Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Γ Λυκείου

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 1 Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Θέμα 4

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$$(gof)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$.

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f.

(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \to 0} h(x)$$

(Μονάδες 07)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε: $g(f(x)) = |συνx| \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)} = |συνx| \Leftrightarrow 1 - f^2(x) = συν^2x \Leftrightarrow$

$$f^2(x) = 1 - συν^2x \Leftrightarrow f^2(x) = ημ^2x \Leftrightarrow |f(x)| = |ημx| \quad (1)$$

ii. Για τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ ισχύει ότι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |ημx| = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + 0 \\ x = 2κπ + π - 0 \end{cases}, κ \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ \\ x = (2κ+1)π \end{cases} \Leftrightarrow x = λπ, λ \in Z.$$

Επειδή όμως η f είναι ορισμένη στο $[0, π]$, τότε έχουμε: $0 \le λπ \le π \Leftrightarrow 0 \le λ \le 1$.

Επομένως είναι $x = 0$ ή $x = π$.

β) Ως γνωστόν, αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.

Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0, π)$, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, π)$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, π)$.

Επειδή όμως $ημx > 0$ για κάθε $x \in (0, π)$ και $f(0) = f(π) = 0$, από την (1) έχουμε ισοδύναμα ότι

$$f(x) = ημx, x \in [0, π] \text{ ή } f(x) = -ημx, x \in [0, π].$$

Αλλά $f\left(\frac{π}{2}\right) = 1$, επομένως η ζητούμενη συνάρτηση, είναι η

$$f(x) = ημx, x \in [0, π].$$

γ) Είναι $h(x) = \frac{1}{ημx - x}$, $x \in (0, π]$.

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \to 0} (ημx - x) = 0$$

Είναι γνωστό ότι $|ημx| \le |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Επειδή $x \in (0, π]$, είναι $ημx \ge 0$ και $x > 0$, επομένως έχουμε:

$$ημx < x \Leftrightarrow ημx - x < 0.$$

Άρα

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{ημx - x} = -\infty$$