Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

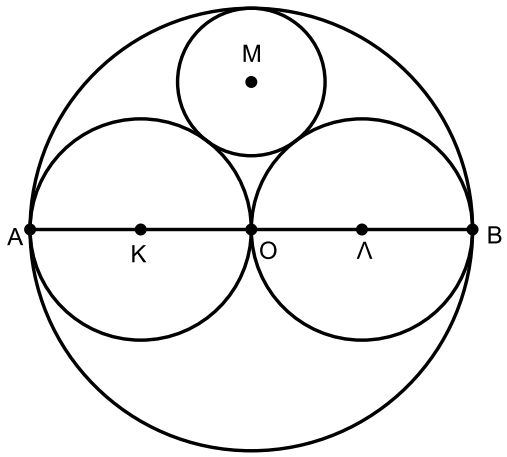
Γεωμετρία

Κεφάλαιο: 9 Μετρικές σχέσεις

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (Μ,ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των κύκλων με κέντρα Κ, Λ, Μ και Ο και στη στήλη Β τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίσεις. (Μονάδες 06)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Διάκεντρος	Μήκος
1. ΚΛ	i. R
2. ΛΜ	ii. 2R
3. ΟΜ	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

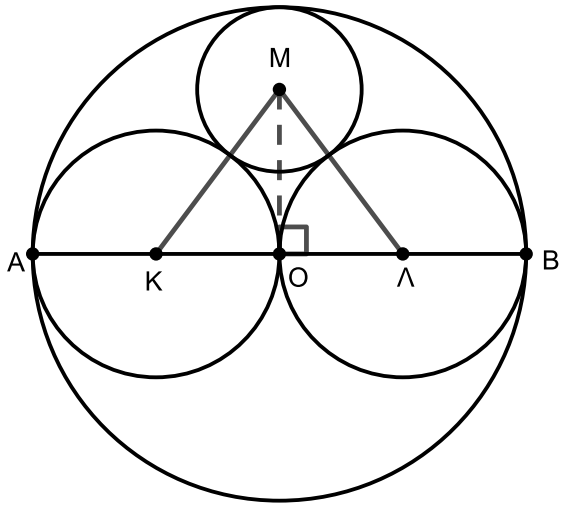
νέο φροντιστήριο

β)

i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση του. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R, όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) 1 → ii., 2 → iii. , 3 → iv.

Δηλαδή ΚΛ=2R γιατί οι κύκλοι κέντρων Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Ομοίως ΛΜ= R+ρ γιατί οι κύκλοι κέντρων Λ και Μ εφάπτονται εξωτερικά. Τέλος ΟΜ=2R-ρ γιατί ο κύκλος κέντρου Ο με τον κύκλο κέντρου Μ εφάπτονται εσωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους θα ισούται με τη διαφορά των ακτινών τους.

β)

i. Οι κύκλοι (Κ,R) και (Μ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους θα ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους, δηλαδή ΚΜ = R+ρ = ΛΜ από το ερώτημα α). Άρα το τρίγωνο ΜΚΛ έχει δύο πλευρές ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΚΛ. Το σημείο Ο είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ γιατί ΟΚ=ΟΛ=R, επομένως το τμήμα ΜΟ είναι διάμεσος της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος, δηλαδή ΟΜ⊥ΚΛ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΛ με $\hat{O} = 90^o$ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε: $OM^2 + O\Lambda^2 = \Lambda M^2$

$(2R-\rho)^2 + R^2 = (R+\rho)^2$

$4R^2 - 4R\rho + \rho^2 + R^2 = R^2 + 2R\rho + \rho^2$

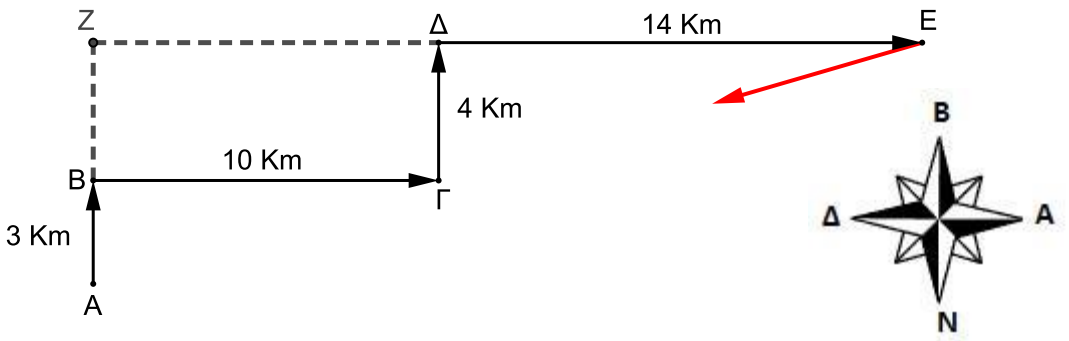
$4R^2 = 6R\rho$

$2R = 3\rho$

$\rho = \frac{2R}{3}$.

ΘΕΜΑ 4

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α)

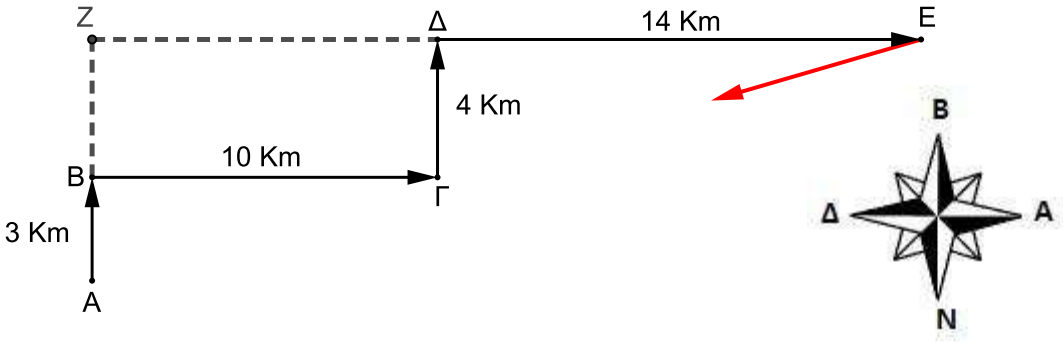
i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α)

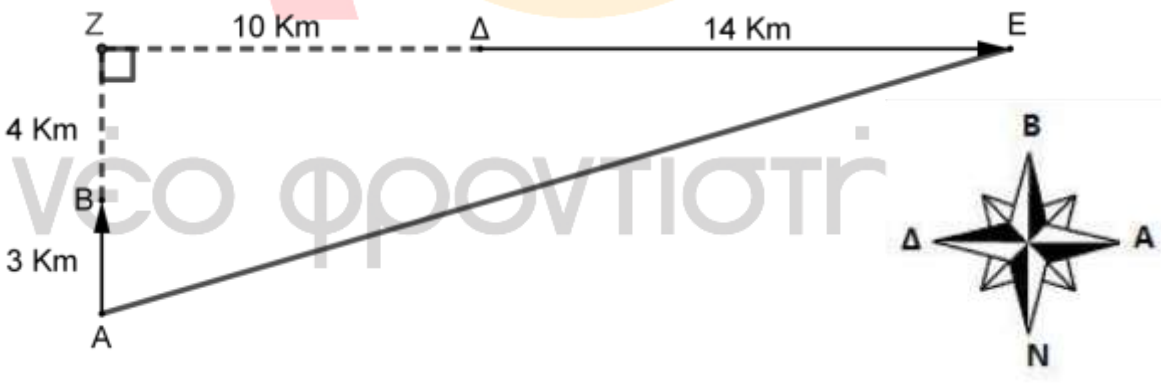
i. Το πρώτο κινητό που έκανε τη διαδρομή ΑΒΓΔΕ διάνυσε συνολικά (3+10+4+14) km = 31 km.

Για το δεύτερο κινητό που έκανε τη διαδρομή ΑΖΕ έχουμε:

ΑΖ//ΓΔ γιατί η κίνηση από το σημείο Α στο σημείο Ζ είναι βόρεια όπως και η κίνηση από το σημείο Γ στο σημείο Δ. Επίσης, η κίνηση από το σημείο Ζ στο σημείο Ε είναι ανατολικά όπως και η κίνηση από το σημείο Β στο σημείο Γ, άρα ΖΕ//ΒΓ. Στο τετράπλευρο ΒΓΔΖ οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι γωνίες του είναι ορθές είναι ορθογώνιο.

Άρα ΒΖ=ΓΔ=4 και ΖΔ=ΒΓ=10. Η συνολική διαδρομή του δεύτερου κινητού είναι (7+10+14) km =31km

ii.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ με $\hat{Z}$ =90° εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$EA^2 = AZ^2 + ZE^2$ ή $EA^2 = 7^2 + 24^2$, δηλαδή $EA^2 = 49 + 576$, οπότε $EA^2 = 625$ ή EA = 25 km.

β) Αν, τα κινητά κατά την επιστροφή τους από το σημείο Ε στο Α, περάσουν από το σημείο Γ θα ισχύει ότι ΕΑ = ΕΓ + ΓΑ (1). Υπολογίζουμε τα τμήματα ΕΓ και ΓΑ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΓΕ και ΒΑΓ.

$ΕΓ^2 = ΕΔ^2 + ΔΓ^2$ ή $ΕΓ^2 = 14^2 + 4^2$, $ΕΓ^2 = 196 + 16$, $ΕΓ^2 = 212$, δηλαδή ΕΓ = $\sqrt{212}$ ή ΕΓ = $2\sqrt{53}$.

$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 + ΑΒ^2$ ή $ΑΓ^2 = 10^2 + 3^2$, $ΑΓ^2 = 100 + 9$, $ΕΓ^2 = 109$, δηλαδή ΕΓ = $\sqrt{109}$.

Από το α)ii. ερώτημα βρήκαμε ότι ΕΑ = 25, οπότε από τη σχέση (1) έχουμε ότι:

$25 = 2\sqrt{53} + \sqrt{109}$. Δηλαδή ένας θετικός ρητός αριθμός ισούται με άθροισμα θετικών αρρήτων, πράγμα που είναι άτοπο. Άρα δεν θα περάσουν από το σημείο Γ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔE έχουν μήκη αντίστοιχα $12, 16, 8$ και 10, οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθές και τα σημεία A, Γ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

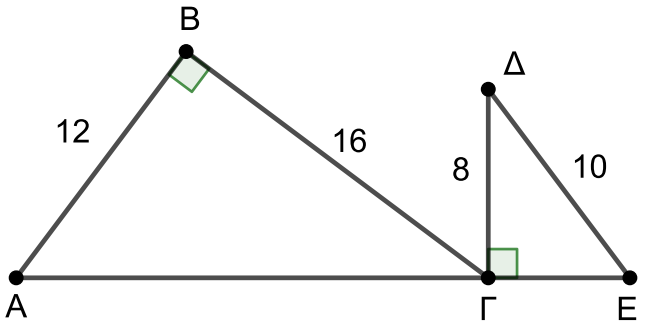
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $E\Delta$ είναι το Z και ZH είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του Z. Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$, (Μονάδες 6)

ii. $ZH = \frac{52}{3}$. (Μονάδες 5)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90°$), έχουμε

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2 = 12^2 + 16^2 \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2 = 400 \quad \text{ή} \quad A\Gamma = 20.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ ($\hat{\Gamma} = 90°$), έχουμε

$$\Gamma E^2 = \Delta E^2 - \Gamma\Delta^2 \quad \text{ή} \quad \Gamma E^2 = 10^2 - 8^2 \quad \text{ή} \quad \Gamma E^2 = 36 \quad \text{ή} \quad \Gamma E = 6.$$

Επομένως το μήκος του τμήματος AE είναι $AE = A\Gamma + \Gamma E = 20 + 6 = 26$.

β) Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι $A\Gamma = 20$ και $\Gamma E = 6$, άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ έχουν:

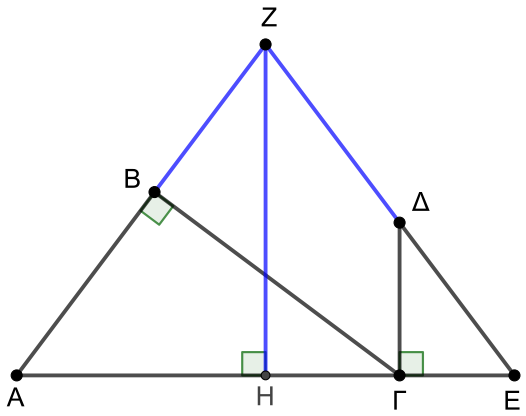
$$\frac{AB}{\Gamma E} = \frac{12}{6} = 2\,,$$

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{16}{8} = 2\,,$$

$$\frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{20}{10} = 2\,,$$

οπότε είναι όμοια, αφού έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ)



i) Αφού τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\hat{A} = \hat{E}$, οπότε το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές με βάση την AE. Επειδή το ZH είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο H είναι το μέσο της AE. Επομένως θα είναι

$$HE = \frac{AE}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

ii) Είναι $\Delta\Gamma \parallel ZH$, ως κάθετες στην AE, οπότε από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου HZE. Επομένως έχουμε

$$\frac{\Delta\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma E}{HE} \quad \text{ή} \quad \frac{8}{ZH} = \frac{6}{13} \quad \text{ή} \quad ZH = \frac{52}{3}\,.$$

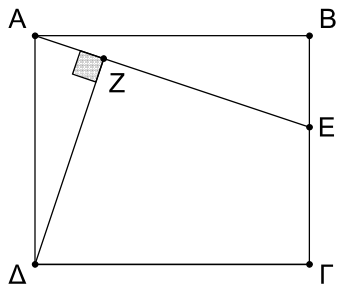
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $AB = 6$ και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε $BE = 2$. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)

γ) Αν $\Delta Z = ZE$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ. (Μονάδες 8)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

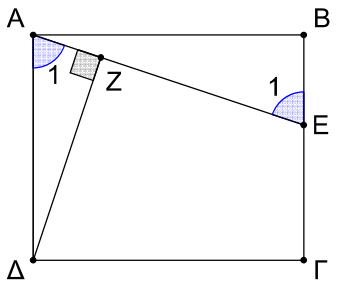
α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$AE^2 = AB^2 + BE^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $AB = 6$, $BE = 2$, οπότε

$$AE^2 = 6^2 + 2^2 \text{ ή } AE^2 = 40 \text{ ή } AE = 2\sqrt{10}.$$

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ έχουν:

- $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ.
- $\hat{B} = \hat{Z} = 90^o$, γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και η ΔΖ κάθετη στην ΑΕ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Επομένως θα ισχύει

$$\frac{AB}{\Delta Z} = \frac{AE}{A\Delta} = \frac{BE}{AZ} \ (1).$$

γ) Είναι $AB = 6$, $BE = 2$ και $AE = 2\sqrt{10}$, οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{6}{\Delta Z} = \frac{2\sqrt{10}}{A\Delta} = \frac{2}{AZ} \ (2).$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\Delta Z = ZE$, έτσι η ισότητα $\frac{6}{\Delta Z} = \frac{2}{AZ}$ γίνεται $\frac{6}{ZE} = \frac{2}{AZ}$ και με ιδιότητα των αναλογιών προκύπτει ότι

$$\frac{6}{ZE} = \frac{2}{AZ} = \frac{6+2}{ZE+AZ} = \frac{8}{AE} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \ (3).$$

Από τις ισότητες (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{2\sqrt{10}}{A\Delta} = \frac{4}{\sqrt{10}} \text{ ή } 4A\Delta = 2(\sqrt{10})^2 \text{ ή } A\Delta = 5.$$

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30^o$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ΒΓ = 2, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

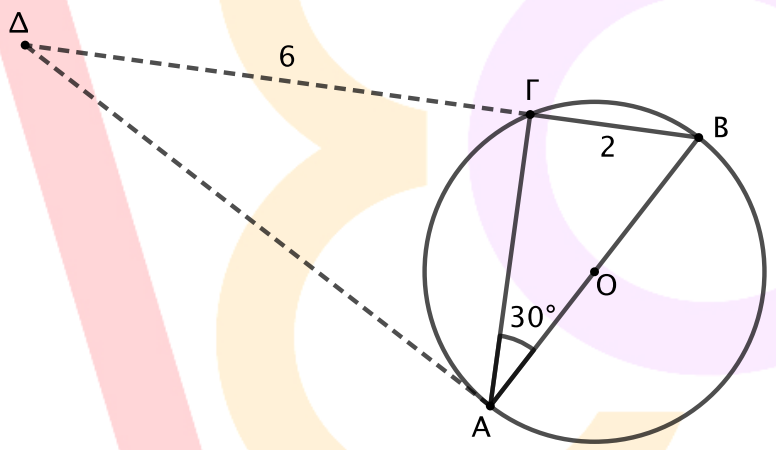
i. Την ακτίνα R.

ii. Το μήκος της πλευράς ΑΓ.

(Μονάδες 16)

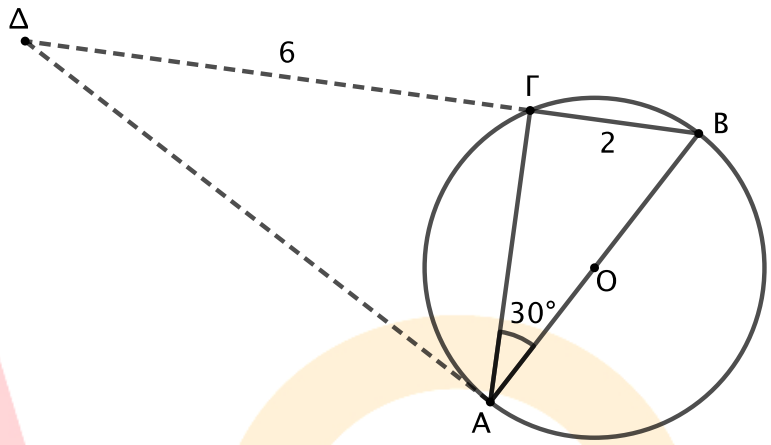
β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε ΓΔ = 6. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α)

i. Η γωνία $B\hat{\Gamma}A$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\hat{A}\Gamma = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή

$$B\Gamma = \frac{AB}{2} \quad \text{ή} \quad 2 = \frac{2R}{2} \quad \text{ή} \quad R = 2$$

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2$$

$$A\Gamma^2 = 4^2 - 2^2$$

$$A\Gamma^2 = 16 - 4$$

$$A\Gamma^2 = 12$$

$$A\Gamma = \sqrt{12}$$

β) Η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή ως παραπληρωματική της ορθής γωνίας $B\hat{\Gamma}A$. Αρχικά, υπολογίζουμε το μήκος του τμήματος ΑΔ. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$$

$$A\Delta^2 = \sqrt{12}^2 + 6^2$$

$$A\Delta^2 = 12 + 36$$

$$A\Delta^2 = 48$$

$$A\Delta = \sqrt{48}$$

νεο φροντιστηριο

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ με μήκη πλευρών $AB = 4$, $ΔB = 8$, $AΔ = \sqrt{48}$. Έχουμε:

$ΔB^2 = 8^2 = 64$

$AB^2 + AΔ^2 = 4^2 + \sqrt{48}^2 = 16 + 48 = 64$

Αφού είναι $ΔB^2 = AB^2 + AΔ^2$, συμπεραίνουμε ότι $B\hat{A}Δ = 90^o$. Επομένως, το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση λ%, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάστε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α, 8β και 6γ. (Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αφού τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, τότε έχουμε την αναλογία:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}$$

Αν ονομάσουμε τους ίσους λόγους κ (κ > 0), τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}=\kappa \text{ ή } \begin{Bmatrix}\frac{\alpha}{5}=\kappa\\ \frac{\beta}{4}=\kappa\\ \frac{\gamma}{3}=\kappa\end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix}\alpha=5\kappa\\ \beta=4\kappa\\ \gamma=3\kappa\end{Bmatrix}$$

Αφού κ > 0 το μεγαλύτερο μήκος είναι εκείνο που έχει μέτρο 5κ, τότε:

$$\alpha^2=(5\kappa)^2=25\kappa^2$$

$$\beta^2+\gamma^2=(4\kappa)^2+(3\kappa)^2=16\kappa^2+9\kappa^2=25\kappa^2$$

συγκρίνοντας τις παραπάνω ισότητες έχουμε: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, δηλαδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχεδιαστούν πάνω σε ένα χαρτί που φωτοτυπηθεί με μεγέθυνση λ%, τότε τα μέτρα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων θα πολλαπλασιαστούν επί $\frac{\lambda}{100}$ (λ>100). Έτσι προκύπτουν νέα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη που έχουν μέτρα:

$$\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha,\ \frac{\lambda}{100}\cdot\beta \text{ και } \frac{\lambda}{100}\cdot\gamma.$$

Για τα νέα ευθύγραμμα τμήματα ισχύει:

$$(\frac{\lambda}{100}\cdot\beta)^2+(\frac{\lambda}{100}\cdot\gamma)^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\beta^2+\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\gamma^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2(\beta^2+\gamma^2)=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\alpha^2=(\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha)^2$$

δηλαδή ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, συνεπώς σχηματίζουν πάλι νέο ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Επειδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, έχουμε από το (α) ερώτημα ότι:

$$\alpha=5\kappa,\ \beta=4\kappa \text{ και } \gamma=3\kappa$$

Έστω ότι σχηματίζεται τρίγωνο με τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη με μέτρα 10α, 8β και 6γ, τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα και θα έχουμε:

$$10\alpha<8\beta+6\gamma \Leftrightarrow 10\cdot5\kappa<8\cdot4\kappa+6\cdot3\kappa$$

$\Leftrightarrow 50\kappa < 32\kappa + 18\kappa$

$\Leftrightarrow 50\kappa < 50\kappa$, άτοπο

επομένως δεν σχηματίζεται τέτοιο τρίγωνο.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ενός τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται ότι $AB = 9$, $A\Gamma = 12$, $A\Delta = 4$ και $AE = 3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\Gamma = 15$, (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

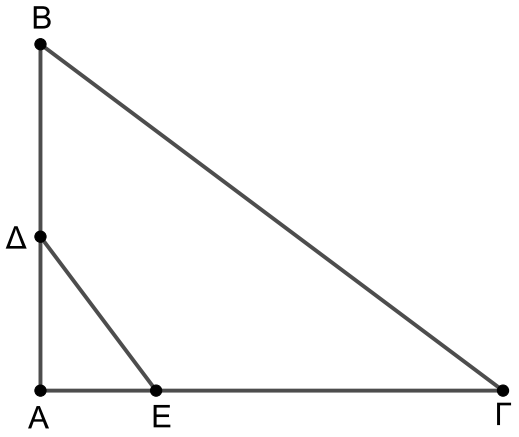
i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

ii. $\Delta E = 5$. (Μονάδες 6)

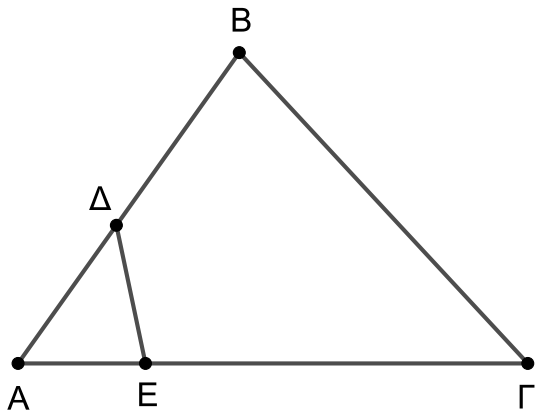
β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\Gamma = 10$, (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

ii. $\Delta E = \frac{10}{3}$. (Μονάδες 6)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΑΒ} = 9$, $\text{ΑΓ} = 12$ και $\text{ΒΓ} = 15$, άρα έχουμε

$\text{ΒΓ}^2 = 15^2 = 225$ και $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$,

άρα $\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2$.

Επομένως από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι $\widehat{\text{Α}} = 90°$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Επειδή $\widehat{\text{Α}} = 90°$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $\text{ΔΕ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΑΕ}^2$ ή $\text{ΔΕ}^2 = 4^2 + 3^2$ ή $\text{ΔΕ}^2 = 25$ ή $\text{ΔΕ}^2 = 5^2$ ή $\text{ΔΕ} = 5$.

β)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΑΒ} = 9$, $\text{ΑΓ} = 12$ και $\text{ΒΓ} = 10$, άρα έχουμε

$\text{ΑΓ}^2 = 12^2 = 144$ και $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = 9^2 + 10^2 = 81 + 100 = 181$

άρα $\text{ΑΓ}^2 < \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$, οπότε $\widehat{\text{Β}} < 90°$. Η οξεία γωνία $\widehat{\text{Β}}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ αφού βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά την ΑΓ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο και όχι ορθογώνιο.

ii. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΒ έχουν

$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ και τη γωνία $\widehat{\text{Α}}$ κοινή,

άρα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΒ θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ανάλογες με λόγο $\frac{1}{3}$.

Επομένως $\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{1}{3}$ ή $\frac{\text{ΔΕ}}{10} = \frac{1}{3}$ ή $\text{ΔΕ} = \frac{10}{3}$.

νέο φροντιστήριο