Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 2 Η Ευθεία στο Επίπεδο

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(1,1), B(3,3)$.

α) Αν $M(x, y)$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έστω $M(x,y)$ σημείο του επιπέδου, τότε:

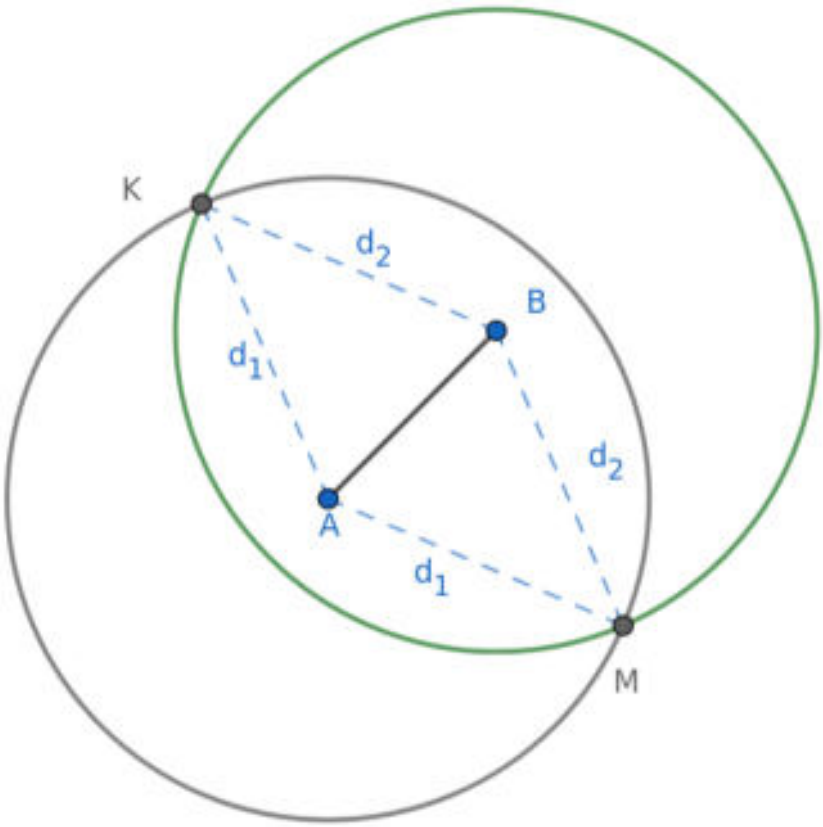
$d_1=(MA)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}, d_2=(MB)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$.

β) Ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, αν και μόνο αν ισαπέχει από τα άκρα του. Δηλαδή ισχύει $d_1=d_2$.

γ) Ισχύει ότι

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2$$

Η τελευταία ισότητα παριστάνει τη σχέση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες για τα σημεία τομής δύο κύκλων με κέντρα τα Α(1,1) και Β(3,3) αντίστοιχα και ίσες ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία Κ,Μ του σχήματος, τα οποία ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ.



Αναπτύσσοντας την τελευταία σχέση έχουμε:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9 \Leftrightarrow$$

$$-2x-2y+2=-6x-6y+18 \Leftrightarrow x+y-4=0$$

Δηλαδή όλα τα σημεία $M(x,y)$, τα οποία ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ, ισοδύναμα ικανοποιούν τη σχέση $x+y-4=0$, η οποία είναι επομένως η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

Εναλλακτικά, μπορεί να βρεθεί το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και στη συνέχεια η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στο ΑΒ σε αυτό το σημείο.

δ) Για να είναι το τρίγωνο ΣΑΒ ισόπλευρο, αρκεί $AB=d_1=d_2$ δηλαδή οι κύκλοι $(A,d_1),(B,d_2)$ να έχουν ακτίνα ίση με ΑΒ.

$d_1=d_2=\sqrt{(1-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}.$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής του κύκλου με ακτίνα $d_1=2\sqrt{2}$ κέντρου Α με τη μεσοκάθετο, λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=8\\ x+y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(4-x-1)^2=8\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1+9-6x+x^2=8\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-8x+2=0\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow$$

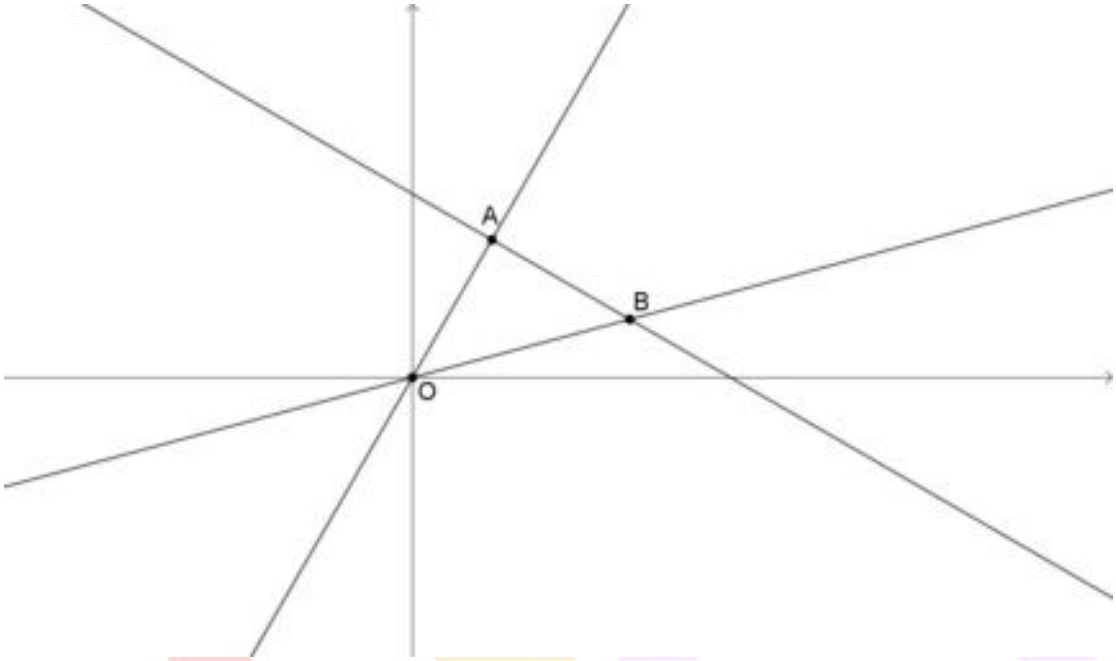
$$\begin{cases}x^2-4x+1=0\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2}\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\pm\sqrt{3}\\ y=4-(2\pm\sqrt{3})\end{cases}\Leftrightarrow(x,y)=(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3})\text{ ή }(x,y)=(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$$

Δηλαδή βρήκαμε δύο σημεία Σ, το οποίο ήταν αναμενόμενο, αφού πρόκειται για τα δύο σημεία συμμετρικά του ΑΒ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^{\circ}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi 15^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

(Μονάδες 6)

νεο φροντιστηριο

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας ΟΑ είναι $\lambda_{OA}=\frac{\sqrt{3}-0}{1-0}=\sqrt{3}$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση $y=\sqrt{3}\cdot x$. Η γωνία ω που σχηματίζει με τον $x'x$ έχει εφαπτομένη $\sqrt{3}$, οπότε είναι $\omega=60^{\circ}$.

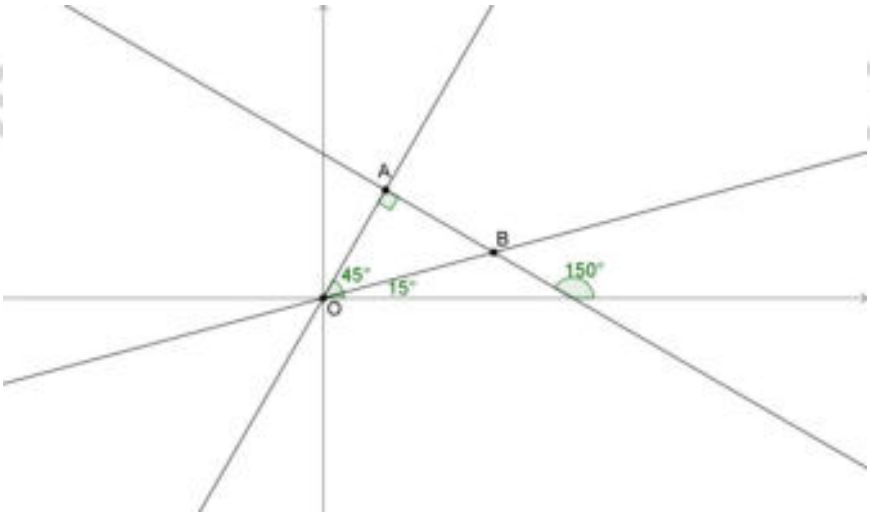
β) Η κλίση της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1-1}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(1,\sqrt{3})$ έχει εξίσωση $y-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Η γωνία ϕ που σχηματίζει με τον $x'x$ έχει εφαπτομένη $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε είναι $\phi=150^{\circ}$.

γ) Είναι $\lambda_{OA}\cdot\lambda_{AB}=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-1$, δηλαδή $OA\perp AB$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^{\circ}$.

Επίσης $(OA)=\sqrt{(1-0)^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2}=2$, $(AB)=\sqrt{(\sqrt{3}+1-1)^2+(\sqrt{3}-1-\sqrt{3})^2}=2$ και αφού $(OA)=(AB)$ το ΟΑΒ είναι και ισοσκελές.

δ) Αν θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΟΒ με τον $x'x$, είναι $\theta=\omega-A\hat{O}B=60^{\circ}-45^{\circ}=15^{\circ}$, αφού $A\hat{O}B=45^{\circ}$ δεδομένου ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^{\circ}$. Όμως $\varepsilon\varphi\theta=\varepsilon\varphi 15^{\circ}$ είναι η κλίση της ευθείας ΟΒ δηλαδή $\frac{\sqrt{3}-1-0}{\sqrt{3}+1-0}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. Συνεπώς $\varepsilon\varphi 15^{\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA)=(KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K;

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Θα δείξουμε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

Είναι $\lambda_{\mathrm{AB}}=\frac{4-1}{4-1}=1$ και $\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{1-4}{3-4}=3$. Αφού $\lambda_{\mathrm{AB}}\neq\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}$ τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

β) Για το μέσον M της $\mathrm{B\Gamma}$ έχουμε $x_{\mathrm{M}}=\frac{x_{\mathrm{B}}+x_{\Gamma}}{2}=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$ και $y_{\mathrm{M}}=\frac{y_{\mathrm{B}}+y_{\Gamma}}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$. Άρα $\mathrm{M}\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Ακόμα $\lambda_{\varepsilon}\cdot\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon}\cdot 3=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon}=-\frac{1}{3}$.

Έχουμε $(\varepsilon): y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

γ) Το σημείο $\mathrm{K}(x,y)$ ανήκει στην ευθεία (ε) αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της, άρα $\mathrm{K}\left(x,-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}\right)$.

Έχουμε

$$(\mathrm{KA})=(\mathrm{KB})\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}=\sqrt{(x-4)^2+\left(4+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2=(x-4)^2+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow(x-4)^2-(x-1)^2=\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2$$

$$-3(2x-5)=-3\left(\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\right)\Leftrightarrow 2x-5=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\Leftrightarrow 6x-15=2x-7\Leftrightarrow 4x=8\Leftrightarrow x=2.$$

Οπότε $y=-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{11}{3}=3$, δηλαδή $\mathrm{K}(2,3)$.

Το $\mathrm{K}(2,3)$ ως σημείο της μεσοκαθέτου του $\mathrm{B\Gamma}$ ισαπέχει από τα άκρα του B και Γ, επιπλέον $(\mathrm{KA})=(\mathrm{KB})$, άρα τελικά $(\mathrm{KA})=(\mathrm{KB})=(\mathrm{K\Gamma})$, οπότε το σημείο K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2-1)x+(3\mu^2-2\mu-1)y-5\mu^2+4\mu+1=0$ (1), όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε:

i. είναι παράλληλες στον xx'.

(Μονάδες 4)

ii. είναι παράλληλες στον yy'.

(Μονάδες 4)

iii. διέρχονται από το $(0,0)$.

(Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $A x + B y + \Gamma = 0$, όπου

$A = \mu^2 - 1$, $B = 3\mu^2 - 2\mu - 1$, $\Gamma = -5\mu^2 + 4\mu + 1$

Για να παριστάνει ευθεία πρέπει οι Α, Β να μη γίνονται ταυτόχρονα 0.

$A = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ = -1 , $B = 0 \Leftrightarrow 3\mu^2 - 2\mu - 1 = 0 \Leftrightarrow$ μ= 1 ή μ= $-\frac{1}{3}$

Συνεπώς η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του μ εκτός από την τιμή μ=1.

β)

i. Για να είναι παράλληλη στον xx' πρέπει $A = 0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ= -1. Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά μ = -1.

ii. Για να είναι παράλληλη στον yy' πρέπει $B = 0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ= $-\frac{1}{3}$. Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά μ= $-\frac{1}{3}$.

iii. Για να διέρχεται από το (0,0) πρέπει $\Gamma = 0 \Leftrightarrow -5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ= $-\frac{1}{5}$

Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά $\mu = -\frac{1}{5}$.

γ) Για μ = -1 η (1) γίνεται $4y - 8 = 0$ (ε_1).

Για μ = 0 η (1) γίνεται $-x - y + 1 = 0$ (ε_2).

Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο Μ με συντεταγμένες τη λύση του συστήματος $\begin{cases} 4y - 8 = 0 \\ -x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$ οπότε Μ (-1,2) .

Οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για κάθε τιμή του μ αφού

$(\mu^2 - 1)\cdot(-1) + (3\mu^2 - 2\mu - 1)\cdot 2 - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = -\mu^2 + 1 + 6\mu^2 - 4\mu - 2 - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$

οπότε συμπεραίνουμε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1), διέρχονται από το σταθερό σημείο Μ(-1,2).

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4)$, $B(2,5)$ και $Γ(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4α-1, 3α+1)$, $α \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει $(MBΓ)=(ABΓ)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\dot{AB}=(-1,1)$ και $\dot{A\Gamma}=(-5,-2)$ οπότε

$$\det\left(\overline{AB},\overline{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -5 & -2\end{vmatrix}=2+5=7\neq 0$$

Άρα τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι στην ίδια ευθεία, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β, Γ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{2-5}{-2-2}=\frac{3}{4}$

και εξίσωση $y-5=\frac{3}{4}(x-2)$ που γράφεται $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$.

γ) Αν $M(x,y)$ τότε έχουμε $x=4\alpha-1$ και $y=3\alpha+1$, οπότε $\alpha=\frac{x+1}{4}$ και $\alpha=\frac{y-1}{3}$.

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3} \text{ οπότε } y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+1=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$$

Επομένως το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επιπλέον, με $x=3$ έχουμε $y=\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=4$, οπότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το Α.

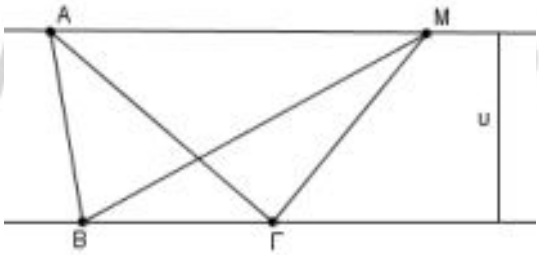
δ) Είδαμε ότι $\det\left(\dot{AB},\dot{A\Gamma}\right)=7$, οπότε $(AB\Gamma)=\frac{7}{2}$. Επιπλέον,

$$\dot{B\Gamma}=(-4,-3) \text{ και } \dot{BM}=(4\alpha-3,3\alpha-4), \text{ οπότε}$$

$$\det(\overline{B\Gamma},\overline{BM})=\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4\alpha-3 & 3\alpha-4\end{vmatrix}=-12\alpha+16+12\alpha-9=7$$

που σημαίνει ότι $(MB\Gamma)=\frac{7}{2}=(AB\Gamma)$.

Τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΜΒΓ είναι ίσα για οποιαδήποτε θέση του Μ, αφού τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση ΒΓ και το ύψος τους υ είναι ίσο με την απόσταση των δυο παράλληλων ευθειών του σχήματος.



ΘΕΜΑ 4

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$.

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

(Μονάδες 2)

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

(Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i. Αφού η ευθεία διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, η εξίσωση της είναι $y-1=\lambda(x-2)$ που γράφεται $y=\lambda x-2\lambda+1$.

ii. Σε κάθε περίπτωση που ισχύει $\lambda\neq 0$ η ευθεία τέμνει και τους δυο άξονες και όταν δεν διέρχεται από την αρχή Ο, δηλαδή όταν $\lambda\neq\frac{1}{2}$, σχηματίζει τρίγωνο .

Επομένως, η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες μόνο όταν $\lambda\in\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$.

β) i. Με $y=0$ στην εξίσωση της ευθείας, παίρνουμε $x=\frac{2\lambda-1}{\lambda}$, οπότε $A\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda},0\right)$, ενώ με $x=0$ παίρνουμε $y=-2\lambda+1$, οπότε $B(0,-2\lambda+1)$. Επομένως τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ είναι:

$$(OA)=\frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|} \text{ και } (OB)=|-2\lambda+1|=|2\lambda-1|$$

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, μόνο όταν $(OA)=(OB)$. Είναι:

$$(OA)=(OB)\Leftrightarrow\frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}=|2\lambda-1|\Leftrightarrow|2\lambda-1|(|\lambda|-1)=0\Leftrightarrow|\lambda|-1=0$$

αφού $\lambda\neq\frac{1}{2}$. Άρα η ευθεία σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο, όταν $\lambda=-1$ ή $\lambda=1$.

iii. Αν $\lambda=-1$, τότε $(OA)=3$ και $(OB)=3$, οπότε το εμβαδόν (OAB) του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{9}{2}$

Αν $\lambda=1$, τότε $(OA)=1$ και $(OB)=1$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{1}{2}$

Σχόλιο

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (υποτείνουσα) με τον άξονα x'x είναι 45° ή 135°. Έτσι, έχουμε $\lambda=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$ ή $\lambda=\varepsilon\varphi 135^\circ=-1$ που είναι οι τιμές που βρήκαμε παραπάνω.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(1,3), B(-2,2)$ και η ευθεία ε: $3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \epsilon \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 4$

i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε

$(\mathrm{AB}) = \mathrm{d}(\mathrm{A}, \varepsilon) \Leftrightarrow \sqrt{(-2-1)^2 + (2-3)^2} = \frac{|3\cdot 1 + 1\cdot 3 + \alpha|}{\sqrt{3^2+1^2}} \Leftrightarrow \sqrt{10} = \frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha + 6| = 10 \Leftrightarrow$

$\alpha + 6 = 10$ ή $\alpha + 6 = -10$ τότε $\alpha = 4$ ή $\alpha = -16$.

β) Για $\alpha = 4$ έχουμε ε: $3x + y + 4 = 0$.

i. Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ, άρα για $x = 0$ το $y = -4$.

Επομένως, η συντεταγμένες του Γ είναι $(0, -4)$.

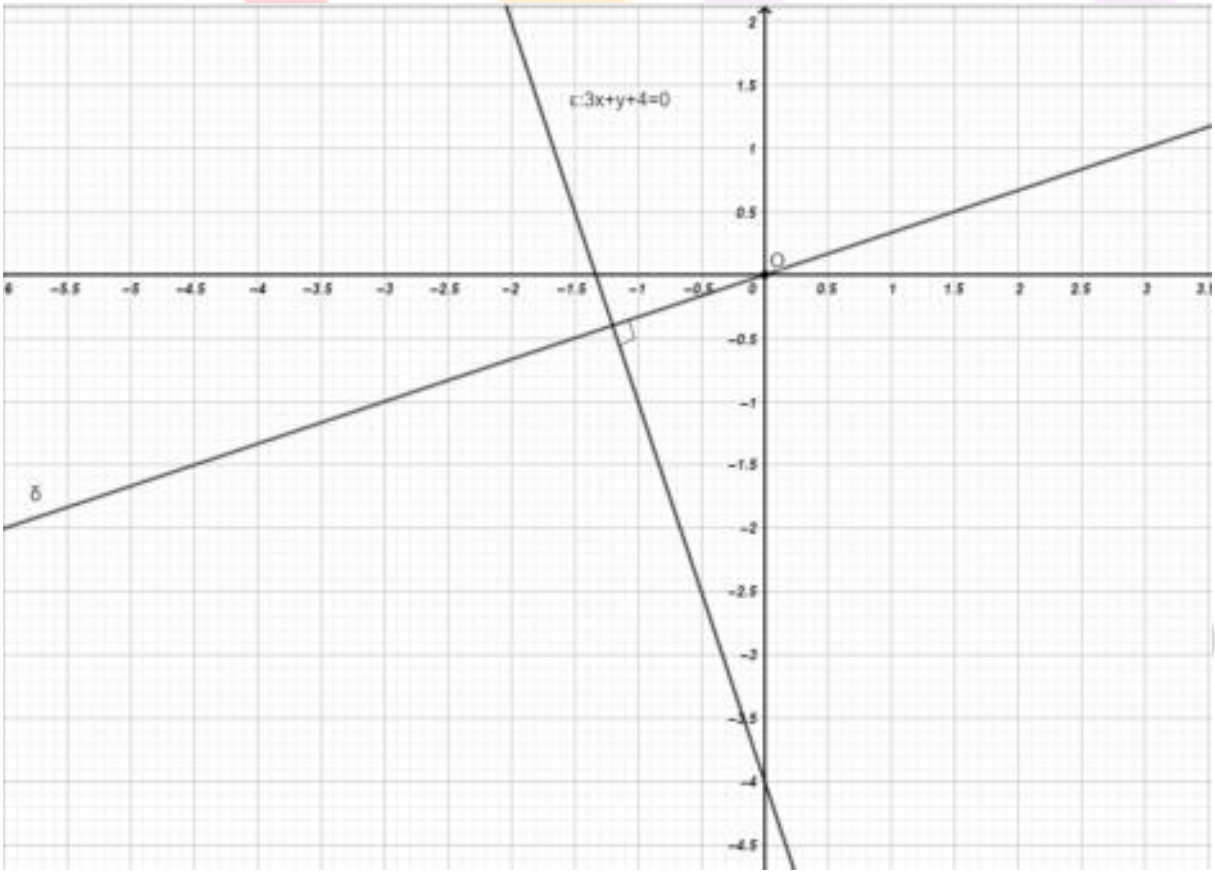
Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3, -1)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (-1, -7)$.

Από το τύπο του εμβαδού τριγώνου $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|$ υπολογίζουμε ότι

$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10$ τετραγωνικές μονάδες.

ii.



Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα αξόνων την ευθεία ε και το σημείο που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία δ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Ο.

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο σημείο αρκεί να βρούμε την εξίσωση της ευθείας δ και να λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων.

Επειδή, $\lambda_\varepsilon = -3$ και $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{1}{3}$. Η ευθεία δ διέρχεται από το (0,0) τότε $\delta: y = \frac{1}{3}x$.

Από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases}.$$

Βρίσκουμε το κοινό σημείο $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, που είναι το ζητούμενο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B(\frac{\alpha}{2},\beta)$ και $M(\frac{\alpha}{2},0)$, όπου α,β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB: 2\beta x-\alpha y=0$ και $AB: 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB, να αποδείξετε ότι $d_1=d_2$.

(Μονάδες 8)

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

(Μονάδες 3)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αφού $\beta \neq 0$ τα σημεία O, A, B δεν είναι συνευθειακά.

Τα τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με βάση την OA αφού

$$(\mathrm{OB})=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2} \text{ και } (\mathrm{AB})=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}.$$

Εναλλακτικά, το σημείο $\mathrm{B}(\frac{\alpha}{2},\beta)$ ανήκει στη μεσοκάθετο του OA οπότε ισαπέχει από τα σημεία O,A.

Τέλος το μέσο του OA είναι το σημείο $\mathrm{M}(\frac{\alpha}{2},0)$, αφού οι συντεταγμένες του M είναι ίσες με το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των O,A.

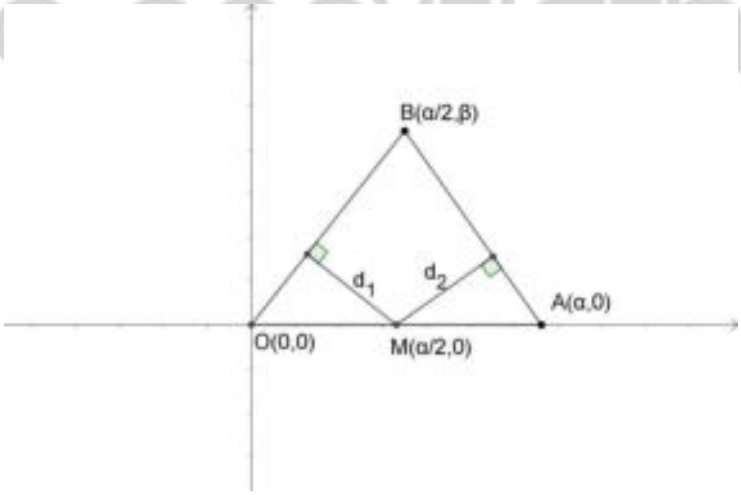
β) Είναι $\beta \neq 0$ οπότε $\mathrm{OB}: y-0=\dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-0}\cdot(x-0) \Leftrightarrow y=\dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot x \Leftrightarrow 2\beta x-\alpha y=0$ και

$$\mathrm{AB}: y-0=\frac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-\alpha}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow y=\frac{\beta}{-\frac{\alpha}{2}}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow y=-\frac{2\beta}{\alpha}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0.$$

γ) Είναι $d_1=\dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}-\alpha\cdot 0\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}} \overset{\alpha,\beta>0}{=} \dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}$ και

$$d_2=\frac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}+\alpha\cdot 0-2\alpha\beta\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}=\frac{|-\alpha\beta|}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}} \overset{\alpha,\beta>0}{=} \frac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$$ οπότε πράγματι $d_1=d_2$.

δ) Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποδείχθηκε είναι η εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της βάσης ισαπέχει από τις ίσες πλευρές.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η (ε): $y=2x-1$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma\left(2^{100},5\right)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

(Μονάδες 8)

γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία που διέρχεται από τα Α,Β θα έχει εξίσωση: $y=\lambda x+b$ αφού $x_A \neq x_B$.

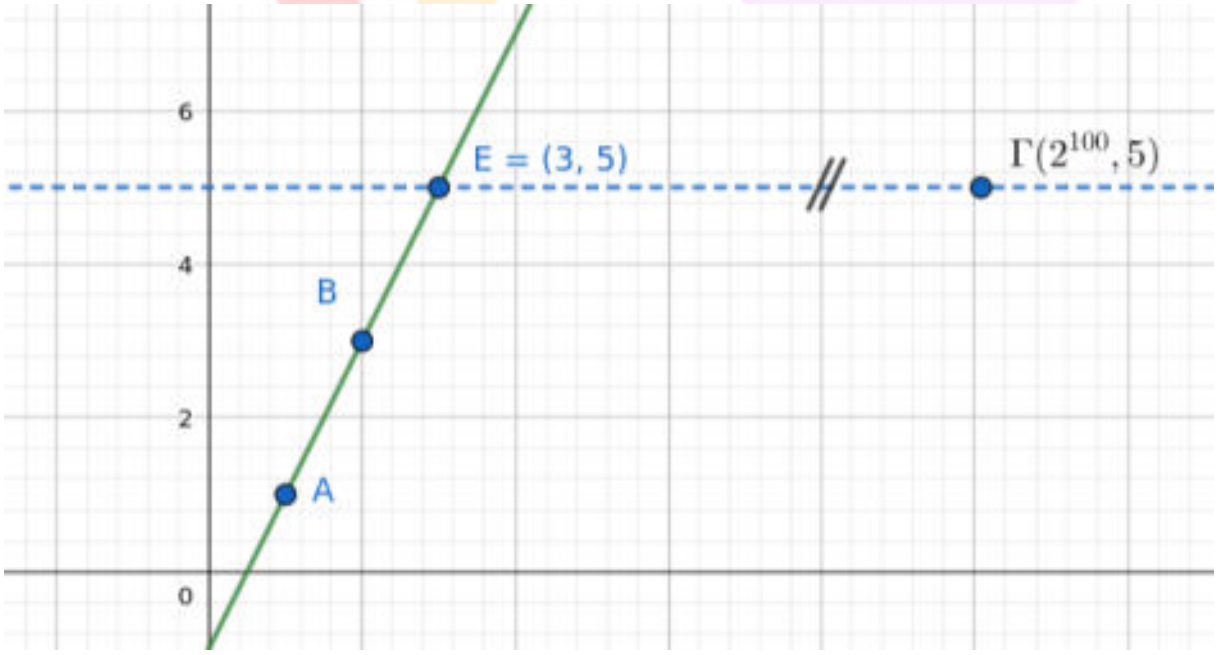
Οπότε $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{2-1}=\frac{2}{1}=2.$

Άρα η ευθεία θα είναι της μορφής $y=2x+b$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου Α θα έχουμε: $1=2\cdot 1+b \Leftrightarrow b=-1$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας θα είναι η $(\varepsilon): y=2x-1$.

β)

α΄τρόπος

Το σημείο $E(3,5)$ ανήκει στην (ε), διότι $2\cdot 3-1=5$. Το σημείο Γ βρίσκεται στην ίδια ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x την y=5 με το Ε και «δεξιά» από αυτήν, ενώ το σημείο Ο(0,0) βρίσκεται στο άλλο ημιεπίπεδο, «αριστερά» από αυτήν, όπως βλέπουμε και στο επόμενο σχήμα.



β΄ τρόπος

Για $y=0$ το σημείο $\Delta\left(\frac{1}{2},0\right)$ ανήκει στην ευθεία (ε) και το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta O}=\left(\frac{-1}{2},0\right)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$.

Επίσης το σημείο $E(3,5)$ ανήκει στην (ε), διότι $2\cdot 3-1=5$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{E\Gamma}=(2^{100}-3,5-5)=(2^{100}-3,0)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta O},\overrightarrow{E\Gamma}$ έχουν αρχή στην ευθεία (ε) και είναι αντίρροπα, οπότε ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της (ε). Συνεπώς και τα σημεία Ο , Γ δεν ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο από αυτά που ορίζει η (ε).

γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΒΓ έχουν την ίδια βάση ΑΒ, με φορέα την ευθεία (ε).

Η απόσταση του Ο και του Γ αντίστοιχα από την (ε) είναι:

$$d(O,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 0-0-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$d(\Gamma,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2^{100}-5-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2^{101}-6}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Συνεπώς $d(O,\varepsilon)<d(\Gamma,\varepsilon)$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ΑΟΒ.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε οτι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B, έχει εξίσωση (ε): $15x - 8y - 30 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε οτι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Οι ευθείες που έχουν κλίση λ και διέρχονται από το σημείο $A(2,0)$ ορίζονται από την εξίσωση: $(\varepsilon_\lambda): y - 0 = \lambda(x-2) \Leftrightarrow \lambda x - y - 2\lambda = 0$ (1)

ii. Για την απόσταση του σημείου B απο τις ευθείες (ε_λ), είναι:

$$d(B,\varepsilon_\lambda) = \frac{|3\lambda - 4 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{|\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$$

Επομένως, έχουμε:

$$d(B,\varepsilon_\lambda) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda-4|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |\lambda - 4| = \sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda-4)^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{15}{8}$$

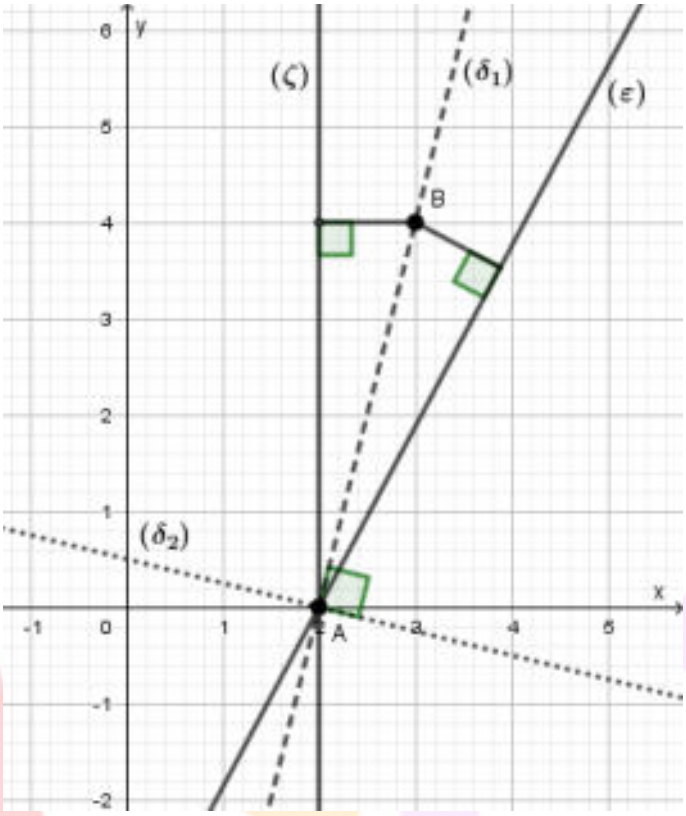
Απο την (1) έχουμε: $\frac{15}{8}x - y - \frac{30}{8} = 0 \Leftrightarrow 15x - 8y - 30 = 0.$

β) Από το σημείο $A(2,0)$ διέρχεται επίσης η κατακόρυφη ευθεία (ζ), για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, με εξίσωση $x = 2$. Έτσι, έχουμε:

$$d(B,\zeta) = \frac{|1\cdot 3 + 0\cdot 4 - 2|}{\sqrt{1}} = 1$$

γ) Οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται, διότι έχουν κοινό σημείο το A, αλλά δεν ταυτίζονται αφού $\lambda_\varepsilon = \frac{15}{8}$ και η $(\zeta)//y'y$. Το σημείο B απέχει ίση απόσταση από τις ευθείες (ε) και (ζ), επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας των δύο ευθειών. Επιπλέον ισχύει οτι $\lambda_{AB} = \frac{4-0}{3-2} = 4.$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο



Επομένως, η μία εκ των δύο διχοτόμων (δ_1), είναι η ευθεία AB με εξίσωση

$$y - 0 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 8.$$

Η άλλη διχοτόμος (δ_2), είναι κάθετη στην AB, επομένως $\lambda_{\delta_2} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\delta_2} = -\frac{1}{4}$. Επιπλέον, διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, οπότε έχει εξίσωση την

$$y - 0 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας

$\varepsilon_\lambda : \lambda x + (1-\lambda)y + 2 = 0$, όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ. Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0,0)$.

α)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

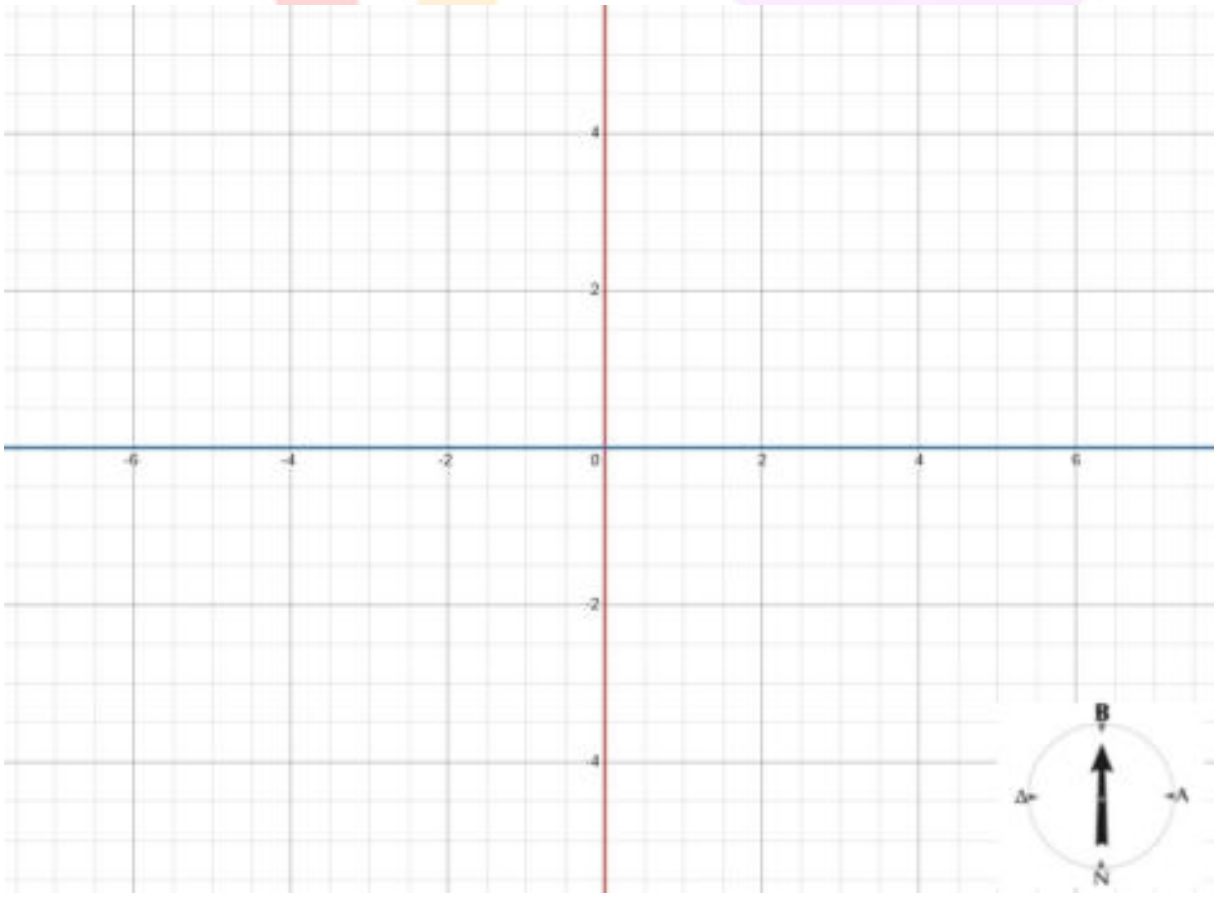
(Μονάδες 10)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

(Μονάδες 5)

β) Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ. Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το P έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α)

i. Όλες οι φωτεινές ακτίνες που παριστάνει η εξίσωση ε_λ διέρχονται από το φάρο Φ.

Επομένως οι συντεταγμένες του φάρου $\Phi(x_\Phi, y_\Phi)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή είναι

$$\lambda x_\Phi + (1-\lambda) y_\Phi + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda x_\Phi + y_\Phi - \lambda y_\Phi + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x_\Phi - y_\Phi)\lambda + y_\Phi + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_\Phi - y_\Phi = 0 \\ \quad \kappa\alpha\iota \\ y_\Phi + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Phi = y_\Phi \\ \quad \kappa\alpha\iota \\ y_\Phi = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Phi = -2 \\ \quad \kappa\alpha\iota \\ y_\Phi = -2 \end{cases}$$

Οπότε οι συντεταγμένες του φάρου είναι $\Phi(-2,-2)$.

<u>Δεύτερος τρόπος</u>

Γνωρίζουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο Φ. Για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων του φάρου αρκεί να βρούμε το σημείο τομής δυο ευθειών της οικογένειας ε_λ.

Μια ευθεία της οικογένειας ε_λ προκύπτει για $\lambda = 1$ με εξίσωση $1x + (1-1)y + 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ και μια άλλη προκύπτει για $\lambda = 0$ με εξίσωση $0x + (1-0)y + 2 = 0 \Leftrightarrow y + 2 = 0$.

Για την εύρεση του κοινού σημείου Φ, των ευθειών με εξισώσεις $x + 2 = 0$ και $y + 2 = 0$, επιλύουμε το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} y + 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$

Είναι

$$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -2 \end{cases}$$

άρα οι συντεταγμένες του φάρου είναι $\Phi(-2,-2)$.

ii. Έστω ότι υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο. Άρα υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε η ε_λ να

διέρχεται από το $O(0,0)$. Τότε οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ.

Έχουμε $\lambda \cdot 0 + (1-\lambda)\cdot 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$, άτοπο.

Οπότε δεν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β) Αν είναι $P(x_P, y_P)$ τότε ισχύει $y_P > y_\Phi \Leftrightarrow y_P > -2$ αφού το ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ.

Επειδή το σημείο P ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x + y + 4 = 0$ ισχύει $x_P + y_P + 4 = 0 \Leftrightarrow x_P = -4 - y_P$. Οπότε είναι $P(-4 - y_P, y_P)$ με $y_P > -2$.

Η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα PO με μήκος 4 μονάδες.

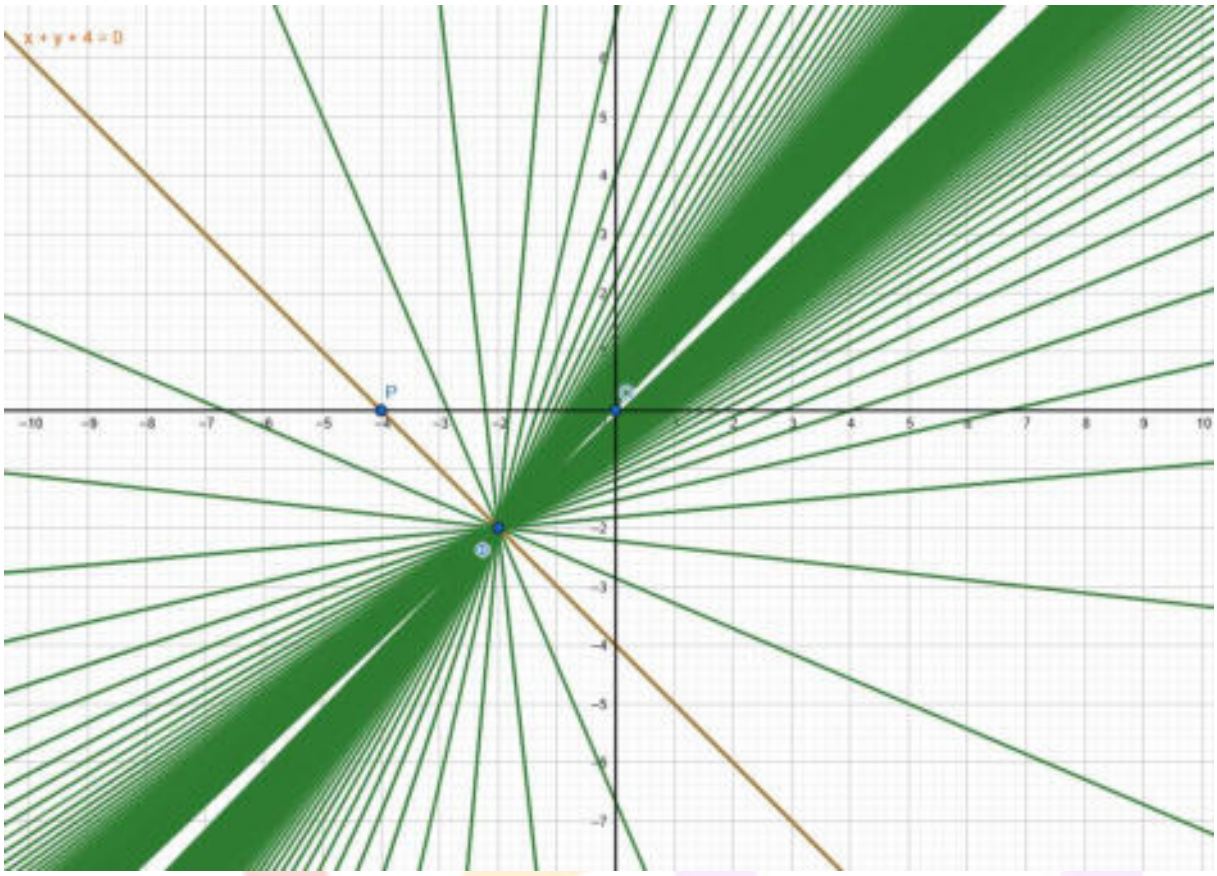
Είναι

$$\begin{aligned}
PO = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_O - x_P)^2 + (y_O - y_P)^2} = 4 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(0-(-4-y_P))^2 + (0-y_P)^2} = 4 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(4+y_P)^2 + y_P^2} = 4 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2y_P^2 + 8y_P + 16} = 4 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y_P^2 + 8y_P + 16}\right)^2 = 4^2 \\
&\Leftrightarrow 2y_P^2 + 8y_P + 16 = 16 \\
&\Leftrightarrow 2y_P^2 + 8y_P = 0 \\
&\Leftrightarrow 2y_P(y_P + 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2y_P = 0 \text{ ή } y_P + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow y_P = 0 \text{ ή } y_P = -4
\end{aligned}$$

Δεκτή είναι μόνο η $y_P = 0 > -2$ αφού $-4 < -2$. Ακόμη είναι $x_P = -4 - y_P = -4 - 0 = -4$.

Τελικά, οι συντεταγμένες του ρυμουλκού πλοίου είναι $P(-4,0)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2,1)$.

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

(Μονάδες 6) (2+4)

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

(Μονάδες 19) (6+7+6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i. Αφού η ευθεία διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, η εξίσωση της είναι $y-1=\lambda(x-2)$ που γράφεται $y=\lambda x-2\lambda+1$.

ii. Σε κάθε περίπτωση που ισχύει $\lambda\neq 0$ η ευθεία τέμνει και τους δυο άξονες και όταν δεν διέρχεται από την αρχή Ο, δηλαδή όταν $\lambda\neq\frac{1}{2}$, σχηματίζει τρίγωνο .

Επομένως, η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες μόνο όταν $\lambda\in\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$.

β) i. Με $y=0$ στην εξίσωση της ευθείας, παίρνουμε $x=\frac{2\lambda-1}{\lambda}$, οπότε $A\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda},0\right)$, ενώ με $x=0$ παίρνουμε $y=-2\lambda+1$, οπότε $B(0,-2\lambda+1)$. Επομένως τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ είναι:

$$(OA)=\frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|} \text{ και } (OB)=|-2\lambda+1|=|2\lambda-1|$$

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, μόνο όταν $(OA)=(OB)$. Είναι:

$$(OA)=(OB)\Leftrightarrow\frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}=|2\lambda-1|\Leftrightarrow|2\lambda-1|(|\lambda|-1)=0\Leftrightarrow|\lambda|-1=0$$

αφού $\lambda\neq\frac{1}{2}$. Άρα η ευθεία σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο, όταν $\lambda=-1$ ή $\lambda=1$.

iii. Αν $\lambda=-1$, τότε $(OA)=3$ και $(OB)=3$, οπότε το εμβαδόν (OAB) του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{9}{2}$

Αν $\lambda=1$, τότε $(OA)=1$ και $(OB)=1$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{1}{2}$

Σχόλιο

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (υποτείνουσα) με τον άξονα $x'x$ είναι 45° ή 135°. Έτσι, έχουμε $\lambda=\varepsilon\varphi 45^o=1$ ή $\lambda=\varepsilon\varphi 135^o=-1$ που είναι οι τιμές που βρήκαμε παραπάνω.

ΘΕΜΑ 4

Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $\delta: x+y-1=0$.

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:

i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.

(Μονάδες 8)

ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8.

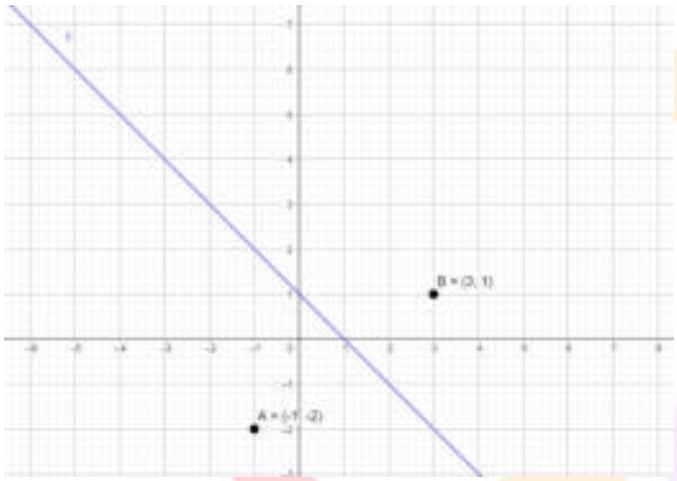
(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

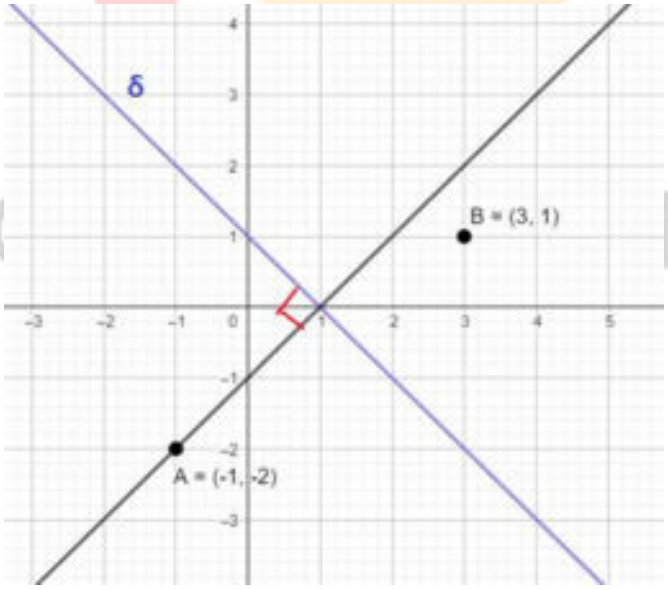
ΛΥΣΗ

α)

i. Για να βρούμε σε ποια θέση του δρόμου δ ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση, τοποθετούμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την ευθεία δ και τα σημεία Α και Β. Η ευθεία δ τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία (1,0) και (0,1) αντίστοιχα.



Γνωρίζουμε πως ο πιο σύντομος δρόμος που μας οδηγεί στο προορισμό μας είναι ο κάθετος δρόμος στο δρόμο που βρισκόμαστε. Έτσι, η κάθετη ευθεία στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο Α παριστάνει τον δρόμο που περνά από τον οικισμό και συναντιέται με τον δρόμο δ. Άρα, το σημείο που θα βρίσκεται η θέση που αναζητούμε είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών.



Από το σχήμα προκύπτει πως είναι το (1,0).

Για να το βρούμε αλγεβρικά αρκεί να προσδιορίσουμε την κάθετη ευθεία ε στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο Α.

$\delta \perp \varepsilon$ αν και μόνο αν $\lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1$. Το $\lambda_\delta = -1$, άρα $\lambda_\varepsilon = 1$.

Τότε ε: $y - (-2) = 1 \cdot [x - (-1)] \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων των δύο ευθείων ε και δ βρίσκουμε το ζητούμενο σημείο.

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ και $y = 0$.

ii. Για να βρούμε τη θέση του κέντρου υγείας της περιοχής που ισαπέχει από τους δύο οικισμούς ακολουθούμε το ίδιο σκεπτικό. Από τη γραφική παράσταση ψάχνουμε το σημείο της ευθεία δ που ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή το σημείο Γ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία δ και στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Έστω σημείο $K(x, y)$ που ανήκει στην ευθεία δ, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας δ. Προσδιορίζουμε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ , την ευθεία ζ.

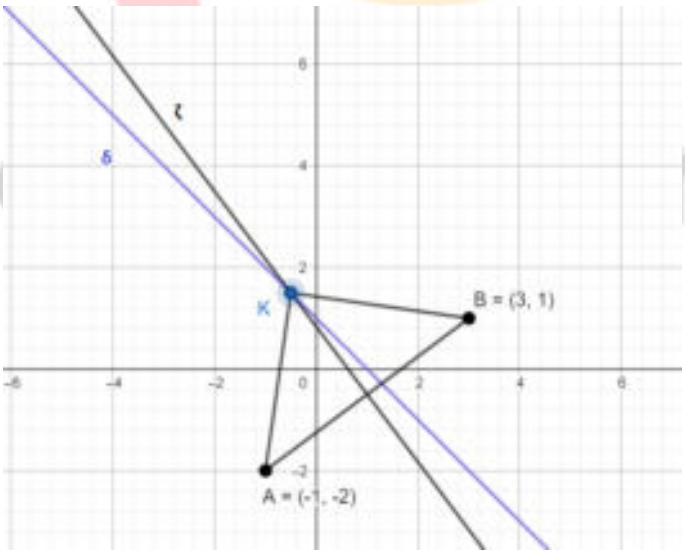
$\lambda_{AB} = \frac{1-(-2)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$ με $\lambda_{AB} \cdot \lambda_\zeta = -1$ τότε $\lambda_\zeta = -\frac{4}{3}$.

και το Μ μέσο του ΑΒ με συντεταγμένες, $x_M = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_M = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$.

ζ: $y + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x-1) \Leftrightarrow 8x + 6y - 5 = 0$.

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων δ και ζ

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 8x + 6y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ και $y = \frac{3}{2}$. Το σημείο $K(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ είναι το ζητούμενο, δηλαδή η θέση του δρόμου δ που βρίσκεται το κέντρο υγείας.



β) Το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στο δρόμο με εξίσωση δ, άρα είναι σημείο της ευθείας δ.

Έστω Γ (x, y) και Γϵ δ: $x + y - 1 = 0$, δηλαδή την επαληθεύει, τότε $y = 1 - x$ και το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(x, 1 - x)$.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

$\overrightarrow{AB} = (4,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (x + 1, 3 - x)$.

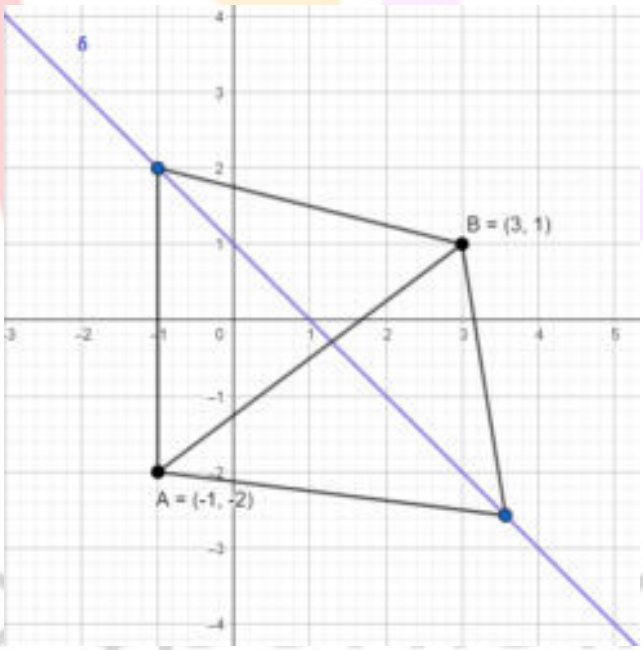
Το εμβαδόν του τριγώνου (ΑΒΓ) είναι 8.

Άρα, από τον τύπο εμβαδόν τριγώνου $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right|$ υπολογίζουμε ότι το $(AB\Gamma) =$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x + 1 & 3 - x \end{vmatrix}\right| = 8 \Leftrightarrow |9 - 7x| = 16.$$

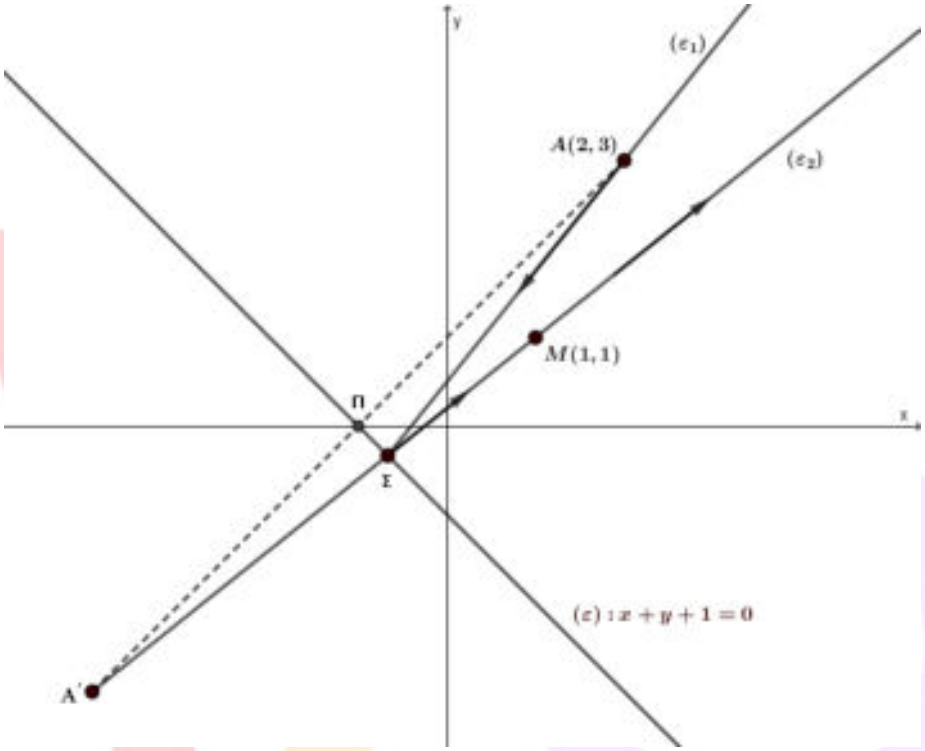
Από την εξίσωση παίρνουμε $x = -1$ ή $x = \frac{25}{7}$. Βρίσκουμε τα αντίστοιχα $y = 2$ ή $y = -\frac{18}{7}$.

Επομένως, έχουμε δύο θέσεις του δρόμου που βρίσκεται το αυτοκίνητο και σχηματίζει εμβαδόν 8, τη θέση με συντεταγμένες $(-1,2)$ και $\left(\frac{25}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.



ΘΕΜΑ 4

Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x+y+1=0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



α)

i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε), είναι το σημείο $A'(-4,-3)$.

(Μονάδες 5)

β)

i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2), η οποία διέρχεται από τα σημεία A', Σ, M, τότε να βρείτε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1).

(Μονάδες 4)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Βρίσκουμε την προβολή Π του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε):

Αφού η κλίση της (ε) είναι $\lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow \lambda_{A\Pi} = 1$ γιατί η $A\Pi$ είναι κάθετη στην (ε).

Έτσι η $A\Pi$ έχει εξίσωση $y - 3 = 1(x-2)$, δηλαδή $A\Pi: y = x + 1$.

Οι συντεταγμένες του σημείου A προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος:

$$(\Sigma_1)\begin{cases} y = x+1 \\ x+y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ 2x+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Επομένως, $\Pi(-1,0)$.

ii. Βρίσκουμε το συμμετρικό σημείο $A'(x,y)$:

Το Π είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AA', και ως εκ τούτου είναι:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = -1 \\ \frac{y+3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}, \text{ δηλαδή } A'(-4,-3).$$

β)

i. Βρίσκουμε την ανακλώμενη ακτίνα (ε_2), δηλαδή την $A'M$:

Είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A'(-4,-3)$ και $M(1,1)$, δηλαδή

$$y - 1 = \frac{-3-1}{-4-1}(x-1) \Leftrightarrow 4x - 5y + 1 = 0.$$

ii. Οι συντεταγμένες του σημείου Σ, δηλαδή του σημείου πρόσπτωσης της φωτεινής ακτίνας πάνω στην ευθεία (ε), προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των ευθειών (ε) και (ε_2):

$$(\Sigma_2)\begin{cases} x+y+1 = 0 \\ 4x-5y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-4y-4 = 0 \\ 4x-5y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 = 0 \\ -9y-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} + 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ δηλαδή } \Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

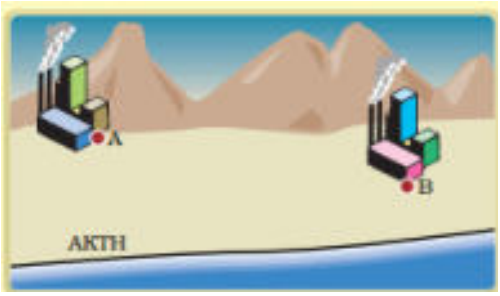
γ) Βρίσκουμε την προσπίπτουσα ακτίνα (ε_1), δηλαδή την $A\Sigma$:

Είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, δηλαδή

$$y - 3 = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2 + \frac{2}{3}}(x-2) \Leftrightarrow 5x - 4y + 2 = 0.$$

ΘΕΜΑ 4

Δύο εργοστάσια A και B τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες $A(2,1), B(4,3)$, βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.

(Μονάδες 8)

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση ε:$y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι $N(4,1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια είναι:

$AB: y-1=\frac{3-1}{4-2}\cdot(x-2)$, άρα $AB: y-1=1\cdot(x-2)$.

Επομένως $AB: y=x-1$.

β) Το σημείο της ακτής που απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια είναι το σημείο τομής της ευθύγραμμης ακτής με τη μεσοκάθετο της AB.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου $M(x_M, y_M)$ της AB.

Είναι $x_M=\frac{2+4}{2}=3$ και $y_M=\frac{1+3}{2}=2$. Άρα $M(3,2)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda=1$.

Η μεσοκάθετος ε' της AB θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ' για τον οποίο θα ισχύει:

$\lambda\cdot\lambda'=-1$. Άρα $\lambda'=-1$.

Η εξίσωση $\varepsilon': y-2=-1(x-3)$, άρα $\varepsilon': y=-x+5$.

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y=2x-7 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7=-x+5 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=12 \\ y=-x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$.

Άρα το ζητούμενο σημείο $N(4,1)$.

γ) Η απόσταση του καθενός από τα δύο εργοστάσια από το σημείο N της ακτής είναι:

$(AN)=(BN)=\sqrt{(2-4)^2+(1-1)^2}=\sqrt{2^2+0^2}=2$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-2)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $\mathrm{A}(4,-1)$ και $\mathrm{B}(3,2)$.

(Μονάδες 5)

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και $\left|\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot 1+(-2)\cdot 1=0$, άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β)

i. Το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$ είναι η αρχή και το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}=(2,-2)$, οπότε:

$$x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{K}}=2\Leftrightarrow x_{\mathrm{A}}-2=2\Leftrightarrow x_{\mathrm{A}}=4.$$

$$y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{K}}=-2\Leftrightarrow y_{\mathrm{A}}-1=-2\Leftrightarrow y_{\mathrm{A}}=-1.$$

Άρα $\mathrm{A}(4,-1)$. Το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$ είναι η αρχή και το σημείο B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}=(1,1)$, οπότε: $x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{K}}=1\Leftrightarrow x_{\mathrm{B}}-2=1\Leftrightarrow x_{\mathrm{B}}=3$.

$$y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{K}}=1\Leftrightarrow y_{\mathrm{B}}-1=1\Leftrightarrow y_{\mathrm{B}}=2.$$

Άρα $\mathrm{B}(3,2)$.

ii. Η ευθεία AB έχει εξίσωση:

$$y-2=\frac{2-(-1)}{3-4}\cdot(x-3)\Leftrightarrow$$
$$y-2=-3\cdot(x-3)\Leftrightarrow$$
$$3x+y=11.$$

Το σημείο $\Gamma(x_{\Gamma},y_{\Gamma})$ είναι ένα σημείο της ευθείας AB, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή: $3x_{\Gamma}+y_{\Gamma}=11$.

iii. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x_{\Gamma}-2)^2+(y_{\Gamma}-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(3-4)^2+(2+1)^2}\Leftrightarrow$$
$$(x_{\Gamma}-2)^2+(y_{\Gamma}-1)^2=\frac{10}{4}\overset{\beta ii)}{\Leftrightarrow}$$
$$(x_{\Gamma}-2)^2+(10-3x_{\Gamma})^2=\frac{10}{4}\Leftrightarrow$$
$$5x_{\Gamma}^{\,2}-32x_{\Gamma}+\frac{203}{4}=0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 9 > 0$ και ρίζες $x_1 = 3,5$ και $x_2 = 2,9$. Επειδή το Γ είναι εσωτερικό του τμήματος AB, η τετμημένη του θα πρέπει να είναι μεταξύ 3 και 4. Άρα $x_\Gamma = 3,5$ και $3 \cdot 3,5 + y_\Gamma = 11 \Leftrightarrow y_\Gamma = 0,5$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\alpha : (\alpha-4)x-2\alpha y+\alpha+4=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\alpha=0$ και όταν $\alpha=1$ και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο Μ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το Μ.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι $0<\alpha<4$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $(OA)=2(OB)$

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Με $\alpha=0$ έχουμε $\varepsilon_o: -4x+4=0 \Leftrightarrow x=1$, ενώ με $\alpha=1$ έχουμε $\varepsilon_1: -3x-2y+5=0$.

Το κοινό τους σημείο προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x=1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $x=1$ και $y=1$. Άρα οι ευθείες $\varepsilon_o, \varepsilon_1$ τέμνονται στο σημείο $M(1, 1)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $M(1, 1)$. Με $x=y=1$ η αρχική εξίσωση γράφεται $\alpha-4-2\alpha+\alpha+4=0$ και προφανώς ισχύει. Άρα, όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο Μ.

γ) i. Οι ευθείες που προκύπτουν όταν $\alpha=4$ ή $\alpha=0$ δεν τέμνουν και τους δυο άξονες αφού η πρώτη είναι παράλληλη στον $x'x$ και η δεύτερη στον $y'y$. Έτσι, βρίσκουμε τα κοινά σημεία των ευθειών της οικογένειας με τους άξονες, όταν $\alpha\neq 0$ και $\alpha\neq 4$.

Με $x=0$ έχουμε: $y=\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}$, ενώ με $y=0$ έχουμε $x=-\dfrac{\alpha+4}{\alpha-4}$, οπότε τα κοινά σημεία με τους άξονες είναι τα $A\left(\dfrac{\alpha+4}{4-\alpha}, 0\right)$ και $B\left(0, \dfrac{\alpha+4}{2\alpha}\right)$. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες, μόνο όταν:

$$\frac{\alpha+4}{4-\alpha}>0,\ (1) \quad \text{και} \quad \frac{\alpha+4}{2\alpha}>0,\ (2)$$

Είναι:

$$(1) \Leftrightarrow (\alpha+4)(4-\alpha)>0 \Leftrightarrow \alpha^2-16<0 \Leftrightarrow \alpha^2<16 \Leftrightarrow -4<\alpha<4, \text{ με } \alpha\neq 0$$

$$(2) \Leftrightarrow 2\alpha(\alpha+4)>0 \Leftrightarrow \alpha<-4 \text{ ή } \alpha>0, \text{ με } \alpha\neq 4$$

Η συναλήθευση των δυο αποτελεσμάτων δίνει $0<\alpha<4$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Όταν $0<\alpha<4$, τα σημεία Α, Β είναι στους θετικούς ημιάξονες, οπότε

$$(OA)=\frac{\alpha+4}{4-\alpha} \text{ και } (OB)=\frac{\alpha+4}{2\alpha}.$$

Επομένως

$$(OA)=2(OB) \Leftrightarrow \frac{\alpha+4}{4-\alpha}=2\frac{\alpha+4}{2\alpha} \Leftrightarrow \alpha=4-\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha + 1, 1 - \alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(Μονάδες 7)

iii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(3,2\alpha)$ και $B(4,\alpha)$ είναι

$$\lambda=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\alpha-2\alpha}{4-3}=\frac{-\alpha}{1}=-\alpha\,,$$

οπότε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση

$y-y_A=\lambda(x-x_A)$ ή $y-2\alpha=-\alpha(x-3)$ ή $y-2\alpha=-\alpha x+3\alpha$ ή $y=-\alpha x+5\alpha$.

ii) Τα σημεία $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της, $y=-\alpha x+5\alpha$. Έχουμε διαδοχικά

$1-\alpha=-\alpha(\alpha+1)+5\alpha$ ή $1-\alpha=-\alpha^2-\alpha+5\alpha$ ή $\alpha^2-5\alpha+1=0$ ή $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$,

επίσης $1=-\alpha\cdot\alpha+5\alpha$ ή $1=-\alpha^2+5\alpha$ ή $\alpha^2-5\alpha+1=0$ ή $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

iii) Είναι $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,y_B-y_A)=(4-3\,,\ \alpha-2\alpha\,)=(1\,,-\alpha\,)$ και

$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(x_\Gamma-x_\Delta\,,y_\Gamma-y_\Delta)=(\alpha+1-\alpha\ ,\ 1-\alpha-1)=(1\,,-\alpha\,)$.

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(1\,,-\alpha\,)$. Όμως από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι, όταν $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία AB. Τότε, επειδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Delta\Gamma$ θα είναι παράλληλα, επίσης θα έχουν ίσα μήκη, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Έστω ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο για κάποιο $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. Τότε θα έχουμε $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A\Delta}|$. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\overrightarrow{AB}=(1\,,-\alpha\,)$, άρα $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-\alpha)^2}=\sqrt{1+\alpha^2}$. Επίσης είναι $\overrightarrow{A\Delta}=(x_\Delta-x_A\,,y_\Delta-y_A)=(\alpha-3,1-2\alpha)$, άρα $|\overrightarrow{A\Delta}|=\sqrt{(\alpha-3)^2+(1-2\alpha)^2}=\sqrt{5\alpha^2-10\alpha+10}$.

Επομένως θα έχουμε $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A\Delta}|$ ή $\sqrt{1+\alpha^2}=\sqrt{5\alpha^2-10\alpha+10}$ ή $5\alpha^2-10\alpha+10=1+\alpha^2$ ή $4\alpha^2-10\alpha+9=0$.

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=(-10)^2-4\cdot4\cdot9=-44<0$, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

ΘΕΜΑ 4

Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).

α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)

β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον τα σημεία της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή ισαπέχουν από τα Α, Β, αυτή θα είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Αν Μ το μέσο του ΑΒ τότε:

$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$, $y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = 2$, άρα Μ(5, 2).

Επίσης $\lambda_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{-2-6}{7-3} = -2$,

οπότε: $\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{-1}{\lambda_{AB}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$,

άρα ε: $y - y_M = \lambda_{AB}(x - x_M)$ ή ε: $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 5)$ ή ε: $2y - 4 = x - 5$ ή ε: $x - 2y - 1 = 0$,

η ζητούμενη εξίσωση.

β) Θέλουμε (ΣΑΒ) = 20 τ.μ. (1)

Αν Σ(x, y), τότε το $\Sigma \in \varepsilon \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$ (2), οπότε Σ(2y +1, y).

Ακόμη $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (7-3, -2-6) = (4, -8)$ και

$\overrightarrow{A\Sigma} = (x_\Sigma - x_A, y_\Sigma - y_A) = (2y+1-3, y-6) = (2y-2, y-6)$, οπότε από την (1) είναι:

$\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Sigma})| = 20 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Sigma} & y_{A\Sigma} \end{vmatrix}\right| = 40 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 2y-2 & y-6 \end{vmatrix}\right| = 40 \Leftrightarrow$

$|4(y-6) - (-8)(2y-2)| = 40 \Leftrightarrow |4y - 24 + 16y - 16| = 40 \Leftrightarrow |20y - 40| = 40 \Leftrightarrow$

$20|y - 2| = 40 \Leftrightarrow |y - 2| = 2 \Leftrightarrow y - 2 = -2$ ή $y - 2 = 2 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 4$.

Για y = 0 από την (2) παίρνουμε: x = 1. Για y = 4 από την (2) παίρνουμε: x = 9.

Άρα Σ(1, 0) ή Σ(9, 4).

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία Α και Β. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.

(Μονάδες 8)

β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t=2$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε: $4x+3y+7=0$ ισούται με 6. (Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε A(t-1, 2t-1), t≥ 0. Αν A(x, y) τότε:

$$\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+1 \\ y = 2(x+1)-1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+1 \\ y = 2x+1, \\ x \geq -1 \end{cases}$$

άρα το σημείο Α κινείται στην ημιευθεία ε_1: $y = 2x+1$ με $x \geq -1$.

Επίσης έχουμε B(3t-1, -4t-1), t≥ 0. Αν B(x, y) τότε:

$$\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = -4t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ y = -4\frac{x+1}{3}-1 \\ \frac{x+1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ 3y = -4x-7 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ 4x+3y+7 = 0, \\ x \geq -1 \end{cases}$$

άρα το σημείο Β κινείται στην ημιευθεία ε_2: $4x+3y+7 = 0$ με $x \geq -1$.

β) Αν υπάρχει χρονική στιγμή t≥ 0, κατά την οποία τα σημεία Α και Β ταυτίζονται θα είναι:

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = 3t-1 \\ 2t-1 = -4t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0,$$ άρα τη χρονική στιγμή $t = 0$, τα σημεία Α, Β ταυτίζονται.

γ) Για t=2 είναι A(1, 3) και B(5, -9) οπότε: (AB) = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ =

$\sqrt{(5-1)^2 + (-9-3)^2}$ = $\sqrt{4^2 + (-12)^2}$ = $\sqrt{16+144}$ = $\sqrt{160}$ =$4\sqrt{10}$.

δ) Λόγω του ερωτήματος (α), η ευθεία ε είναι η ε_2, οπότε:

$$d(A, \varepsilon_2) = 6 \Leftrightarrow \frac{|4\cdot(t-1)+3\cdot(2t-1)+7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow \frac{|10t|}{5} = 6 \Leftrightarrow |10t| = 30 \Leftrightarrow |t| = 3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3,$$ η ζητούμενη χρονική στιγμή.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα xx'.

(Μονάδες 6)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι 15°.

(Μονάδες 3)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

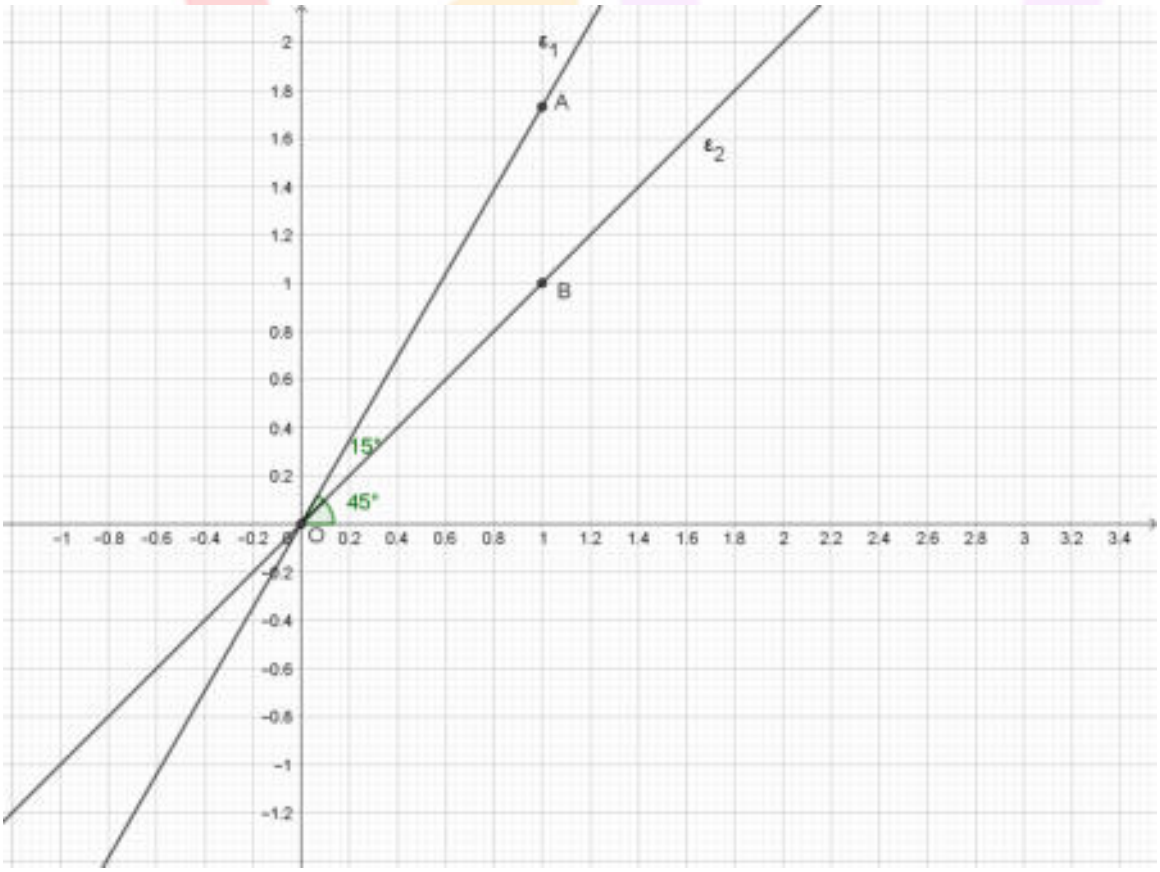
α) Η ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(1,\sqrt{3})$ ενώ η ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $B(1,1)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

β) Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\sqrt{3}$ οπότε σχηματίζει με τον xx΄ γωνία 60°, ενώ ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης 1 οπότε σχηματίζει με τον xx΄ γωνία 45°.

γ) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι η διαφορά των γωνιών που σχηματίζει η κάθε μία από τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ με τον xx', δηλαδή $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

δ) Το $\vec{\delta_1} = (1,\sqrt{3})$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_1 και το $\vec{\delta_2} = (1,1)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_2. Είναι $|\vec{\delta_1}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, $|\vec{\delta_2}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ και

$\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2} = (1,\sqrt{3})\cdot(1,1) = 1+\sqrt{3} > 0$ οπότε $\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right) = \dfrac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(2,4), Β(-1,0) και Γ(3,-2).

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 04)

β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα y'y σε ένα σημείο Δ και η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα x'x σε ένα σημείο Ε, τότε:

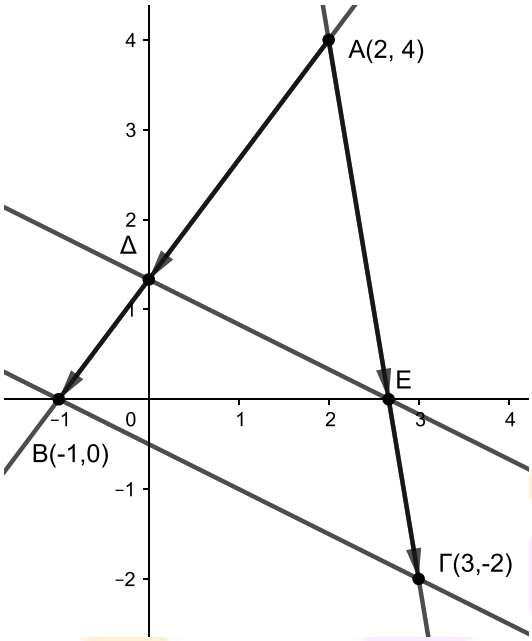
i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε. (Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = 2\overrightarrow{\text{ΔΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΕ}} = 2\overrightarrow{\text{ΕΓ}}$. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ. (Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α) Οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΑΒ και ΑΓ ορίζονται και είναι

$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-4}{-1-2} = \frac{4}{3}$ και $\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{-2-4}{3-2} = \frac{-6}{1}$ = - 6. Επειδή $\lambda_{AB} \neq \lambda_{A\Gamma}$ οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ δεν είναι παράλληλες, οπότε τα σημεία Α,Β και Γ δεν είναι συνευθειακά και αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{4}{3}$ από το α) ερώτημα και διέρχεται από το σημείο Α(2,4), άρα η εξίσωσή της είναι: (ΑΒ): $y-y_A=\lambda(x-x_A)$ ή $y-4=\frac{4}{3}(x-2)$ ή $4x-3y+4=0$.

Η ευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης -6 από το α) ερώτημα και διέρχεται από το σημείο Γ(3,-2), άρα η εξίσωσή της είναι: (ΑΓ): $y-y_\Gamma=\lambda(x-x_\Gamma)$ ή $y+2=-6(x-3)$ ή $6x+y-16=0$.

i. Στην εξίσωση της ευθείας ΑΒ θέτουμε x=0 για να βρούμε το σημείο που τέμνει τον άξονα y'y και έχουμε: $4\cdot 0-3y+4=0 \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}$. Άρα $\Delta\left(0,\frac{4}{3}\right)$. Ομοίως στην εξίσωση της ευθείας ΑΓ θέτουμε y=0 για να βρούμε το σημείο που τέμνει τον άξονα x'x και έχουμε: $6x+0-16=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$. Άρα $E\left(\frac{8}{3},0\right)$.

ii. $\overrightarrow{A\Delta}=(0-2,\frac{4}{3}-4)=(-2,-\frac{8}{3})=2\cdot(-1,-\frac{4}{3})$ και $\overrightarrow{\Delta B}=(-1-0,0-\frac{4}{3})=(-1,-\frac{4}{3})$, οπότε προφανώς $\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{\Delta B}$. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$ έχουμε:

$\overrightarrow{\Delta E} = (\frac{8}{3} - 2,\ 0-4) = (\frac{2}{3}, -4) = 2 \cdot (\frac{1}{3}, -2)$ και $\overrightarrow{E\Gamma} = (3 - \frac{8}{3},\ -2-0) = (\frac{1}{3}, -2)$ και ισχύει επίσης ότι $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ) $\lambda_{\Delta E} = \dfrac{\frac{4}{3}-0}{0-\frac{8}{3}} = -\dfrac{1}{2}$ και $\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{-2-0}{3+1} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Άρα $\lambda_{\Delta E} = \lambda_{B\Gamma}$, επομένως η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ευθείας ΒΓ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία Ο(0, 0), Β(κ, 0) και Γ(0,2κ) όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ, τότε:

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ.

(Μονάδες 10)

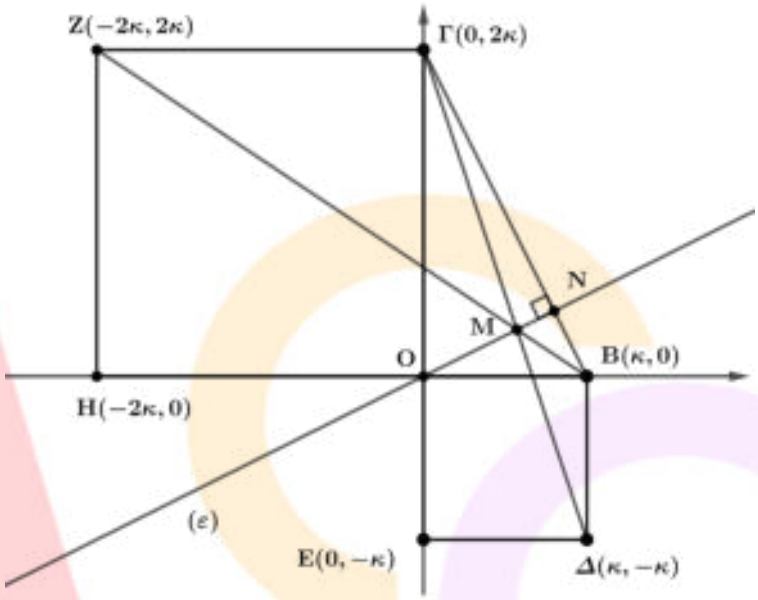
β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Επειδή τα τετράπλευρα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ είναι τετράγωνα, οι συντεταγμένες των κορυφών τους είναι: $\Delta(\kappa,-\kappa)$, $E(0,-\kappa)$, $Z(-2\kappa,2\kappa)$ και $H(-2\kappa,0)$.



Η εξίσωση της ευθείας ΓΔ είναι:

$$\frac{y-2\kappa}{x-0}=\frac{-\kappa-2\kappa}{\kappa-0}\Leftrightarrow\frac{y-2\kappa}{x}=\frac{-3\cancel{\kappa}}{\cancel{\kappa}}\quad \text{επομένως } y-2\kappa=-3x\Leftrightarrow\quad 3x+y-2\kappa=0.$$

Η εξίσωση της ευθείας ΒΖ είναι:

$$\frac{y-2\kappa}{x-(-2\kappa)}=\frac{0-2\kappa}{\kappa-(-2\kappa)}\Leftrightarrow\frac{y-2\kappa}{x+2\kappa}=\frac{-2\cancel{\kappa}}{3\cancel{\kappa}}\quad \text{επομένως } 3y-6\kappa=-2x-4\kappa\Leftrightarrow\quad 2x+3y-2\kappa=0.$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ είναι:

$$\lambda_{B\Gamma}=\frac{2\kappa-0}{0-\kappa}=-2.$$

η ευθεία (ε) που ορίζεται από το ύψος ΑΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΓ, είναι κάθετη της πλευράς ΒΓ, επομένως για τους συντελεστές διεύθυνσης τους ισχύει:

$$\lambda_{\varepsilon}\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1.$$

Επειδή $\lambda_{B\Gamma}=-2.$ έχουμε ότι:

$$\lambda_{\varepsilon}\cdot(-2)=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon}=\frac{1}{2}.$$

Η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει μορφή $y=\lambda_{\varepsilon}\cdot x$ δηλαδή $y=\frac{1}{2}x$.

γ) Για να αποδείξουμε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΒΖ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο, αρκεί να βρούμε σημείο Μ του οποίου οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις των ευθειών. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η τομή δύο ευθειών από τις τρεις ανήκει στην τρίτη ευθεία.

Οι συντεταγμένες της τομής Μ των ευθειών (ε) και ΓΔ δίνονται από την λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 3x+y-2\kappa=0 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\frac{1}{2}x-2\kappa=0 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{7}\kappa \\ y=\frac{2}{7}\kappa \end{cases} \text{ επομένως } M\left(\frac{4}{7}\kappa,\frac{2}{7}\kappa\right).$$

Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ αφού οι συντεταγμένες του Μ την επαληθεύουν, πράγματι

$$2\cdot\frac{4}{7}\kappa+3\cdot\frac{2}{7}\kappa-2\kappa=\frac{8}{7}\kappa+\frac{6}{7}\kappa-2\kappa=\frac{14}{7}\kappa-2\kappa=2\kappa-2\kappa=0.$$

επομένως οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΒΖ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon_2: 7x - y - 1 = 0$ γωνία $\hat{\varphi} = 45^o$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2.

(Μονάδες 4)

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε_1 είναι

$$\lambda_1 = \frac{5-2}{8-4} = \frac{3}{4}.$$

Άρα, η ε_1 έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_1: y - 2 = \frac{3}{4}(x-4) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_1: 4y - 8 = 3x - 12 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0.$$

β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-4,-3)$ και $\vec{\beta} = (-1,-7)$ είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Άρα, η οξεία γωνία $\hat{\varphi}$ των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}$. Έχουμε ότι:

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

και

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (-4)(-1) + (-3)(-7) = 25.$$

Οπότε,

$$\sigma\upsilon\nu\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sigma\upsilon\nu 45^o.$$

Άρα $\hat{\varphi} = \widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})} = 45^o$.

γ) Για να βρούμε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2, λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 4 = 0 \\ 7x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4(7x-1) - 4 = 0 \\ y = 7x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -25x = 0 \\ 7x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το $(0,-1)$.

δ) Για να είναι η ε_2 διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_3, πρέπει για τη γωνία θ που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_3 να ισχύει $\hat{\theta} = 2 \cdot 45^o = 90^o$, δηλαδή πρέπει $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$. Άρα, αν λ_1 και λ_3 οι συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_3, ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_3 = -1$.

Είναι $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, οπότε:

$$\frac{3}{4}\lambda_3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_3 = -\frac{4}{3}.$$

Επίσης, η ευθεία ε_3 πρέπει να διέρχεται από το σημείο τομής των ε_1 και ε_2, το οποίο από το ερώτημα γ) είναι το $(0, -1)$.

Άρα, η ε_3 έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_3: y - (-1) = -\frac{4}{3}(x - 0) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_3: 3y + 3 = -4x \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_3: 4x + 3y + 3 = 0.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ και (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0$ με $\lambda \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in R$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ αποτελεί εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν $\begin{cases}\lambda \neq 0 \\ \text{ή} \\ \lambda-1 \neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda \neq 0 \\ \text{ή} \\ \lambda \neq 1\end{cases}$. Άρα επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του λ ∈ R.

Ομοίως η εξίσωση (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0$ αποτελεί εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν

$\begin{cases}3\lambda+1 \neq 0 \\ \text{ή} \\ -2\lambda \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda \neq -\frac{1}{3} \\ \text{ή} \\ \lambda \neq 0\end{cases}$. Επίσης δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του λ ∈ R.

β) Έστω $\overrightarrow{\delta_1}$ = (λ-1, -λ) ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την

$$\lambda x+(\lambda-1)y-4=0 \quad \text{και}$$

$\overrightarrow{\delta_2}$ = (-2λ, -3λ-1) ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την

$$(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0.$$

Οι ευθείες με εξισώσεις (1) και (2) είναι κάθετες αν και μόνο αν:

$$\overrightarrow{\delta_1} \perp \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{\delta_1} \cdot \overrightarrow{\delta_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(-2\lambda)-\lambda(-3\lambda-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -2\lambda^2+2\lambda+3\lambda^2+\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-3)$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Λ(2,6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π(λ-1, 2+λ), λ∈R.

α)

i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. (Μονάδες 07)

ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (Μονάδες 05)

β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:

i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι; (Μονάδες 06)

ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (Μονάδες 07)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

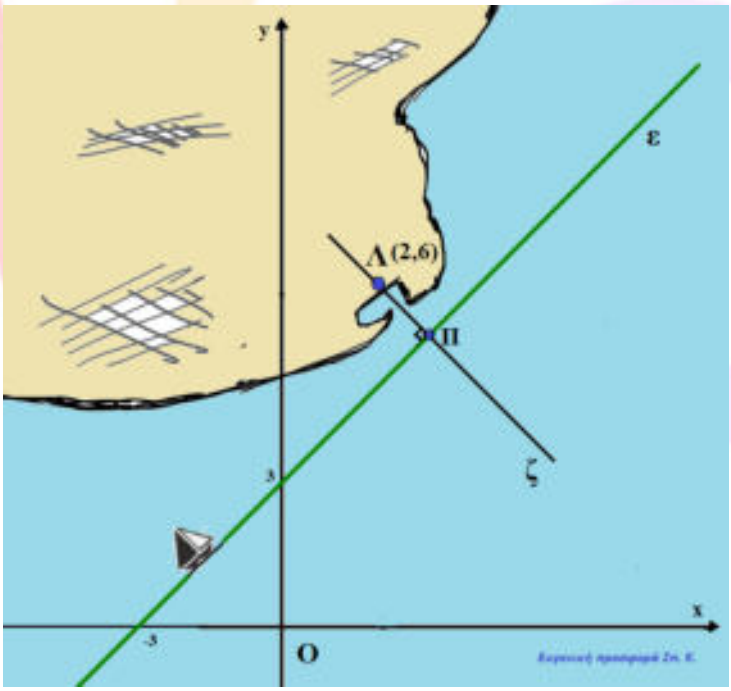
α)

i. Για το σημείο Π(λ-1, 2+λ) έχουμε: $\begin{cases} x_\Pi = \lambda - 1 \\ \text{και} \\ y_\Pi = 2 + \lambda \end{cases}$. Απαλείφοντας το λ από τις 2 εξισώσεις έχουμε ότι $y_\Pi = x_\Pi + 3$. Επομένως η εξίσωση της τροχιάς του πλοίου είναι η ευθεία ε με εξίσωση την x-y+3=0.

ii. Το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι αν οι συντεταγμένες του λιμανιού Λ(2,6) επαληθεύουν την εξίσωση της τροχιάς του, δηλαδή την εξίσωση x-y+3=0.

Για y=6 και x =2 έχουμε 2-6+3 = -1 ≠ 0. Άρα το πλοίο δεν θα περάσει από το λιμάνι.

β)



i. Η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι είναι το μήκος του κάθετου τμήματος ΛΠ, με Π το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Λ. Υπολογίζεται με την απόσταση του σημείου Λ από την ε. Δηλαδή

$$d(\Lambda,\varepsilon) = \frac{|2-6+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ii. Η ευθεία ζ είναι κάθετη ευθεία στην ε, άρα $\lambda_\zeta \cdot \lambda_\varepsilon = -1$. Επειδή $\lambda_\varepsilon = 1$, έχουμε ότι $\lambda_\zeta = -1$ και η εξίσωσή της είναι: $y-y_\Lambda = -(x-x_\Lambda)$ ή y-6 = -x+2 ⇔ x+y=8. Η θέση του πλοίου είναι

το κοινό σημείο των ευθειών ε και ζ, που προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος.

$$(\Sigma)\begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{11}{2} \end{cases}$$

Άρα όταν το πλοίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι βρίσκεται στο σημείο $\left(\frac{5}{2},\frac{11}{2}\right)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(1, 5) και Γ(5, -1).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)

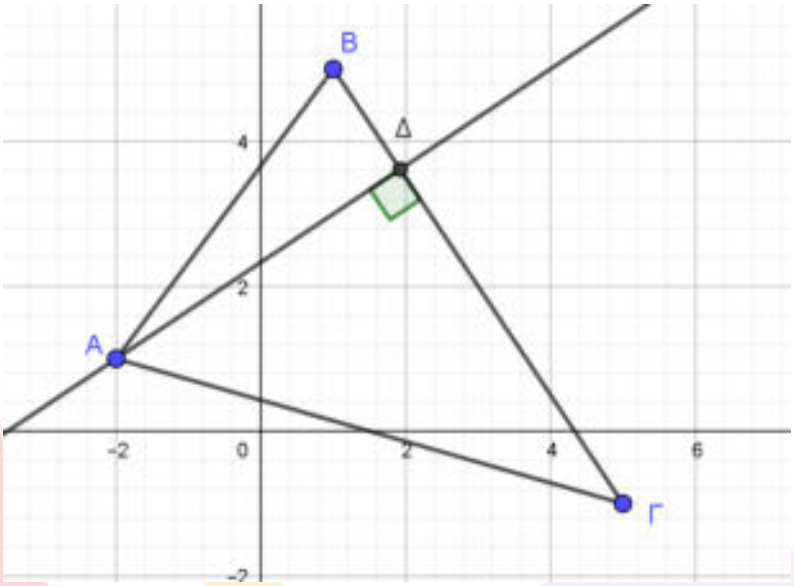
γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α) Είναι: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (1-(-2), 5-1) = (3, 4)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (5-(-2), -1-1) = (7, -2)$, οπότε: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| =$

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|3\cdot(-2)-4\cdot 7| = \frac{1}{2}|-6-28| = \frac{1}{2}|-34| = \frac{1}{2}\cdot 34 = 17.$

β) Είναι ΒΓ: $y - y_B = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B}(x - x_B)$ ή ΒΓ: $y - 5 = \frac{-1-5}{5-1}(x - 1)$ ή ΒΓ: $y - 5 = \frac{-6}{4}(x - 1)$ ή

ΒΓ: $y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 1)$ ή ΒΓ: $2y - 10 = -3x + 3$ ή ΒΓ: $3x + 2y - 13 = 0$.

γ) Έστω υ_α το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Α.

Είναι $\lambda_{B\Gamma} = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$ και $\upsilon_\alpha \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{\upsilon_\alpha}\cdot\lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\upsilon_\alpha} = \frac{-1}{\lambda_{B\Gamma}} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$. Έτσι

υ_α: $y - y_A = \lambda_{\upsilon_\alpha}(x - x_A)$ ή υ_α: $y - 1 = \frac{2}{3}(x-(-2))$ ή υ_α: $3y - 3 = 2x + 4$ ή υ_α: $2x - 3y + 7 = 0$,

η ζητούμενη εξίσωση.

Το σημείο της ευθείας ΒΓ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Α, είναι το ίχνος Δ, του ύψους από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Από το σύστημα των ΒΓ, υ_α έχουμε: $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$, οπότε

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$ και

$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -39 + 14 = -25$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 26 = -47$,

άρα η λύση του συστήματος είναι:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-13} = \frac{25}{13}$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-47}{-13} = \frac{47}{13}$.

Επομένως, $\Delta(\frac{25}{13}, \frac{47}{13})$ είναι το ζητούμενο σημείο της ευθείας ΒΓ.

δ) Έστω Μ(x, y) σημείο του επιπέδου ώστε: (ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ), η οποία λόγω του ερωτήματος (α) γράφεται: (ΜΑΒ) = $\frac{17}{2}$ (1).

Είναι: $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A)$ = (x -(-2), y -1) = (x +2, y - 1), άρα:

(ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{AM} & y_{AM} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x+2 & y-1 \end{vmatrix}\right| =$

$\frac{1}{2}|3\cdot(y - 1) - 4\cdot(x + 2)| = \frac{1}{2}|3y - 3 - 4x - 8| = \frac{1}{2}|3y - 4x - 11|$, οπότε από την (1) ⇔

$\frac{1}{2}|3y - 4x - 11| = \frac{17}{2}$ ⇔ $|3y - 4x - 11| = 17$ ⇔ $3y - 4x - 11 = -17$ ή $3y - 4x - 11 = 17$ ⇔

$4x - 3y - 6 = 0$ ή $4x - 3y + 28 = 0$.

Άρα το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία ε_1: $4x - 3y - 6 = 0$ ή ε_2: $4x - 3y + 28 = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία Α(1, –1), Β(2, 2) και Γ(μ–1, 3μ–2), $\mu \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία

ε: y = 3x +1. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Β και από τις οποίες το σημείο Α, απέχει απόσταση ίση με 1. (Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Καθώς το μ διατρέχει το R, είναι Γ(μ-1, 3μ-2), οπότε αν Γ(x, y) τότε:

$\begin{cases} x = \mu - 1 \\ y = 3\mu - 2 \\ \mu \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = x + 1 \\ y = 3(x+1) - 2 \\ \mu \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ \mu = x + 1 \\ \mu \in R \end{cases}$, επομένως το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1.

β) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-1)}{2-1} = 3 = \lambda_\varepsilon$, άρα η ΑΒ // ε.

Επιπλέον, για x = 1 και y = - 1 από την εξίσωση της ε παίρνουμε $-1 \neq 3\cdot 1 + 1$.

Άρα το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία ε, αφού οι συντεταγμένες του δεν ικανοποιούν την εξίσωσή της. Οπότε τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά. Επομένως καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

γ) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2-1, 2-(-1)) = (1, 3)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (\mu-1-1, 3\mu-2-(-1)) = (\mu-2, 3\mu-1)$, οπότε:

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \mu - 2 & 3\mu - 1 \end{vmatrix}\right| =$

$\frac{1}{2}|1(3\mu - 1) - 3(\mu - 2)| = \frac{1}{2}|3\mu - 1 - 3\mu + 6| = \frac{1}{2}|5| = \frac{5}{2}$, σταθερό για κάθε $\mu \in R$.

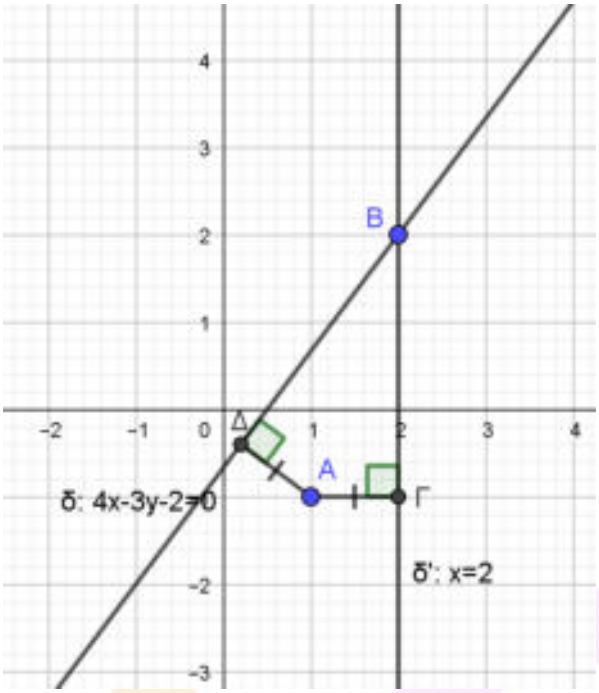
Εναλλακτικά: Λόγω των ερωτημάτων (α) και (β), το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή του Γ στην ΑΒ, έχει σταθερό μήκος, ίσο με την απόσταση των παραλλήλων ευθειών ε και ΑΒ. Επίσης το μήκος του ΑΒ είναι σταθερό, οπότε το εμβαδό του τριγώνου: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot \upsilon$ είναι σταθερό.

δ) Από το σημείο Β(2, 2) διέρχονται οι ευθείες δ': x = 2 και δ: $y - y_B = \lambda(x - x_B)$ ή

δ: y - 2 = λ(x - 2) ή δ: λx - y + 2 - 2λ = 0.

Είναι: $d(A, \delta') = |2 - x_A| = |2 - 1| = 1$, οπότε η ευθεία δ': x = 2 αποτελεί μια λύση στο πρόβλημα. Θα αναζητήσουμε αν στην οικογένεια ευθειών δ, υπάρχει και άλλη ευθεία που να αποτελεί λύση στο πρόβλημα.

Είναι: $d(A, \delta) = \frac{|\lambda\cdot 1 - 1\cdot(-1) + 2 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|\lambda + 1 + 2 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$.



Θέλουμε: $d(A, \delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |3-\lambda| = \sqrt{\lambda^2+1}$ και υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη έχουμε: $|3-\lambda|^2 = \sqrt{\lambda^2+1}^2 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2 = \lambda^2+1 \Leftrightarrow 9-6\lambda+\lambda^2 = \lambda^2+1$ $\Leftrightarrow 6\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ η λύση της εξίσωσης, που επαληθεύει την αρχική, οπότε είναι δεκτή.

Για $\lambda = \frac{4}{3}$ η ευθεία $\delta: \frac{4}{3}x - y + 2 - 2\frac{4}{3} = 0$ ή $\delta: \frac{4}{3}x - y + 2 - \frac{8}{3} = 0$ ή $\delta: \frac{4}{3}x - y - \frac{2}{3} = 0$ ή $\delta: 4x - 3y - 2 = 0$, αποτελεί μία ακόμη λύση στο πρόβλημα.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (Ε) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x - 8y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ). (Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση: (2λ+1)x – (λ – 2)y + λ – 7 = 0 (Ε), λ ∈ ℝ που είναι της μορφής Ax + By + Γ = 0, με A = 2λ +1 και B = λ – 2.

Οπότε: $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + 1 = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = 2 \end{cases}$, άρα για κάθε λ ∈ ℝ είναι A ≠ 0 ή B ≠ 0, επομένως η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία.

β) Η εξίσωση (Ε) γράφεται: 2λx + x - λy + 2y + λ – 7 = 0 ή

(2x – y + 1)λ + (x + 2y – 7) = 0. Το να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση για κάθε λ, είναι ισοδύναμο με το να είναι μηδέν οι δύο παρενθέσεις. Δηλαδή:

$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2(2x + 1) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 4x + 2 - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$

Επομένως, όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), διέρχονται από το σημείο M(1, 3).

γ) Η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_1}$ = (B, -A) = (-8, -6).

Οι ευθείες της οικογένειας ευθειών (Ε), είναι παράλληλες στο διάνυσμα

$\overrightarrow{\delta_2}$ = (B, -A) = (-λ + 2, -2λ - 1).

Οπότε: $\overrightarrow{\delta_1} // \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\delta_1}, \overrightarrow{\delta_2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -\lambda + 2 & -2\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

16λ + 8 – 6λ + 12 = 0 ⇔ 10λ = -20 ⇔ λ = -2.

Για λ = -2 από την εξίσωση (Ε) παίρνουμε: -3x + 4y – 9 = 0.

Άρα ε: -3x + 4y – 9 = 0 είναι η ζητούμενη ευθεία.

δ) Είναι (ζ): 6x-8y+3=0, οπότε $d(M, \zeta) = \frac{|6\cdot 1 - 8\cdot 3 + 3|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο