Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 1 Διανύσματα

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(-3,-1)$, $B(0,3)$ και $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 4$.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι αντίστοιχα

$$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A\,, y_M - y_A) = (x+3\,, y+1)\,,$$

$$\overrightarrow{MB} = (x_B - x_M\,, y_B - y_M) = (-x\,, 3-y)\,,$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (3\,, 4)\ .$$

β) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι αντίστοιχα

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2}\,,$$

$$|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}\,,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

γ) Για το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων ισχύει

$|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}| \leq |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}|$ ή $|\overrightarrow{AB}| \leq |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}|$ ή $5 \leq |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}|$, άρα

$$|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5.$$

δ) Από το γ) ερώτημα για οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου ισχύει $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$, οπότε αντικαθιστώντας από το β) ερώτημα θα έχουμε

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \geq 5\,.$$

Οπότε δεν υπάρχει ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4.$$

Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath} + \lambda\vec{\jmath} \text{ και } \overrightarrow{OB} = (\lambda+1)\vec{\imath} + (\lambda+3)\vec{\jmath}\,, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda-1)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ. (Μονάδες 7)

γ) Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

$$= (\lambda+1)\vec{\imath} + (\lambda+3)\vec{\jmath} - 2\vec{\imath} - \lambda\vec{\jmath} = (\lambda+1-2)\vec{\imath} + (\lambda+3-\lambda)\vec{\jmath} = (\lambda-1)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}.$$

β) Η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με

$$(AB) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(\lambda-1)^2+3^2} = \sqrt{(\lambda-1)^2+9}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

γ) Είναι $(AB) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2+9} = 5 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+9 = 25 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (\lambda-1 = 4 \text{ ή } \lambda-1 = -4\,) \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -3.$$

δ) Για κάθε πραγματικό αριθμό λ έχουμε

$(\lambda-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+9 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2+9} \geq \sqrt{9} \Leftrightarrow (AB) \geq 3,$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda-1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$

Άρα, για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 1$ η απόσταση των σημείων A και B είναι $(AB) > 3$.

Όταν $\lambda = 1$ η απόσταση των σημείων A και B είναι $(AB) = 3$ και αυτή είναι η μικρότερη δυνατή τιμή της.

(Άλλος τρόπος: Η απόσταση των σημείων A και B γράφεται:

$$(AB) = \sqrt{(\lambda-1)^2+9} = \sqrt{\lambda^2-2\lambda+10}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

και παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή, όταν το τριώνυμο $\lambda^2-2\lambda+10$, παρουσιάζει ελάχιστο.

Αυτό συμβαίνει όταν $\lambda = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 10$, οπότε το τριώνυμο $\lambda^2-2\lambda+10$, παρουσιάζει ελάχιστο για $\lambda = -\dfrac{-2}{2\cdot 1} = 1.$)

Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(0 -1), Β(λ, 1) και Γ(λ-2, λ-3), όπου λ∈ R .

α) Να βρείτε τις τιμές του λ ∈ R ώστε :

i. Τα σημεία Α, Β και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A}$ = 90º. (Μονάδες 7)

β) Για λ = - 2 ,να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Για να σχηματίζουν τα σημεία Α, Β και Γ τρίγωνο θα πρέπει να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία ή αλλιώς τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ να μην είναι παράλληλα. Είναι $\overrightarrow{AB}$ = (λ , 1+1) = (λ ,2) και $\overrightarrow{A\Gamma}$ = (λ-2, λ-3+1) = (λ-2, λ-2) . Γνωρίζουμε ότι :

$\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{A\Gamma}$ ⇔ det ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$) = 0 ⇔ $\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$ = 0 ⇔ λ(λ-2) – 2 (λ-2) = 0 ⇔ $(\lambda-2)^2$ = 0 ⇔ λ = 2.

Δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα ⇔ λ = 2. Οπότε τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο για κάθε τιμή του λ που είναι διαφορετική από το 2.

ii. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A}$ = 90º, το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ θα ισούται με μηδέν.

Όμως $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ = 0 ⇔λ (λ – 2) + 2 (λ – 2) = 0 ⇔(λ + 2) (λ – 2) = 0 ⇔ λ + 2 = 0 ή λ – 2 = 0 ⇔ λ = 2 ή λ = -2.

Στο ερώτημα αi) δείξαμε ότι για λ = 2 τα σημεία Α , Β και Γ δεν σχηματίζουν τρίγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A}$ = 90º μόνο για την τιμή λ = -2.

β) Για λ = -2, $\overrightarrow{AB}$ = (-2, 2) , $\overrightarrow{A\Gamma}$ = (-4 , -4) και από ερώτημα αii) τα σημεία Α(0, -1), Β(-2, 1) και Γ(-4, -5) σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{A}$ = 90º.

i. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ = 0.

ii. (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right|$, αλλά

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - 2(-4) = 16$, οπότε (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2} \cdot 16$ = 8.

Ή εναλλακτικά Β' τρόπος : (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ $|\overrightarrow{AB}|$ $|\overrightarrow{A\Gamma}|$, όμως $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ και $|\overrightarrow{A\Gamma}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$, οπότε (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ 2 $\sqrt{2}$ 4 $\sqrt{2}$ = 8.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$.

(Μονάδες 9)

ii. $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$.

(Μονάδες 9)

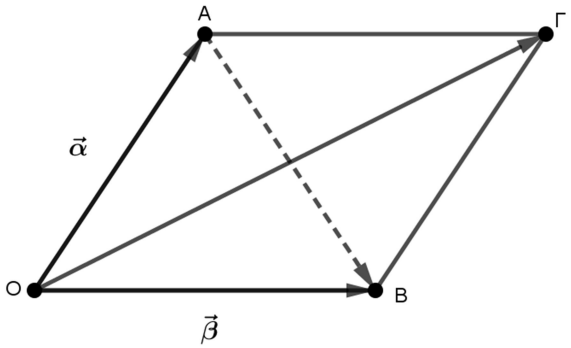
β) Αν $\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$, να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Οπότε από τον λεγόμενο «κανόνα του παραλληλογράμμου» προκύπτει: $\overrightarrow{\text{ΟΓ}} = \overrightarrow{\text{ΟΑ}} + \overrightarrow{\text{ΟΒ}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Επίσης $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \overrightarrow{\text{ΟΒ}} - \overrightarrow{\text{ΟΑ}} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

i. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right)^2 = \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2.$$

ii. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right)^2 = \left(\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right)^2 = \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 = \left|\vec{\beta}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\alpha}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\left|\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right| = \left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \overset{\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow}$$

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}.$$

Άρα το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο γιατί η γωνία $\hat{\text{Ο}}$ είναι ορθή.

Εναλλακτικά, με δεδομένο ότι $\left|\overrightarrow{\text{ΟΓ}}\right| = \left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right|$, το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο γιατί οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2\left|\vec{\beta}\right|^2 \quad (1)$$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο $OA\Gamma B$ με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

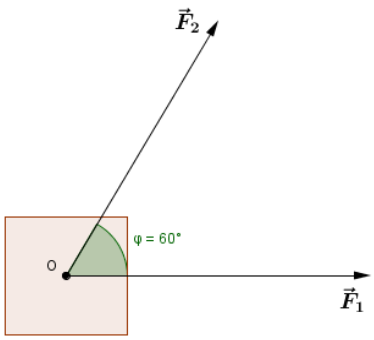
i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

(Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

(Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα $10\ N$ (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι $60°$. Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



(Μονάδες 10)

νέο ψφυν πιστήριο

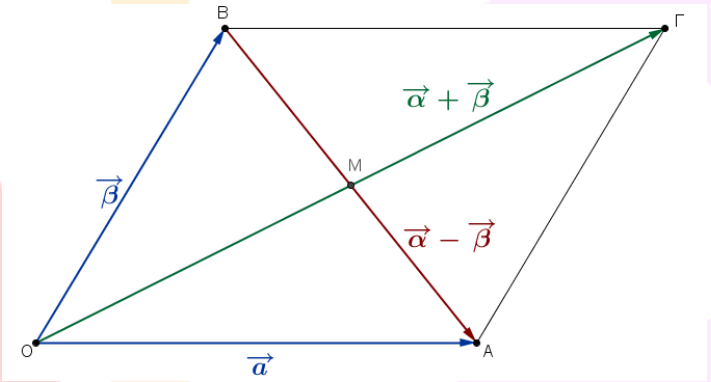
ΛΥΣΗ

α) Ισχύει:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2+(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2+\vec{\alpha}^2-2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=$$
$$2\vec{\alpha}^2+2\vec{\beta}^2=2|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\beta}|^2.$$

β)

i. Σε κάθε παραλληλόγραμμο $OA\Gamma B$, αν οι δύο πλευρές του συμβολισθούν με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, τότε η μία διαγώνιος εκφράζει το άθροισμα τους, δηλαδή $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και η άλλη διαγώνιος εκφράζει τη διαφορά τους, δηλαδή $\overrightarrow{BA}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.



ii. Επομένως, σε κάθε παραλληλόγραμμο $OA\Gamma B$ ισχύει:

$$(O\Gamma)^2+(AB)^2=2(OA)^2+2(OB)^2 \text{ ή}$$

$$(O\Gamma)^2+(AB)^2=2[(OA)^2+(OB)^2]$$

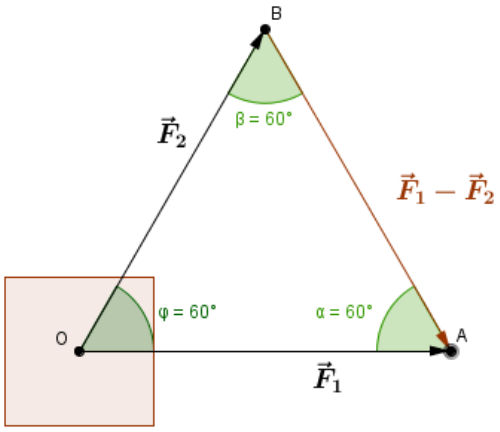
Δηλαδή, το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων δύο διαδοχικών πλευρών του.

γ) Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι το διανυσματικό τους άθροισμα, δηλαδή

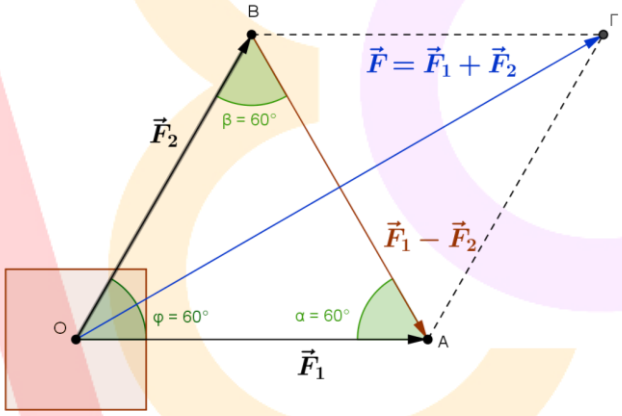
$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$$

Είναι $|\vec{F_1}|=|\vec{F_2}|=10\ N$. Επομένως $(OA)=(OB)=10$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νεο φροντιστηριο



Αφού η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι $60°$, το τρίγωνο OAB που σχηματίζεται είναι ισόπλευρο με πλευρά 10 και $(AB) = |\vec{F}_1 - \vec{F}_2| = 10$. Σχεδιάζοντας το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα δύο διανύσματα, προκύπτει το παρακάτω σχήμα.



Από τη σχέση (1) λοιπόν είναι:

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|^2 + |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 = 2|\vec{F}_1|^2 + 2|\vec{F}_2|^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = 2|\vec{F}_1|^2 + 2|\vec{F}_2|^2 - |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{F}|^2 = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 - 10^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = 3 \cdot 10^2 \Leftrightarrow |\vec{F}| = 10\sqrt{3}$$

Επομένως, η συνισταμένη $\vec{F}$ των δύο δυνάμεων έχει μέτρο $|\vec{F}| = 10\sqrt{3}\ N$ και την κατεύθυνση της διαγωνίου $O\Gamma$, όπως φαίνεται στο ανωτέρω σχήμα.

νέο φροντιστηριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε σημεία εσωτερικά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB}=\kappa\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\cdot\overrightarrow{AE}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$,τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

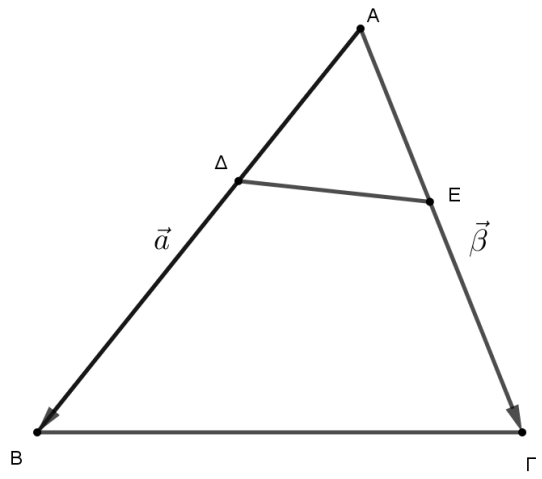
β)

i. Αν κ=λ , να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} // \overrightarrow{\Delta E}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa|\overrightarrow{\Delta E}|$. (Μονάδες 10)

ii. Αν κ=λ=2, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



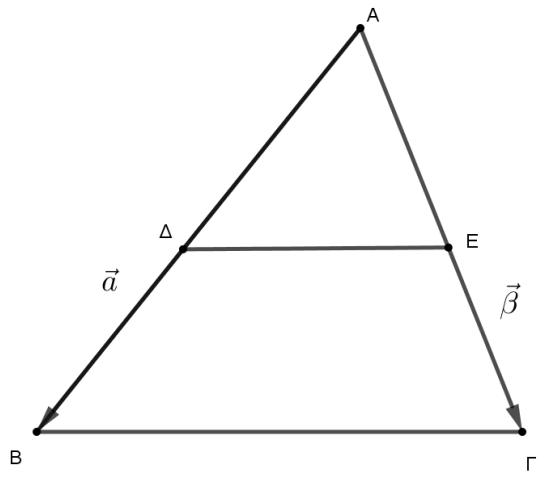
α) Είναι $\overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΔΑ} + \overrightarrow{ΑΕ} = -\frac{1}{κ}\cdot\vec{\alpha} + \frac{1}{\lambda}\cdot\vec{\beta}$

$\overrightarrow{BΓ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AΓ} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β)

i. Αν κ=λ τότε $\overrightarrow{ΒΓ} = = -\vec{\alpha} + \vec{\beta} = κ(-\frac{1}{κ}\vec{\alpha} + \frac{1}{κ}\vec{\beta}) = κ\cdot\overrightarrow{ΔΕ}$ άρα $\overrightarrow{ΒΓ} // \overrightarrow{ΔΕ}$ και $|\overrightarrow{ΒΓ}| = κ\cdot|\overrightarrow{ΔΕ}|$

ii.



Αν κ=λ=2 τότε τα σημεία Δ και Ε είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα , οπότε $\overrightarrow{ΒΓ} // \overrightarrow{ΔΕ}$ και $|\overrightarrow{ΒΓ}| = 2\cdot|\overrightarrow{ΔΕ}|$, επομένως ΔΕ//ΒΓ και ΒΓ=2·ΔΕ. Αποδείξαμε δηλαδή ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.