Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Γ Λυκείου

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 2 Διαφορικός Λογισμός

Θέμα 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

(Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται $f(x)=x(x-2)$, οπότε με $\alpha=0$ και $\beta=2$ παίρνουμε

$$f(\alpha)=f(0)=0 \text{ και } f(\beta)=f(2)=0$$

Η συνάρτηση δεν αντιστρέφεται αφού υπάρχουν διαφορετικοί αριθμοί α, β ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$, οπότε δεν είναι «1-1».

β) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x-2=2(x-1)$.

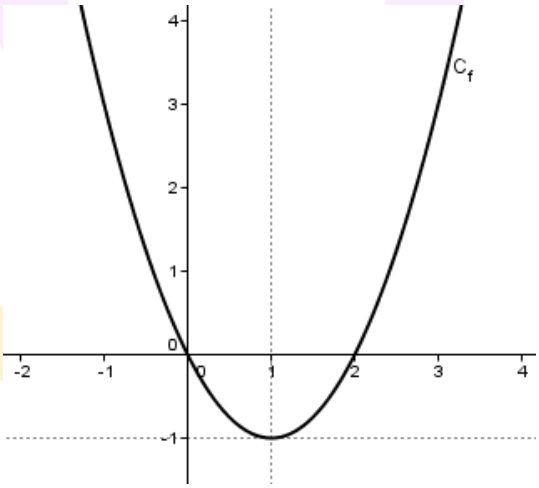
Το πρόσημο της παραγώγου είναι το ίδιο με το πρόσημο του παράγοντα $(x-1)$ και φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Από τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$.

Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με $f(1)=1-2=-1$.

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f, που είναι η παραβολή του διπλανού σχήματος, τέμνει τον x'x στο σημείο $(2, 0)$, στην αρχή Ο και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=-1$.

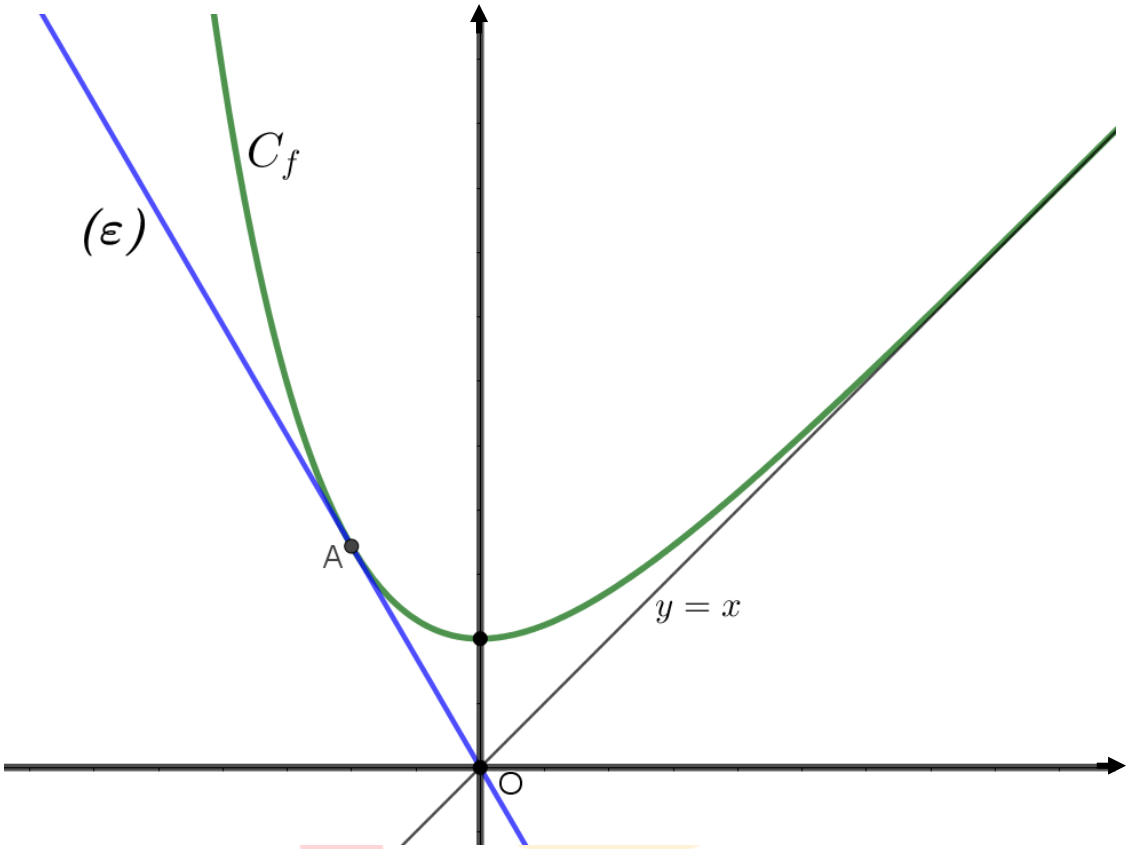


νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο R συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{f(x)}$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός $f'(-1)$ εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης ευθείας (ε) της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο $A(-1, f(-1))$ η οποία ισούται με

$\frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{f(-1) - 0}{-1 - 0} = \frac{e - 1}{-1} = 1 - e.$

Αφού η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η εξίσωση της θα είναι

$y = f'(-1) \cdot x$, δηλαδή $(\varepsilon): y = (1 - e)x.$

β) Αφού η ευθεία $y = 1 \cdot x + 0$ είναι ασύμπτωτη της της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$, σύμφωνα με το θεώρημα σελ. 162 του σχολικού βιβλίου, θα έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0.$

γ) Έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(f(x) - x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{αν } x\in[-1,2] \\ x-1, & \text{αν } x\in(2,5] \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$.

(Μονάδες 06)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,2)$, $(2,5]$ ως πολυωνυμική.

Στο $x_0=2$ έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-3)=1$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$.

$f(2)=2^2-3=1$, άρα $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 2.

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $[-1,5]$.

β) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=4$$

και

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-1-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$, άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$.

γ) Το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$ έχει τις εξής υποθέσεις:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,5]$.
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,5)$.

Η υπόθεση της συνέχειας στο $[-1,5]$ ικανοποιείται λόγω του ερωτήματος (α) ενώ η υπόθεση της παραγωγισιμότητας στο $(-1,5)$ δεν ικανοποιείται λόγω του ερωτήματος (β).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0 οπότε

$$\alpha = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1-1=0.$$

Συνεπώς $\alpha = 0$.

β) Είναι $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{\eta\mu x}{x}-0}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\eta\mu x}{x^2}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2x}\right) = 0,$$

οπότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ με $f'(0) = 0$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0$, δηλαδή είναι ο άξονας xx'.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, οπότε $f'(0)=2$.

β) Αφού η f είναι παραγωγίσμη στο 0 θα είναι και συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{2}{1}=2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45°.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αφού η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45°, έχουμε ότι $f'(0)=\varepsilon\phi 45^\circ=1$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι η $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=1\cdot x\Leftrightarrow y=x+1$.

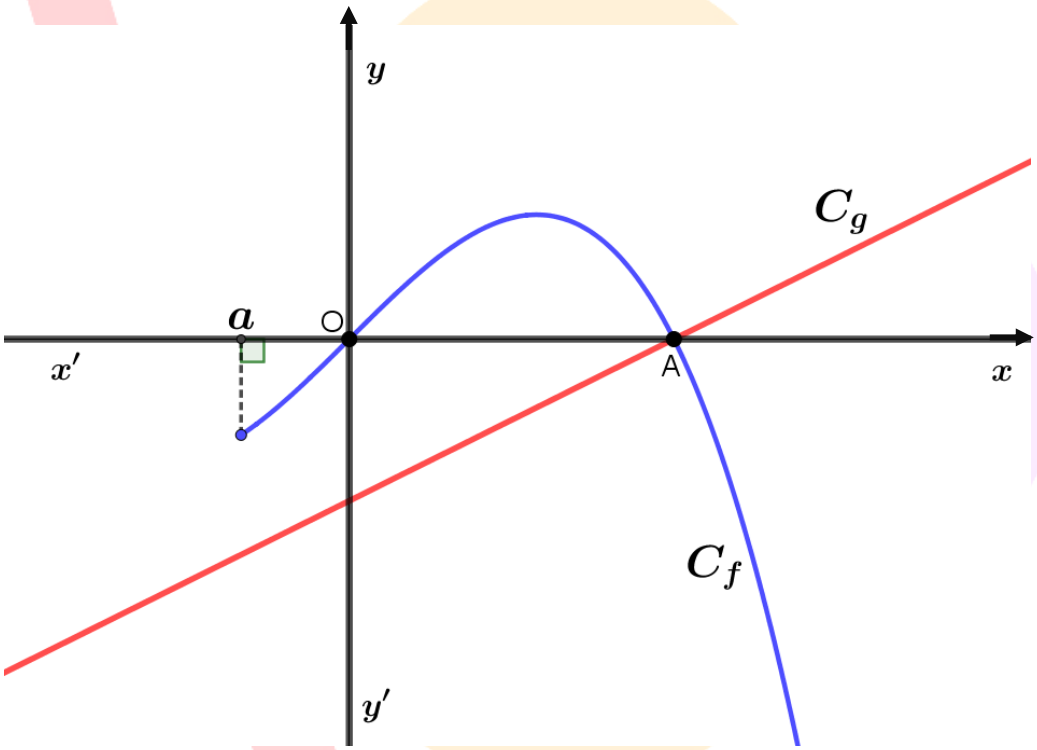
γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [a, +\infty) \to R$ και την συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2},\ x \in R$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1, 0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ εκτός από τα σημεία O και A.



α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{g(x)}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{g(x)}{f(x)}$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι $g(1) = 0$ και $g(x) < 0$ για x κοντά στο 1 από αριστερά, ενώ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$, καθώς η g είναι συνεχής στο 1 ως πολυωνυμική.

Ώστε $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{g(x)} = -\infty$.

Εναλλακτικά, έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{\frac{1}{2}(x-1)} = 2 \cdot \lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x-1}\right) = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1) = 0$ και $x - 1 < 0$ για x κοντά στο 1 από αριστερά.

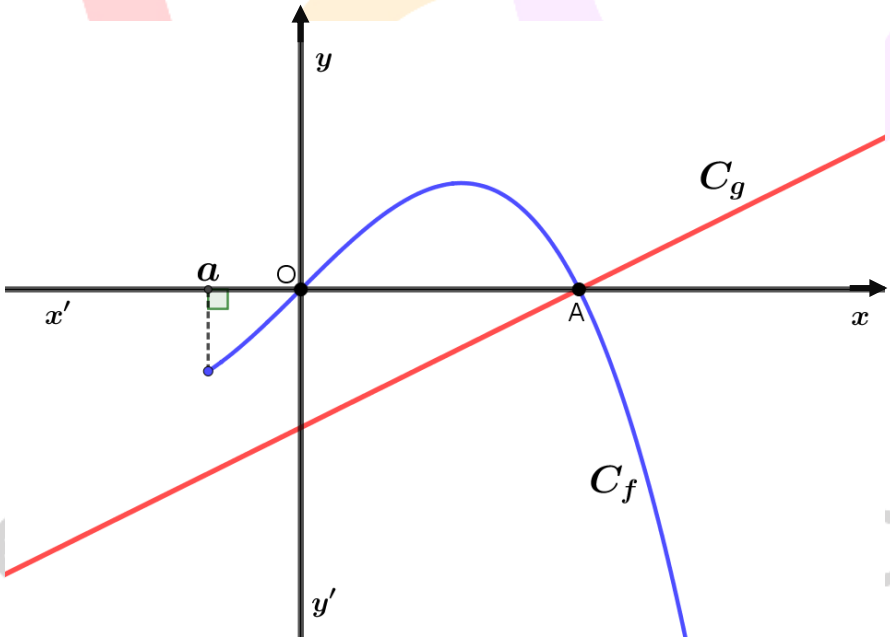
β) Γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν, άρα:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

γ) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$, ενώ $f(x) < 0$ για x κοντά στο μηδέν από αριστερά. Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[\frac{1}{2}(x-1)\right] = -\frac{1}{2} < 0$.

Έτσι, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{f(x)} \cdot \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$.



ΘΕΜΑ 2

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x)$.

(Μονάδες 8)

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Αφού η γραφική παράσταση της f έχει την ευθεία $(\varepsilon): y=3x-2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ θα είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ και το $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$ θα είναι ο σταθερός όρος της ευθείας (ε) δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=-2$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x+3x)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=-2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$.

γ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}-\frac{x}{x}}{\frac{xf(x)}{x}-\frac{3x^2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}-1}{f(x)-3x}=\frac{3-1}{-2}=-1.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x(\ln x-1)+1,\ x>0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x+1=x$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x)=\ln x-1+x\frac{1}{x}=\ln x-1+1=\ln x$$

- Αν $0<x<1$, τότε $\ln x<0$, οπότε $f'(x)<0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$.
- Αν $x>1$, τότε $\ln x>0$, οπότε $f'(x)>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Από την αλλαγή μονοτονίας της συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$. Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με $f(1)=1(-1)+1=0$.

β) Με $x>0$ έχουμε:

$$x\ln x+1=x \Leftrightarrow x\ln x-x+1=0 \Leftrightarrow x(\ln x-1)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

αφού από το ερώτημα α) έχουμε $f(1)=0$ και $f(x)>f(1)$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2+x, & x\le 0 \\ \eta\mu x, & x>0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o=0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $f'(0)=1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, μόνο όταν ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x), \quad (1)$$

Επειδή,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x^2 + x) = 0, \quad f(0) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \eta\mu x = 0$$

από την (1) προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

β) Με x κοντά στο $x_o = 0$ και

- $x < 0$, έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{-x^2+x}{x} = 1 - x$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}(1-x) = 1,$$

- $x > 0$, έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\eta\mu x}{x}$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και $f'(0) = 1$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_o = 0$ έχει εξίσωση που δίνεται από τον τύπο

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Εδώ έχουμε $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y = x$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \ln(x+1), & x\geq 0 \\ x^3, & x<0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o=0$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση είναι συνεχής για $x<0$ ως πολυωνυμική. Επίσης είναι συνεχής για $x>0$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Απομένει η συνέχεια της f στο $x_o=0$. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^3=0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \ln(x+1)=0=f(0)$$

Επειδή ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$, η f είναι συνεχής και στο $x_o=0$. Επομένως η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της που είναι το $\mathbb{R}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=3x^2>0 \text{, αν } x<0 \text{ και } f'(x)=\frac{1}{x+1}>0 \text{, αν } x>0$$

Επομένως η f έχει θετική παράγωγο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ και είναι συνεχής στο $x_o=0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο