Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 1 Διανύσματα

Θέμα 2

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\left(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}\right) = 15$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δίνεται από το τύπο

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$=3·4·συν$\frac{\pi}{3} = 12\cdot\frac{1}{2} = 6.$

Άρα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 6.$

β) $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 3^2 = 9$ *και* $\vec{\beta}^2 = \left|\vec{\beta}\right|^2 = 4^2 = 16.$

γ) $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} - 9\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = 3\vec{\alpha}^2 - 10\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 =$

$$= 3\cdot 9 - 10\cdot 6 + 3\cdot 16 = 15.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2 \cdot (1,2) + (2,3) = (2+2, 4+3) = (4,7)$.

β) Έχουμε: $|\vec{\gamma}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$.

γ) Βρίσκουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = (1,2) \cdot (4,7) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 18$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3), \vec{\beta} = (3,-1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται από το τύπο

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0.$$

Επειδή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, δηλαδή τα διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα και η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ορθή.

β) Δίνονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε

$$\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2(1,3) - (3,-1) = (2,6) - (3,-1) = (-1,7).$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB} = (3,-1)-(2,1) = (1,-2)$.

β) Είναι $\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma} = (2,1)\cdot(1,-2) = 2-2 = 0$ οπότε $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$.

γ) Είναι $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ οπότε $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη $\left(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\gamma}\right)$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})=2\cdot4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=8\cdot\frac{1}{2}=4$.

β) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2-4=4-4=0$.

γ) Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\gamma}\right)=\frac{\pi}{2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)$

ii. $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}}\right)$

iii. $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)$

iv. $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{\Gamma M}}\right)$

v. $\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}}\right)$

(Μονάδες 10)

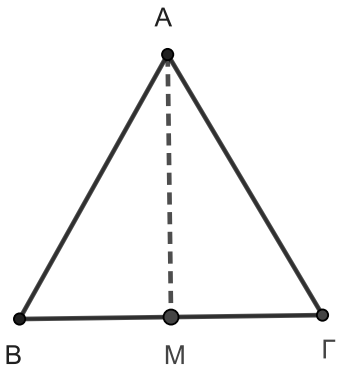
β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$

iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$

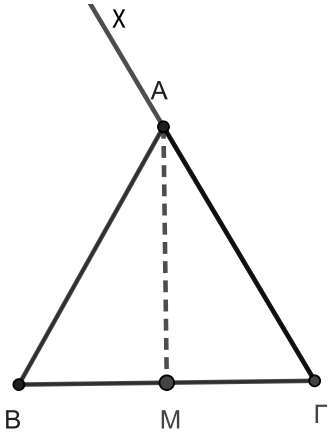
(Μονάδες 15)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)



i. $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right) = 60^o$.

ii. $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}}\right) = 90^o$.

iii. $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}}\right) = \widehat{xAM} = 180^o - 30^o = 150^o$. Καθώς η διάμεσος προς τη βάση είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

iv. $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{\Gamma M}}\right) = 180^o$.

v. $\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}}\right) = 0^o$.

β) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι 10 αφού το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Για το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$ έχουμε από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΜΓ : $AM^2 = A\Gamma^2 - M\Gamma^2$ ή $AM^2 = 10^2 - 5^2 = 75$ ή $AM = 25 \cdot 3$ ή $AM = 5\sqrt{3}$.

i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = |\overrightarrow{AM}|\,|\overrightarrow{B\Gamma}|\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}}\right) = 5\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \text{συν}\,90^o = 0$

ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A} = |\overrightarrow{AM}|\,|\overrightarrow{B\Gamma}|\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}}\right) = 5\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \text{συν}\,150^o = 50\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -75$

iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = |\overrightarrow{\Gamma M}|\,|\overrightarrow{\Gamma B}|\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}}\right) = 5 \cdot 10 \cdot \text{συν}0^o = 5 \cdot 10 \cdot 1 = 50.$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\widehat{A} = 60^{o}$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$

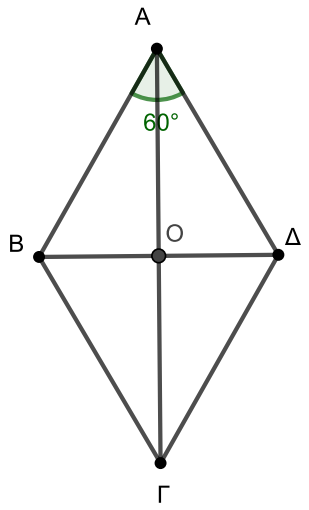
β) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

γ) $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{AO}$

δ) $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{OB}$

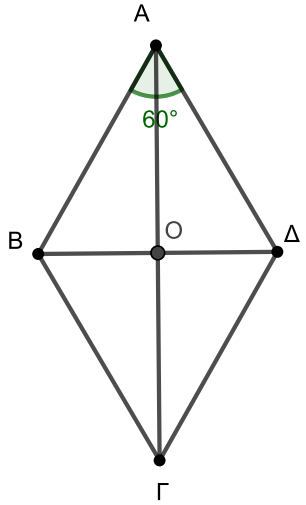
ε) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(Μονάδες 25)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{A\Delta}| \cdot$ συν $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta}}\right) = 4 \cdot 4 \cdot$ συν $60^o = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$.

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι ομόρροπα οπότε σχηματίζουν γωνία 0° . Οπότε,

$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = |\overrightarrow{A\Delta}| \cdot |\overrightarrow{B\Gamma}| \cdot$ συν $\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{B\Gamma}}\right) = 4 \cdot 4 \cdot$ συν $0^o = 16 \cdot 1 = 16$

γ) Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται, οπότε $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\Gamma}$, και τέμνονται κάθετα, οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Delta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ σχηματίζουν γωνία 90° και έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν. Συνεπώς $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = 0$

δ) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αφού οι δυο πλευρές του είναι πλευρές του ρόμβου, με γωνία της κορυφής 60°. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο με πλευρά 4. Το Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του , οπότε ΒΟ = ΟΔ = 2.

$\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{O\Delta}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot$ συν $\left(\widehat{\overrightarrow{O\Delta}, \overrightarrow{OB}}\right) = 2 \cdot 2$ συν $180^o = 4\,(-1) = -4$.

ε) Για τη γωνία $\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}}\right)$ ισχύει : $\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{BA}}\right) = 180^o - 60^o = 120^o$. Οπότε,

$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} = |\overrightarrow{A\Delta}| \cdot |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| \cdot$ συν $\left(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}}\right) = 4 \cdot 4 \cdot$ συν $120^o = 16\,(-\frac{1}{2}) = -8$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{\imath} + 3\sqrt{3}\vec{\jmath}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{\imath}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{\jmath}$ και $\vec{\delta} = (-1 , 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

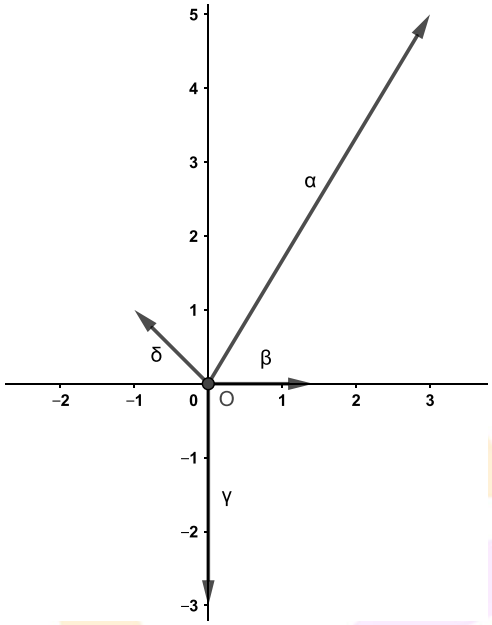
(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 06)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



Τα διανύσματα που δίνονται έχουν συντεταγμένες $\vec{\alpha} = (3 , 3\sqrt{3})$, $\vec{\beta} = (\sqrt{2} , 0)$, $\vec{\gamma} = (0 ,- 3)$ και $\vec{\delta} = (-1 , 1)$.

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος, όταν η τετμημένη του δεν είναι μηδέν, ορίζεται ως το πηλίκο τεταγμένη του διανύσματος προς τετμημένη του διανύσματος. Οπότε

$\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$, $\lambda_{\vec{\delta}} = \frac{1}{-1} = -1$.

β) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει ένα διάνυσμα με το θετικό ημιάξονα Ox ισούται με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με το θετικό ημιάξονα Ox, επειδή $\lambda_{\vec{\alpha}} = \sqrt{3}$ (από ερώτημα α), θα ισχύει εφω = $\sqrt{3}$. Επιπλέον το πέρας του διανύσματος βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο, αφού έχει θετικές συντεταγμένες, άρα ω = 60ο.

Το διάνυσμα $\vec{\beta} = (\sqrt{2} , 0)$, έχει τεταγμένη 0, άρα $\vec{\beta}$//x'x, και επειδή το $\vec{\beta}$ έχει θετική τετμημένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία 0ο .

Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (0 , -3)$, έχει τετμημένη 0, άρα $\vec{\gamma}$//y'y , και επειδή το $\vec{\gamma}$ έχει αρνητική τεταγμένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία 270ο .

Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox, επειδή $\lambda_{\vec{\delta}} = -1$ (από ερώτημα α), θα ισχύει εφφ = -1. Επιπλέον το διάνυσμα έχει αρνητική τετμημένη και θετική τεταγμένη, οπότε το πέρας του βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, άρα φ = 145ο.

γ) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$

$|\vec{\gamma}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$. (Μονάδες 09)

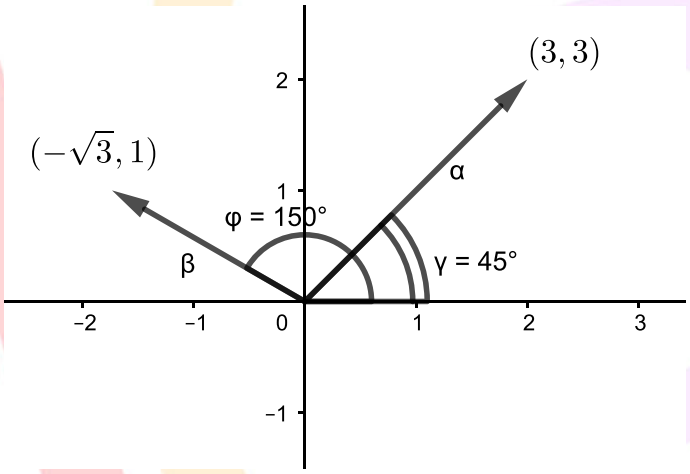
νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3}{3} = 1$ και $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x'x και φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x'x, τότε εφω=$\lambda_{\vec{\alpha}}$ = 1 και εφφ = $\lambda_{\vec{\beta}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο, άρα ω=45° και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο, άρα φ=150°.

β) Η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ισούται με τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x'x αν αφαιρέσουμε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον x'x.

Δηλαδή $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ = 150° – 45° =105° .



ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 07)

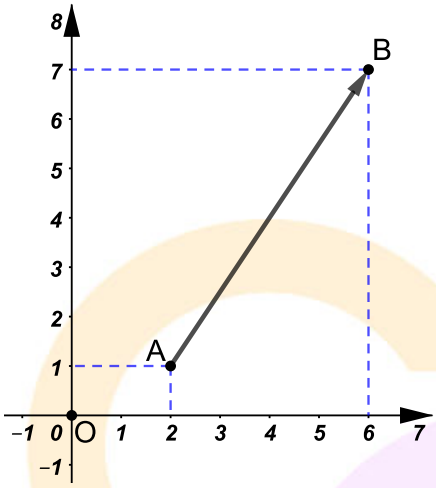
β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα. (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Σχεδιάζουμε τους άξονες του καρτεσιανού επιπέδου και τα δύο σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή το Α και πέρας το Β.



β) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A) = (6-2, 7-1) = (4,6)$.

γ) Παρατηρούμε ότι $\vec{u} = (-8,-12) = (-2\cdot 4, -2\cdot 6) = -2\cdot(4,6) = -2\cdot\vec{v}$.

Εφόσον υπάρχει αρνητικός πραγματικός αριθμός $\lambda = -2$, ώστε $\vec{u} = \lambda\cdot\vec{v}$, τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

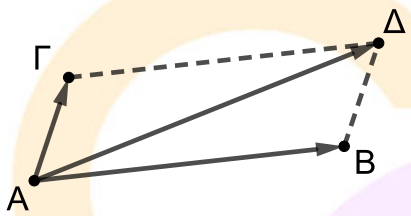
Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11,5)$, $\Gamma(3,7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 08)

γ) του σημείου Δ. (Μονάδες 05)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$ είναι:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (11 - 2, 5 - 4) = (9, 1)$.

Όμοια:

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A\,, y_\Gamma - y_A) = (3 - 2, 7 - 4) = (1, 3)$.

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$.

Άρα $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = (9 + 1, 1 + 3) = (10, 4)$.

γ) Έχουμε $\overrightarrow{A\Delta} = (x_\Delta - x_A\,, y_\Delta - y_A)$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου Α και τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$, η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$(10, 4) = (x_\Delta - 2\,, y_\Delta - 4) \text{ ή } \begin{cases} x_\Delta - 2 = 10 \\ y_\Delta - 4 = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_\Delta = 12 \\ y_\Delta = 8 \end{cases}$$

Άρα $\Delta(12, 8)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία *Α*, *Β* και *Γ* είναι συνευθειακά. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το *Β* είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 07)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (1-(-1), 2-6) = (2, -4)$.

Επίσης $\overrightarrow{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B\,, y_\Gamma - y_B) = (3-1, -2-2) = (2, -4)$.

β) Από την απάντηση στο ερώτημα α) παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$. Επομένως τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και εφόσον το B είναι κοινό σημείο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ) Εφόσον $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$ συμπεραίνουμε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{A}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (3-1, 4-2) = (2,2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (5-1, -2-2) = (4,-4)$.

Οπότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) = 0$. Άρα $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε $\widehat{A} = 90^o$.

β) Το Μ είναι το μέσο του ΒΓ, άρα οι συντεταγμένες του είναι $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$, δηλαδή $M(4,1)$

και $\overrightarrow{AM} = (3,-1)$, άρα $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και η ΑΜ είναι διάμεσος, άρα (ΒΓ)=2(ΑΜ) και

επομένως $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2\sqrt{10}$.

γ) $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{M\Gamma} = 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{A\Gamma}) = -2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{A\Gamma}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$$

(Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ:

α) $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} = 3(1,-3) - 5(-2,-1) = (3,-9) - (-10,-5) = (13,-4)$

και

$\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta} = 5(1,-3) - 9(-2,-1) = (5,-15) - (-18,-9) = (23,-6)$.

β) $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2(3\,\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}) - (5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}) = 6\vec{\alpha} - 10\vec{\beta} - 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

γ) $\overrightarrow{K\Lambda} = \vec{w} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και

$\overrightarrow{\Lambda M} = \vec{u} - \vec{w} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} = 2(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2 \cdot \overrightarrow{K\Lambda}$

Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{\Lambda M}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{E}}$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{E}}=\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}+\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}$.

α)

i. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}$.

(Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ είναι αντίθετα.

(Μονάδες 8)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A,Δ και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $\vec{A\Delta}=\vec{AB}+\vec{B\Delta}=\vec{AB}+\left(\vec{BA}+\vec{B\Gamma}\right)=\vec{B\Gamma}$ (1)

και $\vec{AE}=\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma E}=\vec{A\Gamma}+\left(\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}\right)=\vec{\Gamma B}$ (2).

ii. Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\vec{A\Delta}=-\vec{AE}$ δηλαδή τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.

β) Από το α) ερώτημα είναι $\vec{A\Delta}=(-1)\vec{AE}$, οπότε τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι παράλληλα. Επιπλέον έχουν κοινό σημείο το A, άρα τα A,Δ και E είναι συνευθειακά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.

(Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$.

(Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αν $M(x_M, y_M)$ και $N(x_N, y_N)$, είναι

$$x_M = \frac{6+2}{2} = 4, \qquad y_M = \frac{3+1}{2} = 2$$

και

$$x_N = \frac{9+1}{2} = 5, \qquad y_N = \frac{2-2}{2} = 0.$$

β) Είναι $\overrightarrow{MN} = (5-4, 0-2) = (1, -2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \big(9-1, 2-(-2)\big) = (8, 4)$.

γ) Έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} = (1, -2) \cdot (8, 4) = 1 \cdot 8 + (-2) \cdot 4 = 8 - 8 = 0.$$

Άρα, $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

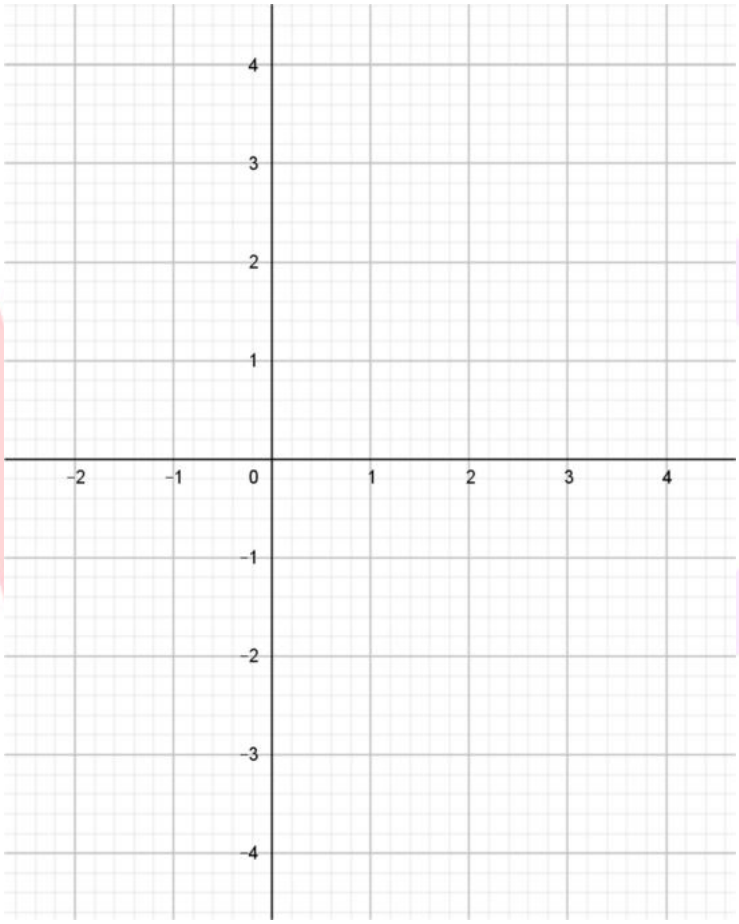
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}=(3,0)$ και $\vec{w}=(-3,4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β)

i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.



(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

(Μονάδες 3)

νέο φροντιστήριο

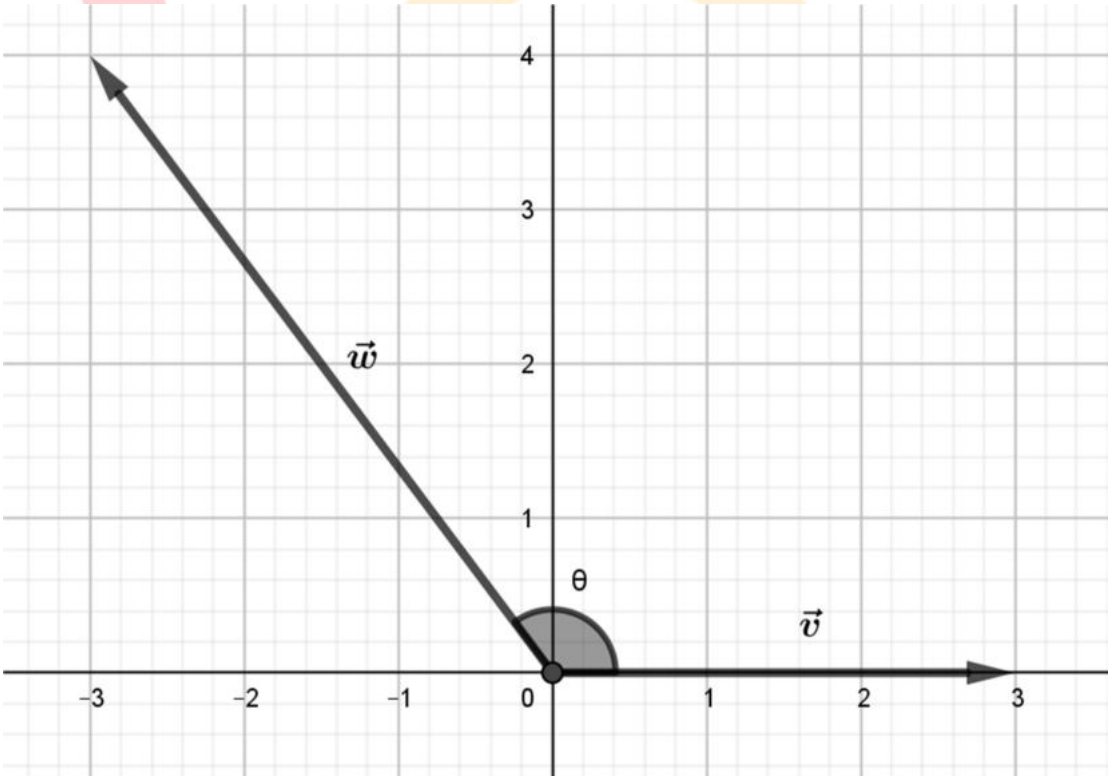
ΛΥΣΗ

α) Τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα, διότι

$$\det(\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12 \neq 0$$

β)

i. Στο σύστημα συντεταγμένων σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{v} = (3,0)$ και $\vec{w} = (-3,4)$ ως εξής:

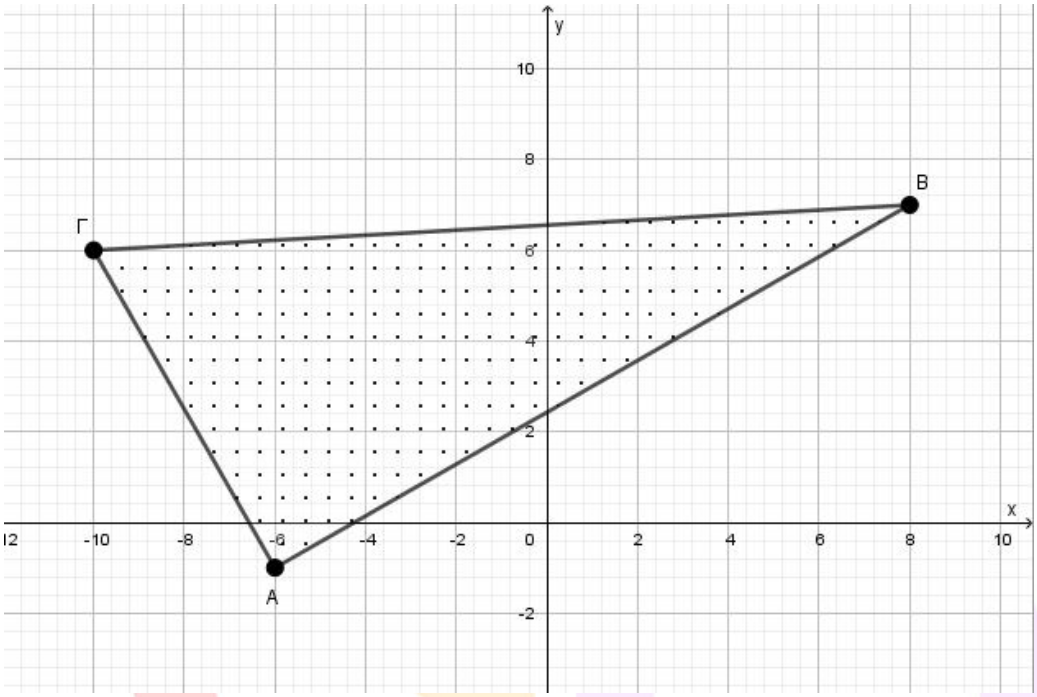


νέο φροντιστήριο

ii. Με βάση το σχήμα στο βi) ερώτημα, η γωνία θ που σχηματίζουν τα διανύσματα είναι αμβλεία.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

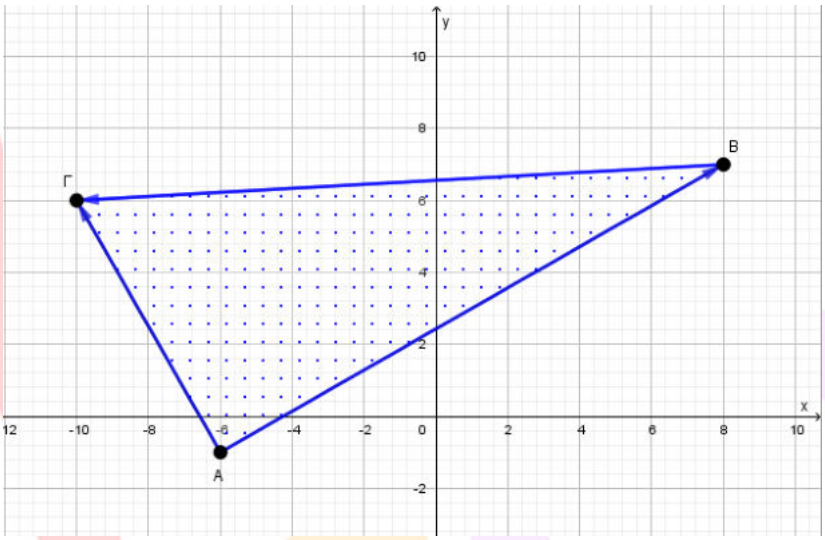
ΛΥΣΗ

α) $\overrightarrow{AB} = (8-(-6),\ 7-(-1)) = (14, 8)$,

$\overrightarrow{B\Gamma} = (-10-8, 6-7) = (-18, -1)$,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} = (-10-(-6), 6-(-1)) = (-4, 7)$.

β)



Στο σχήμα "φαίνεται" ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο, με ορθή γωνία την $\hat{A}$. Αλλά είναι αναγκαία η μαθηματική απόδειξη του ισχυρισμού. Πραγματικά είναι

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 14 \cdot (-4) + 8 \cdot 7 = -56 + 56 = 0$$

Επομένως, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

Εναλλακτική προσέγγιση: $\lambda_{AB} = \frac{4}{7}$, $\lambda_{A\Gamma} = -\frac{7}{4}$ και $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2 , -1)$ και $\vec{\beta} = (-3 , 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x , y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2\cdot(2 , -1) - (-3 , 2) = (4 , -2) + (3 , -2) = (7 , -4)$, οπότε

$\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = (2 , -1)\cdot (7 , -4) = 14 + 4 = 18$.

β) Επίσης: $\vec{\gamma} = (x , y)$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow (x , y)\cdot (2 , -1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow$

$y = 2x$ (1).

Λόγω της (1) το διάνυσμα γ γράφεται: $\vec{\gamma} = (x , 2x)$.

Έτσι το $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$x = -1$ ή $x = 1$.

Για $x = -1$ το $\vec{\gamma} = (-1 , -2)$, ενώ για $x = 1$ το $\vec{\gamma} = (1 , 2)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(-2 , 3), Β (0 , 8), Γ (5 , 3) και Δ (10 , 5). Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα x'x. (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\overrightarrow{AB}$ = ($x_B - x_A$, $y_B - y_A$) = (0 + 2 , 8 – 3) = (2 , 5).

Επίσης: $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ = ($x_\Delta - x_\Gamma$, $y_\Delta - y_\Gamma$) = (10 -5 , 5 – 3) = (5 , 2).

Οπότε: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ = (2 , 5)· (5 , 2) = 2·5 + 5·2 = 10 + 10 = 20.

β) Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}$ με τον άξονα x'x, τότε εφω= $\lambda_{\vec{u}}$ όπου $\lambda_{\vec{u}}$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u}$.

Είναι: $\vec{u}$ = $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ = (2 , 5) + (5 , 2) = (7 , 7), άρα εφω = $\lambda_{\vec{u}} = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{7}{7}$ = 1.

Αφού το διάνυσμα $\vec{u}$ έχει θετικές συντεταγμένες, θα βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Έτσι από τις σχέσεις εφω = 1 και $0 \leq \omega < \pi/2$, προκύπτει ότι ω = $\frac{\pi}{4}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1) , $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ (2) και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$ (3).

α) Από την (3) $\Leftrightarrow |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$

$9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}^2 = -\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2$.

Η τελευταία σχέση, λόγω της (1) δίνει: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{3}{8}$.

β) Επίσης: $\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$.

Η τελευταία ισότητα λόγω του ερωτήματος (α) και των (1), (2) δίνει:

$\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{3\cdot 4}{8\cdot\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{5\pi}{6}$ ή 150^0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A, B, Γ και Δ. (Μονάδες 8)

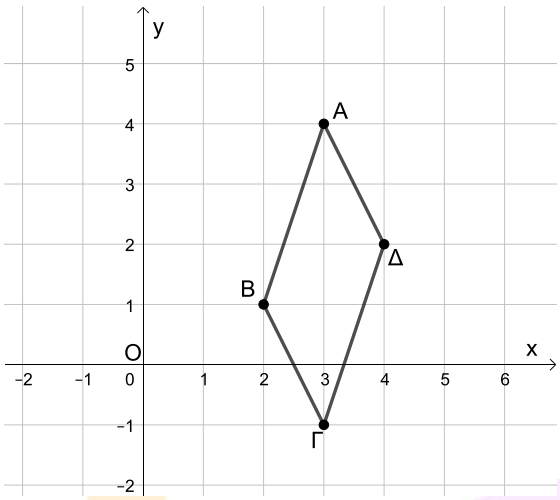
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)



β) Είναι $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$, οπότε οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ θα είναι

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (2-3,\ 1-4) = (-1,-3)\,,$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta\,, y_\Gamma - y_\Delta) = (3-4\,,-1-2) = (-1\,,-3).$$

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ θα έχουν ίσα μέτρα και θα είναι παράλληλα χωρίς να συμπίπτουν. Επομένως οι πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ θα είναι ίσες και παράλληλες, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

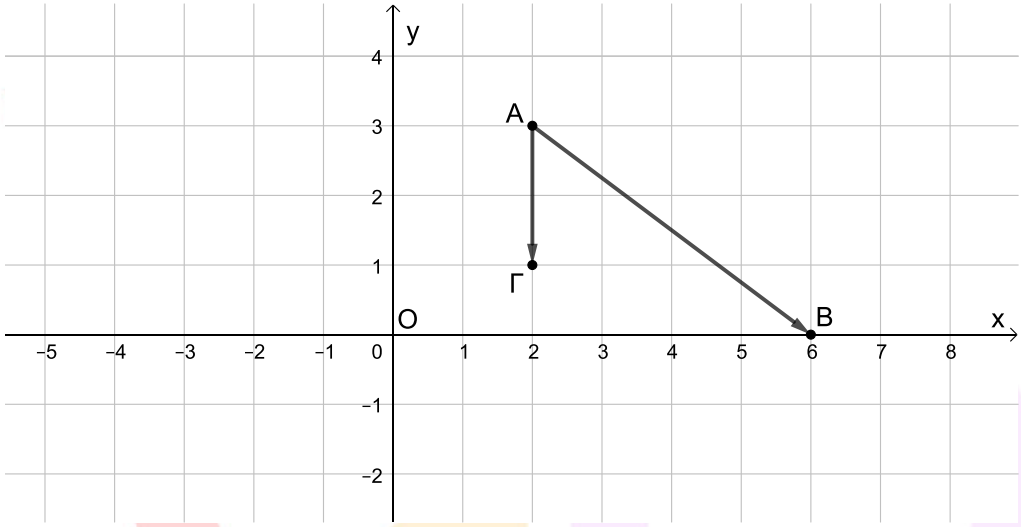
ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4\,,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (0\,,-2)$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 13)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι τα σημεία A , B και Γ έχουν συντεταγμένες $A(2\,,3)$, $B(6\,,0)$ και $\Gamma(2\,,1)$. Επομένως οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ θα είναι

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (6-2\,,\ 0-3\,) = (4\,,\ -3\,) \text{ και}$$

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A\,, y_\Gamma - y_A) = (2-2\,,\ 1-3\,) = (0\,,\ -2\,)\,.$$

β) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$, όπου $(x_1\,,\ y_1)$ και $(x_2\,, y_2)$ είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$, από το προηγούμενο ερώτημα, θα έχουμε

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 4 \cdot 0 + (-3)\cdot(-2) = 0 + 6 = 6.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-1,1)$ και $\vec{\gamma} = (-5,-5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για τη γωνία ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y_{\vec{\beta}}}{x_{\vec{\beta}}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Αφού είναι $x_{\vec{\beta}} < 0$ και $y_{\vec{\beta}} > 0$, για τη γωνία ω θα ισχύει:

$$\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$$

Άρα, $\omega = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

β) Είναι:

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{x_{\vec{\gamma}}^2 + y_{\vec{\gamma}}^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{x_{\vec{\beta}}^2 + y_{\vec{\beta}}^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Επομένως, $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

γ) Ζητάμε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ για τους οποίους ισχύει η ισότητα:

$$\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$(-5,-5) = \lambda(2,3) + \mu(-1,1)$$

$$(-5,-5) = (2\lambda-\mu, 3\lambda + \mu)$$

Επομένως, είναι:

$$2\lambda-\mu = -5 \quad (1) \quad \text{και} \quad 3\lambda + \mu = -5 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$5\lambda = -10 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2$$

Αντικαθιστούμε στην (2), οπότε:

$$3(-2) + \mu = -5 \quad \text{ή} \quad \mu = -5 + 6 = 1$$

Άρα, το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ γράφεται ως εξής:

$$\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{w} = (-10,2)$ και τα σημεία $A(-1,2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι $\overrightarrow{AB}=(\beta-(-1),0-2)=(\beta+1,-2)$.

Αφού τα διανύσματα $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα θα ισχύει $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Άρα $1\cdot(\beta+1)+1\cdot(-2)=0\Leftrightarrow\beta+1-2=0\Leftrightarrow\beta=1$.

β) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\overrightarrow{A\Gamma}=(0-(-1),\gamma-2)=(1,\gamma-2)$.

Αφού τα διανύσματα $\vec{w},\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα, η ορίζουσά τους θα ισούται με μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix}-10 & 2\\ 1 & \gamma-2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-10(\gamma-2)-2\cdot1=0\Leftrightarrow\gamma=\frac{9}{5}.$$

γ) Από τα ερωτήματα α), β) έχουμε ότι $\overrightarrow{AB}=(2,-2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(1,-\frac{1}{5}\right)$.

Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot1+(-2)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=2+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$

και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ (1) και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma} = 0$ (2).

Οπότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$, από την οποία λόγω των (1) παίρνουμε:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 4\cdot5\cdot\text{συν}\frac{2\pi}{3} = 20\cdot(-\frac{1}{2}) = -10.$

β) Έχουμε: $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \Longrightarrow \vec{\gamma}^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 \Longrightarrow$

$|\vec{\gamma}|^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 \Longrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9|\vec{\beta}|^2$,

η οποία λόγω της (1) και του ερωτήματος (α) γράφεται:

$|\vec{\gamma}|^2 = 4\cdot4^2 + 12\cdot(-10) + 9\cdot5^2 \Longrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 64 - 120 + 225 \Longrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 169 \Longrightarrow |\vec{\gamma}| = 13.$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

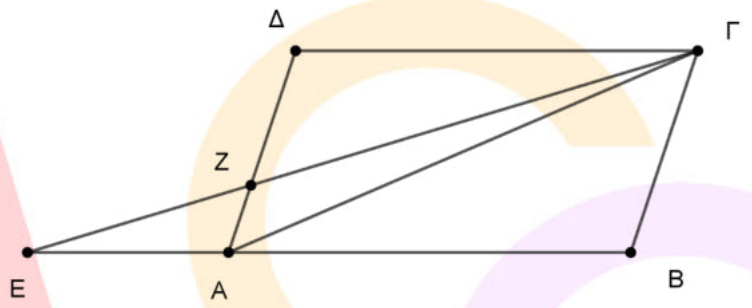
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$. (Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αφού είναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{AZ}$ γράφονται:

$$\vec{AE}=-\frac{1}{2}\cdot\vec{AB}=-\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha} \text{ και } \vec{AZ}=\frac{1}{3}\cdot\vec{A\Delta}=\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}.$$

τότε τα διανύσματα $\vec{EZ}$ και $\vec{Z\Gamma}$ έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}-\left(-\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta} \text{ και}$$

$$\vec{Z\Gamma}=\vec{A\Gamma}-\vec{AZ}=\vec{AB}+\vec{A\Delta}-\vec{AZ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}$$

β) Επειδή $\vec{EZ}=\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\vec{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}$ έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}=2\left(\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}\right)=2\overrightarrow{EZ} \text{ ή } \vec{Z\Gamma}=2\vec{EZ}.$$

γ) Επειδή είναι $\overrightarrow{Z\Gamma}//\overrightarrow{EZ}$ και τα διανύσματα έχουν κοινό άκρο το σημείο Z έχουμε το συμπέρασμα ότι τα σημεία Z, E και Γ είναι συνευθειακά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

(Μονάδες 11)

β)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ τότε:

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (3,1) \Leftrightarrow (x_\Gamma - 0, y_\Gamma - 5) = (3,1) \Leftrightarrow$$
$$x_\Gamma = 3 \text{ και } y_\Gamma - 5 = 1 \Leftrightarrow y_\Gamma = 6.$$

Άρα, $\Gamma(3,6)$.

β)

i. Είναι

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (4-3, 5-6) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (1,-1).$$

ii. Έχουμε ότι:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - (-3)\cdot 1 = -3 + 3 = 0.$$

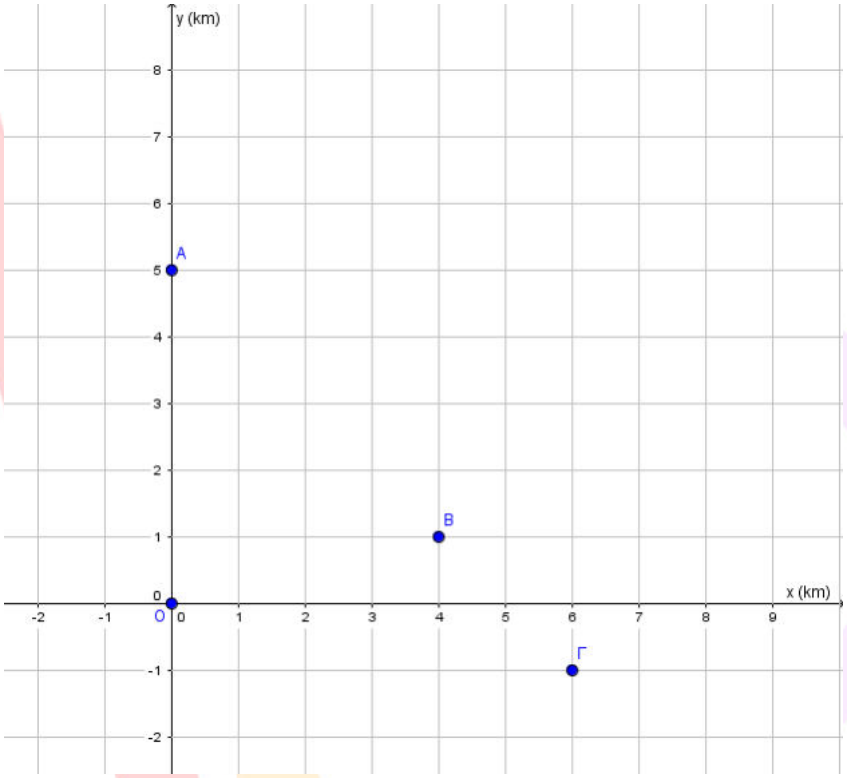
(Εναλλακτικά: $\overrightarrow{AB} = (3,-3) = 3(1,-1) = 3\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.)

Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5), B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ.

(Μονάδες 12)

νεο φροντιστηριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $\overrightarrow{AB} = (4-0, 1-5) = (4, -4)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = (6-4, -1-1) = (2, -2)$.

ii. Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$.

Επομένως $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{B\Gamma}$ και αφού υπάρχει κοινό σημείο το *B*, τότε τα σημεία *A, B, Γ* είναι συνευθειακά.

β) Είναι:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$.

Επομένως έχουμε ότι $|\overrightarrow{AB}| = 2\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>:

Επειδή $\overrightarrow{AB} = (4, -4) = 2 \cdot (2, -2) = 2\,\overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 2\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = (3,-1)-(2,1) = (1,-2)$.

β) Είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = (2,1)\cdot(1,-2) = 2-2 = 0$ οπότε $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$.

Επίσης $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

Αφού $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

γ) Είναι $(AB\Gamma) = \dfrac{(AB)\cdot(B\Gamma)}{2} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|}{2} = \dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5}{2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,2)$, $\vec{\beta} = (-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Δίνονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε

$$\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 2(3,2) + 3(-2,1) = (0,7).$$

β) Υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -6 + 2 = -4.$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$

γ) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{v}$ υπολογίζεται

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \left(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right) = 2|\vec{\alpha}|^2 + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 13 + 3(-4) = 26 - 12 = 14.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα τότε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

Άρα, $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-4) - (-8) \cdot 1 = -8 + 8 = 0$, ισχύει.

β) Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ γίνεται

$\vec{\beta} = (-8, -4) = -4(2, 1) = -4\vec{\alpha}$.

γ) Παίρνουμε τα μέτρα στη σχέση του ερωτήματος β).

Άρα, $|\vec{\beta}| = |-4||\vec{\alpha}| = 4|\vec{\alpha}|$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο Α δεν είναι σημείο της ε.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του Α από το Β και να αποδείξετε ότι η προβολή του Α στην ευθεία ε είναι το Β.

(Μονάδες 09)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε ότι το σημείο $B(1,0)$ ανήκει στην ε, αρκεί να δείξουμε ότι

$1-2\cdot 0=1$ ή $1=1$, που ισχύει.

Για το σημείο $A(0,2)$ έχουμε: $0-2\cdot 2=-4\neq 1$, επομένως το σημείο Α δεν είναι σημείο της ε, αφού οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

β) Έχουμε: $d(A,\varepsilon)=\dfrac{|0-2\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

γ) Έχουμε: $(AB)=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$.

Επομένως $(AB)=d(A,\varepsilon)$, δηλαδή η προβολή του Α στην ευθεία ε είναι το Β.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (-1,3), $\vec{\beta}$ = (-2, $-\frac{1}{2}$) και $\vec{v} = (x^2, x-1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u}$ = (3,4) και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

(Μονάδες 09)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ = (-1,3) – 2(-2, -$\frac{1}{2}$) = (-1,3) + (4,1) = (-1+4,3+1) = (3,4)

β) Για να είναι κάθετα τα διανύσματα θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = 0 ή (3,4)·$(x^2, x-1) = 0$ ή $3x^2+4(x-1) = 0$ ή $3x^2+4x-4 = 0$. Η διακρίνουσα είναι 64 και οι ρίζες x = $\frac{2}{3}$ και x = -2.

γ) Για να είναι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ συγγραμμικά πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών τους να είναι μηδέν.

$\begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$ ή $-\frac{1}{2}x^2 - (-2)(x-1) = 0$ ή $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$ ή $x^2 - 4x + 4 = 0$ ή $\chi = 2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x′x, y′y τα $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ και $\overrightarrow{OB} = 6\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, (Μονάδες 8)

ii. $\overrightarrow{OM} = \vec{\jmath}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$. (Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι

i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 6\vec{\imath} - \vec{\jmath} - (3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) = 6\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}.$

ii) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{5}\left(2(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) - (6\vec{\imath} - \vec{\jmath})\right) = \frac{1}{5}(6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 6\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \frac{1}{5}(5\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}.$

β) Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\imath}$ και $\vec{\jmath}$ ισχύουν $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$ και $\vec{\jmath}^2 = 1$. Επομένως,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = (3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}) \cdot \vec{\jmath} = (3\vec{\imath}) \cdot \vec{\jmath} - (3\vec{\jmath}) \cdot \vec{\jmath} = 3(\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}) - 3 \cdot \vec{\jmath}^2 = 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3.$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

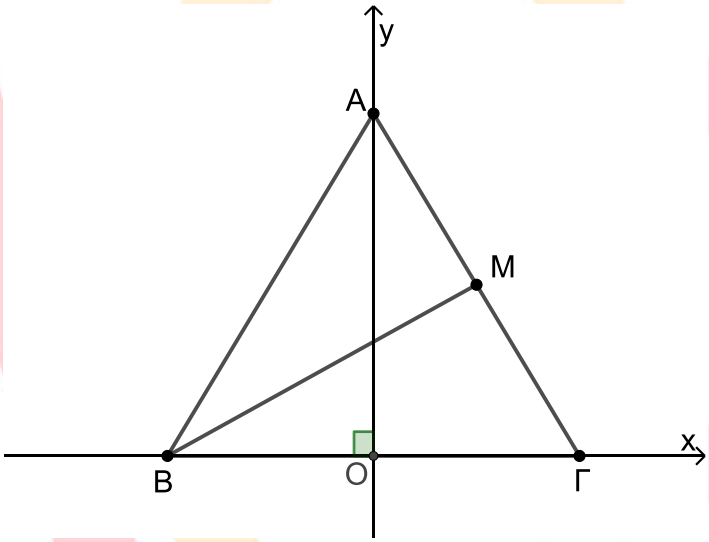
Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει βάση ΒΓ και ύψος ΑΟ. Η κορυφή Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές Β και Γ είναι σημεία του άξονα x′x , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(ΒΓ) = 12$, $(ΑΟ) = 8$ και Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A(0\,,8)$, $B(-6\,,0)$ και $Γ(6\,,0)$. (Μονάδες 9)

ii. $M(3\,,4)$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΒΜ. (Μονάδες 7)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i) Επειδή το Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και $(OA) = 8$ θα είναι $y_A = 8$, επομένως $A(0\,,8)$.

Το Ο είναι το μέσο του ΒΓ και τα Β και Γ είναι σημεία του αρνητικού και του θετικού ημιάξονα των x , αντίστοιχα.

Επειδή $(B\Gamma) = 12$, θα είναι $|x_B| = |x_\Gamma| = \frac{(B\Gamma)}{2} = \frac{12}{2} = 6$, επομένως $B(-6\,,0)$ και $\Gamma(6\,,0)$.

ii) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΓ είναι:

$x_M = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$,

$y_M = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{8+0}{2} = 4$,

άρα $M(3\,,4)$.

β) Το μήκος της διαμέσου ΒΜ είναι

$(BM) = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{(3+6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{97}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο