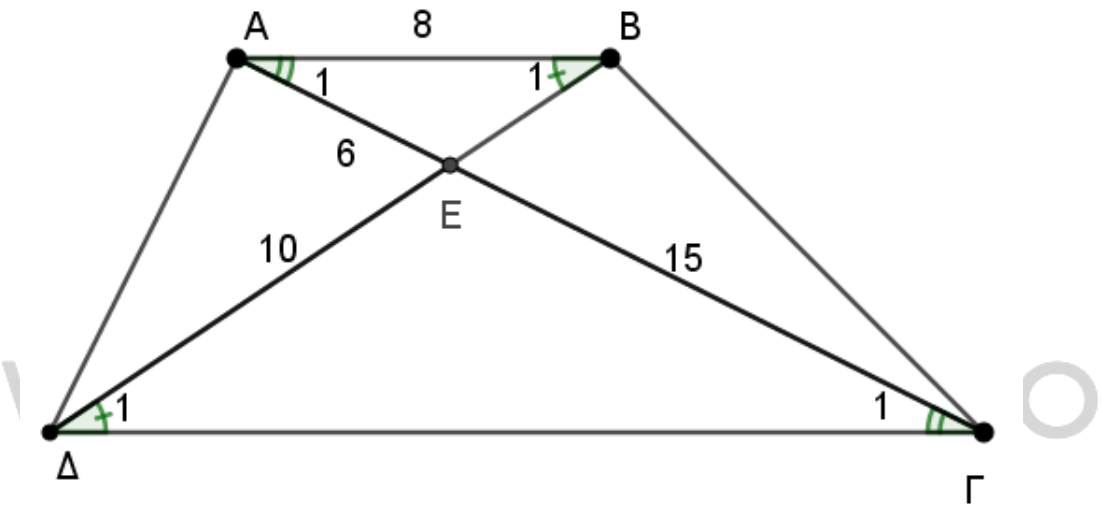
β) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΓΕΔ συμπεραίνουμε ότι οι αντίστοιχες πλευρές θα είναι ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές φαίνονται στον πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$	$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$	$A\hat{E}B = \Gamma\hat{E}\Delta$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΕ	ΒΕ	ΑΕ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΓΕΔ	ΔΕ	ΓΕ	ΔΓ

Επομένως θα ισχύει: $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{BE}{E\Delta}$ (1).

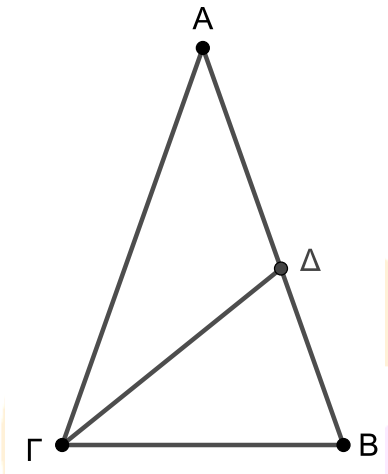
γ) Από την (1) έχουμε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{BE}{E\Delta}$ ή $\frac{8}{\Gamma\Delta} = \frac{6}{15} = \frac{BE}{10}$.

6ΓΔ = 8·15, άρα 6ΓΔ = 120, άρα ΓΔ = 20 και 15ΒΕ = 6·10, άρα 15ΒΕ = 60, άρα ΒΕ =4.



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma = 36$ και $B\Gamma = 24$. Το σημείο Δ της πλευράς AB είναι τέτοιο ώστε $B\Delta = 16$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ έχουν:

i. $\hat{B}$ κοινή γωνία

ii. $\frac{AB}{\Gamma B} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$ ή $\frac{36}{24} = \frac{24}{16}$ ή $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, που ισχύει,

επομένως είναι όμοια αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία κοινή. Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι $\frac{3}{2}$.

β) Αφού τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι όμοια, θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, οπότε

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{\Gamma B} \text{ ή } \frac{36}{\Gamma\Delta} = \frac{36}{24} \text{ ή } \Gamma\Delta = 24 .$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΓ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε ΑΓ = 2ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} \text{ και } \frac{ΑΓ}{ΓΔ}$$

(Μονάδες 8)

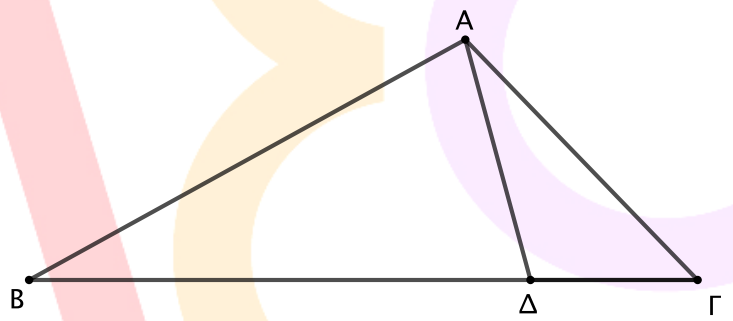
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

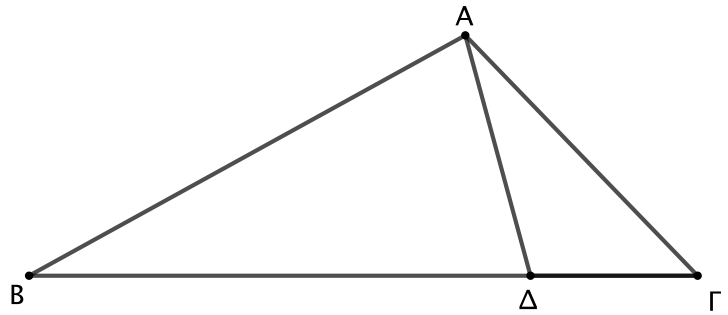
$$B\widehat{A}Γ = \ldots\ldots\ , \qquad \hat{B} = \ldots\ldots$$

(Μονάδες 8)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α) Αφού δίνονται ότι ΒΓ = 2ΑΓ και ΑΓ = 2ΓΔ, θα είναι:

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{ΑΓ}{ΓΔ} = 2$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ έχουν:

$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = 2$

$\frac{ΑΓ}{ΓΔ} = 2$

$\hat{Γ}$ (κοινή)

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

$B\hat{A}Γ = Γ\hat{Δ}A$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

$\hat{B} = Δ\hat{A}Γ$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα δίνονται ότι $\hat{B} = \hat{E} = 90^o$, ΑΕ = 8, ΕΒ = 4 και ΔΕ = 4.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

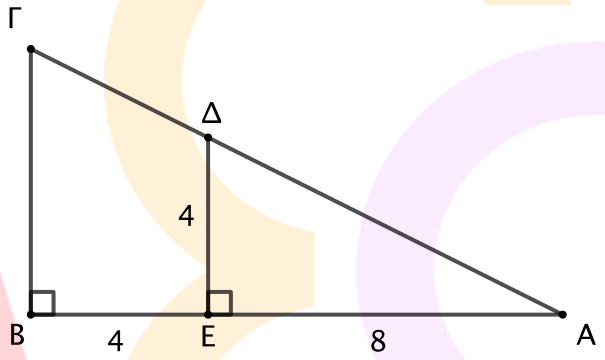
(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

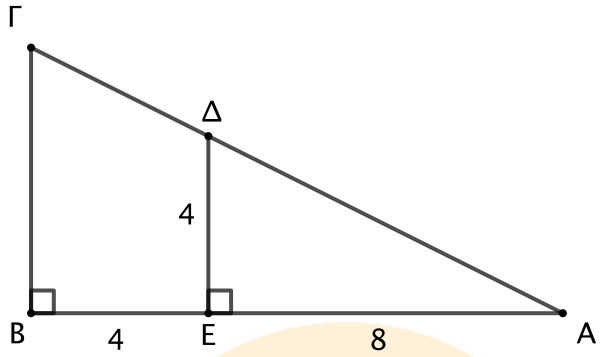
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 05)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν $\widehat{AED} = \widehat{B}$ (ως ορθές) και κοινή τη γωνία $\widehat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{A} = \widehat{A}$	$\widehat{AED} = \widehat{B}$	$\widehat{ADE} = \widehat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΒ}$$

γ) Από την ισότητα

$$\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΒ}$$

έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΒ} \text{ ή } \frac{4}{ΒΓ} = \frac{8}{12} \text{ ή } 8ΒΓ = 48 \text{ ή } ΒΓ = 6$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΒΓ και ΑΔ = 1, όπως στο σχήμα.

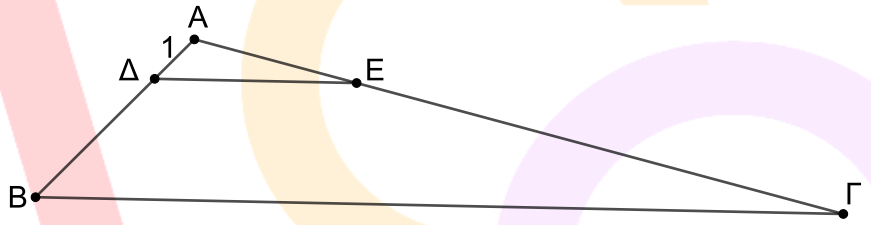
α) Να αποδείξετε ότι $AE \cdot B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 10)

β) Αν επιπλέον ΒΔ = ΑΕ και ΓΕ = 9:

i. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = 3 και ΑΒ = 4. (Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 05)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, η ευθεία ΔΕ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ σε μέρη ανάλογα.

Επομένως $\frac{ΑΔ}{ΒΔ}=\frac{ΑΕ}{ΓΕ}$ ή $\frac{1}{ΒΔ}=\frac{ΑΕ}{ΓΕ}$ ή $ΑΕ\cdot ΒΔ=ΓΕ$.

β) i. Από το α) ερώτημα $ΑΕ\cdot ΒΔ=9$ ή $ΒΔ\cdot ΒΔ=9$ ή $ΒΔ^2=9$ ή $ΒΔ=3$.

Επομένως $ΑΒ=ΑΔ+ΒΔ=1+3=4$.

ii. Από την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη προς την ΒΓ έχει τις πλευρές του ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ίσος με τον λόγο $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{4}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο