Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 3 Κωνικές Τομές

Θέμα 2

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-2,5), B(7,8), \Gamma(1,-4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

$\overrightarrow{AB} = (7-(-2),\ 8-5) = (9,3)$

$\overrightarrow{A\Gamma} = (1-(-2),\ -4-5) = (3,-9)$

β) Σύμφωνα με την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου, θα έχουμε:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 9 \cdot 3 + 3 \cdot (-9) = 27 - 27 = 0.$

γ) Αν $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}}\right) = B\hat{A}\Gamma$, γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Gamma}|\text{συν}\theta$, άρα $\text{συν}\theta = 0$.

Αλλά $0 \leq \theta \leq \pi$, έτσι $\theta = 90^0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος C με κέντρο $\mathrm{K}(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $\mathrm{K}(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

β) Είναι $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

γ) Αφού $d(\mathrm{K},\varepsilon)=2=\rho$ η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$ με κέντρο $\mathrm{K}(1,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+4y+1=0$

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho=2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\rho = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \dfrac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 1}}{2} = 2$.

β) Είναι $d(K, \varepsilon) = \dfrac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{12}{5}$.

γ) Αφού $d(K, \varepsilon) = \dfrac{12}{5} > \rho$ η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 13)

β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (c) και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιανδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

(Μονάδες 12)

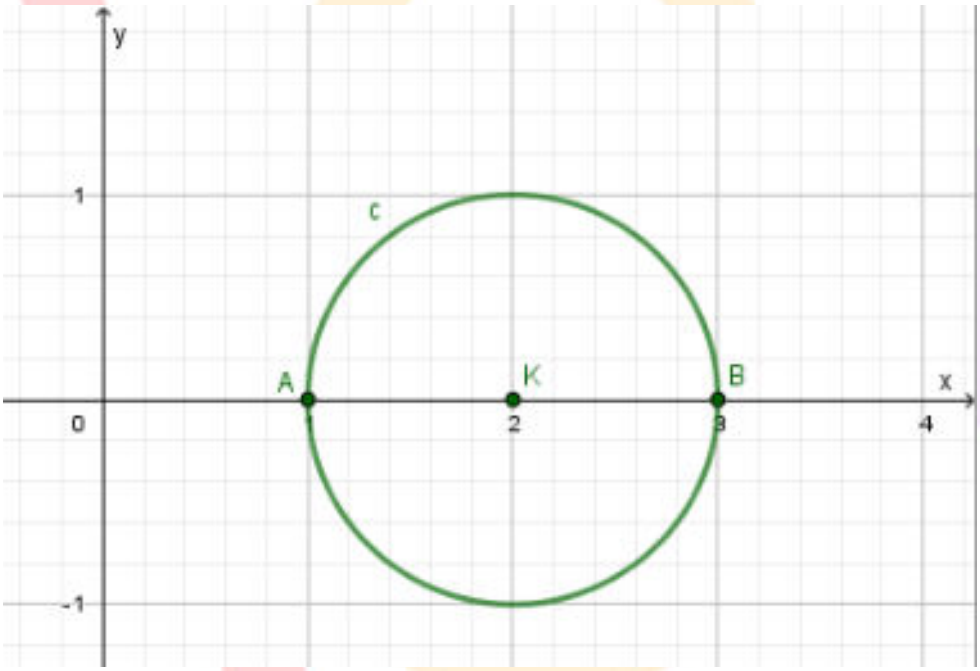
νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ως γνωστόν, η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο, με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

Επειδή $(-4)^2-4\cdot 3=4>0$, η (1) παριστάνει κύκλο. Τότε $-\frac{A}{2}=2$, $-\frac{B}{2}=0$ και $\rho=\frac{\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=1$. Το κέντρο του λοιπόν είναι το σημείο $K(2,0)$, η ακτίνα του είναι $\rho=1$, οπότε η εξίσωση του γράφεται ισοδύναμα (c): $(x-2)^2+y^2=1$ (2).

β) Η γραφική παράσταση του ζητούμενου κύκλου είναι η παρακάτω.



Εναλλακτική λύση:

Από την εξίσωση του κύκλου, για $y=0$ έχουμε:

$$(x-2)^2=1 \Leftrightarrow x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=1.$$

Επομένως ο κύκλος τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

Για $x=0$ η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε ο κύκλος δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Ο(0,0) και διέρχεται από το σημείο Α(1,2).

(Μονάδες 08)

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο Α.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρεθεί το σημείο Β, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του Α σε αυτόν τον κύκλο.

(Μονάδες 08)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το Ο(0,0) είναι $x^2+y^2=\rho^2$ (1), όπου ρ η ακτίνα του κύκλου. Επειδή ο κύκλος διέρχεται από το σημείο Α(1,2) θα πρέπει οι συντεταγμένες του Α να επαληθεύουν την εξίσωση (1), δηλαδή $1^2+2^2=\rho^2$, άρα $\rho^2=5$.

Οπότε, η (1) γίνεται:

$$x^2+y^2=5$$

β)

i. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (1) στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ είναι:

$$xx_1+yy_1=\rho^2 \quad (2)$$

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=5$ στο σημείο του $A(1,2)$ θα είναι:

$$x+2y=5$$

ii. Για να είναι το σημείο Β αντιδιαμετρικό του Α, θα πρέπει το κέντρο Ο να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Επομένως θα ισχύουν:

$$\begin{cases} x_O=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_O=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 0=\dfrac{1+x_B}{2} \\ 0=\dfrac{2+y_B}{2} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 0=1+x_B \\ 0=2+y_B \end{cases}, \text{ άρα } x_B=-1 \text{ και } y_B=-2.$$

Άρα είναι Β(-1,-2).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Τα σημεία Α(-8, 1), Β(4, 5) και Γ(-4, 9) είναι σημεία ενός κύκλου C.

α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να δείξουμε ότι το μέσο, έστω, Κ του τμήματος ΑΒ απέχει από το σημείο Γ απόσταση ίση με $\frac{AB}{2}$.

Το μέσο Κ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $K\left(\frac{-8+4}{2},\frac{1+5}{2}\right)$ = (-2, 3). Το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι (ΑΒ) = $\sqrt{(-8-4)^2+(1-5)^2}$ = $\sqrt{144+16}$ = $\sqrt{160}=4\sqrt{10}$. Το μήκος του τμήματος ΚΓ είναι (ΚΓ) = $\sqrt{(-2+4)^2+(3-9)^2}$ = $\sqrt{4+36}$ = $\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ = $\frac{AB}{2}$.

β) Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(-2,3) και η ακτίνα του ρ=$2\sqrt{10}$, άρα η εξίσωση του κύκλου είναι C: $(x+2)^2+(y-3)^2=40$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $(C): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E.

(Μονάδες 10)

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C).

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Καθώς η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, θα είναι $\alpha^2=16$ και $\beta^2=9$, οπότε $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25$, άρα $\gamma=5$. Έτσι, οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

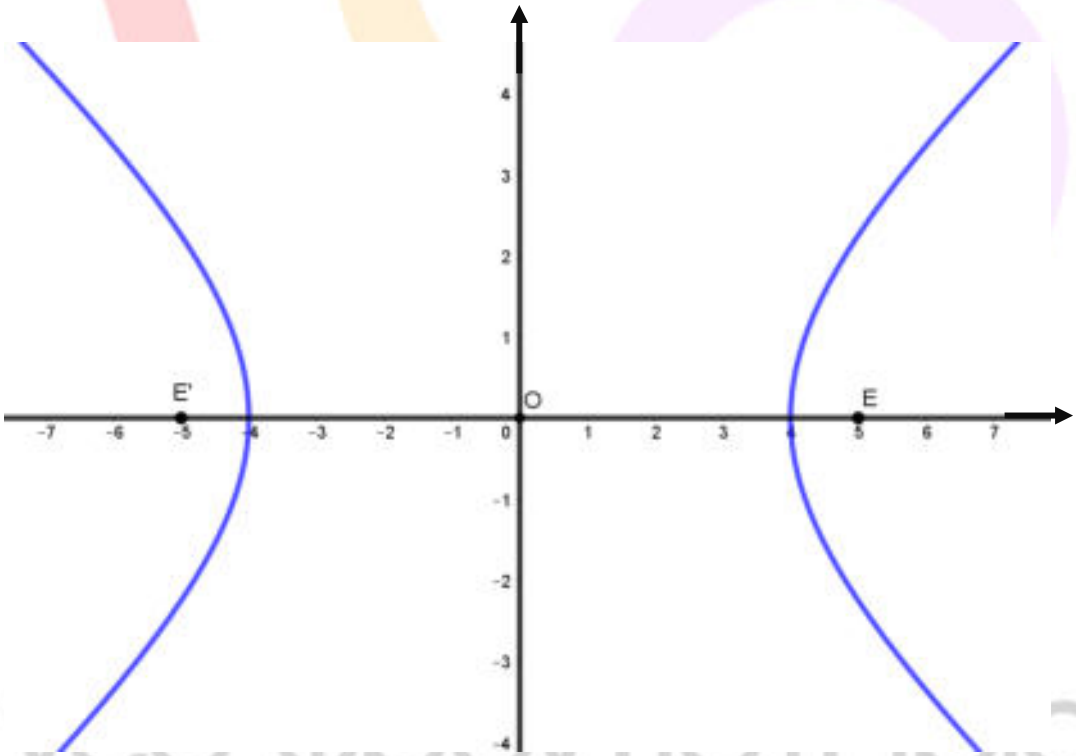
β) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής από τις εστίες ισούται με 2α.

Έτσι, θα έχουμε ότι $|(NE')-(NE)|=2\cdot 4=8$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-\alpha,0)$ και $(\alpha,0)$, δηλαδή στα σημεία $(-4,0)$ και $(4,0)$.

Επίσης, δεν τέμνει τον άξονα y'y, αφού αν αυτό συνέβαινε θα είχαμε $0-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, αδύνατο.

Έτσι, έχουμε το παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ και η ευθεία ε: $3x-4y=8$.

α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.

(Μονάδες 5)

β) Αν $K(1,2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{13}{5}$.

(Μονάδες 13)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β) Έχουμε: $d(K,\varepsilon) = \frac{|3-8-8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{13}{\sqrt{25}} = \frac{13}{5}$.

γ) Αφού $d(K,\varepsilon) = \frac{13}{5} > 2$, η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα. Άρα ευθεία και κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(KA)=\sqrt{5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+(-3)}{2} = -1$ και $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$, οπότε $K(-1,4)$.

β) Είναι $(KA) = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$.

γ) Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(-1,4)$ και ακτίνα την απόσταση $(KA) = \sqrt{5}$, οπότε έχει εξίσωση: $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $\mathrm{K}(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x-3y+5=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε).

(Μονάδες 10)

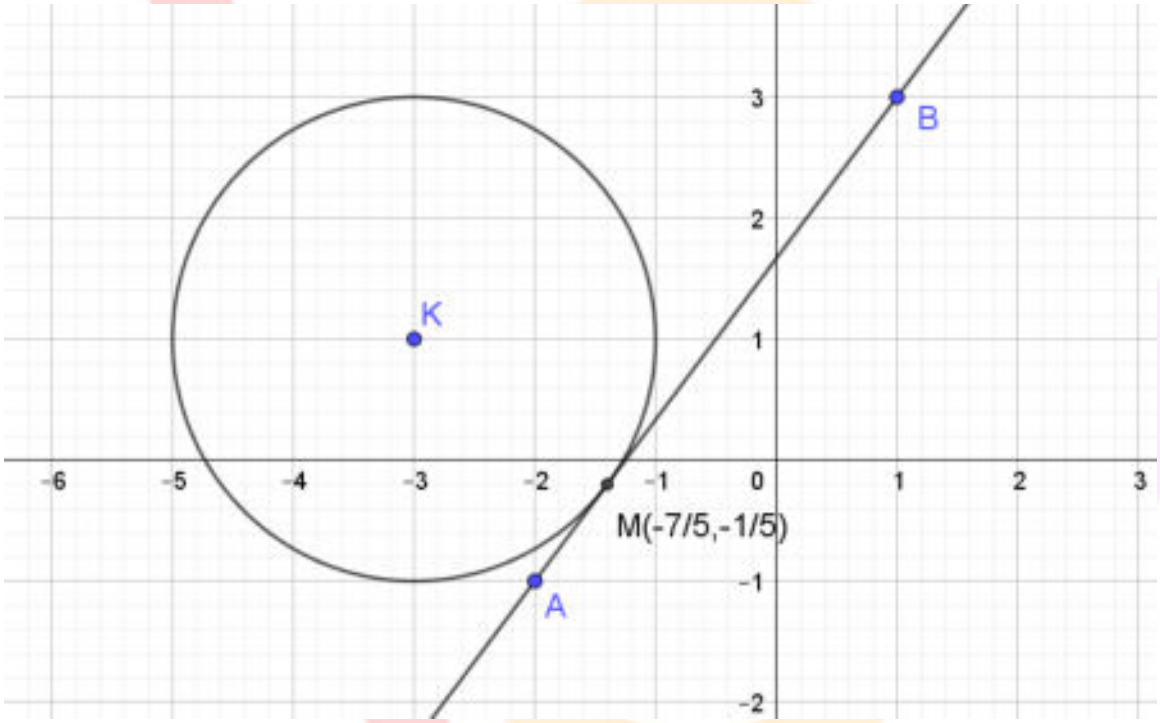
νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\dfrac{|4(-3)-3\cdot 1+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{10}{5}=2$.

β) Ο ζητούμενος κύκλος θα έχει ακτίνα $\rho=d(\mathrm{K},\varepsilon)=2$, οπότε η εξίσωσή του θα είναι η $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

γ) Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,-1)$ και $\mathrm{B}(1,3)$, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Ο κύκλος C και η ευθεία (ε) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2+y^2=25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο C.

(Μονάδες 9)

β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον yy' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 8)

γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 8)

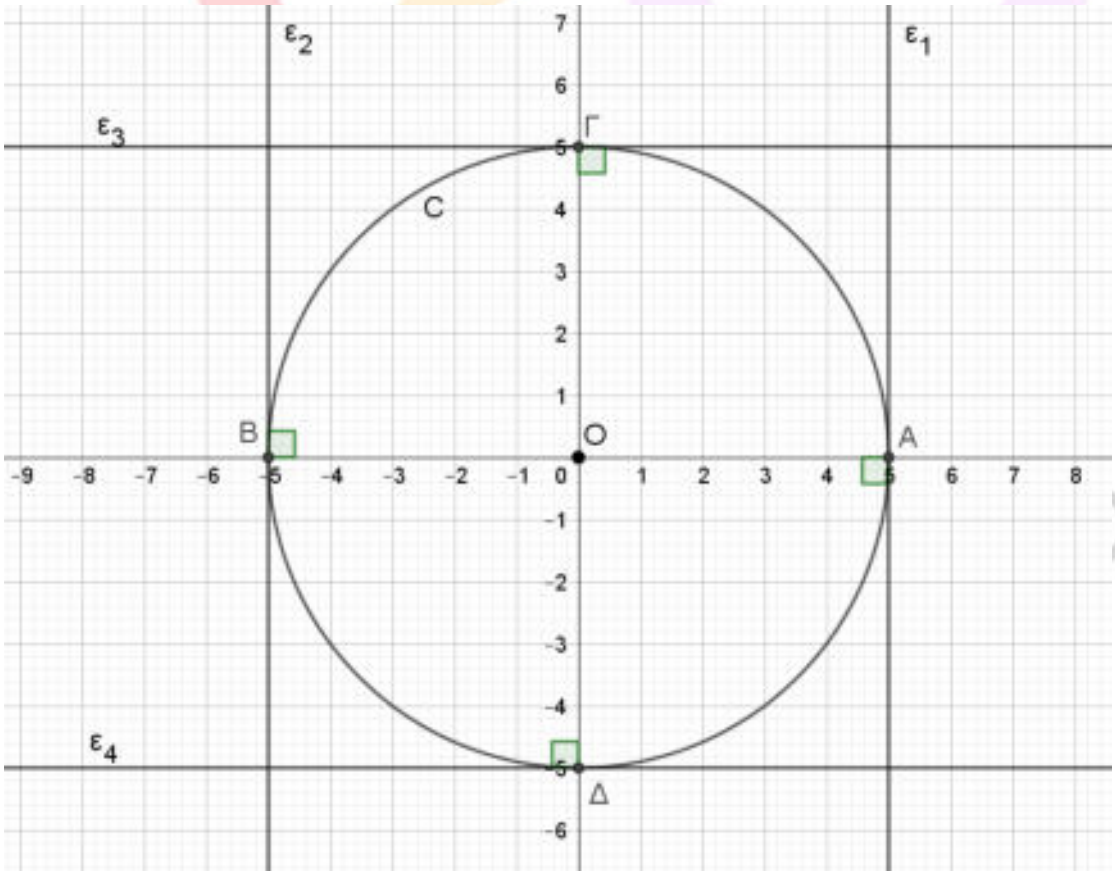
νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 5$. Τα σημεία τομής με τον άξονα xx' είναι τα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$ ενώ τα σημεία τομής με τον άξονα yy' είναι τα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$.

β) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$. Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον yy' οπότε παράλληλες στον xx' και διέρχονται από τα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$, άρα έχουν εξισώσεις $y=5$ και $y=-5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

γ) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$. Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον xx' οπότε παράλληλες στον yy' και διέρχονται από τα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$, άρα έχουν εξισώσεις $x=5$ και $x=-5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C.

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της Μ(4,4).

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C, τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

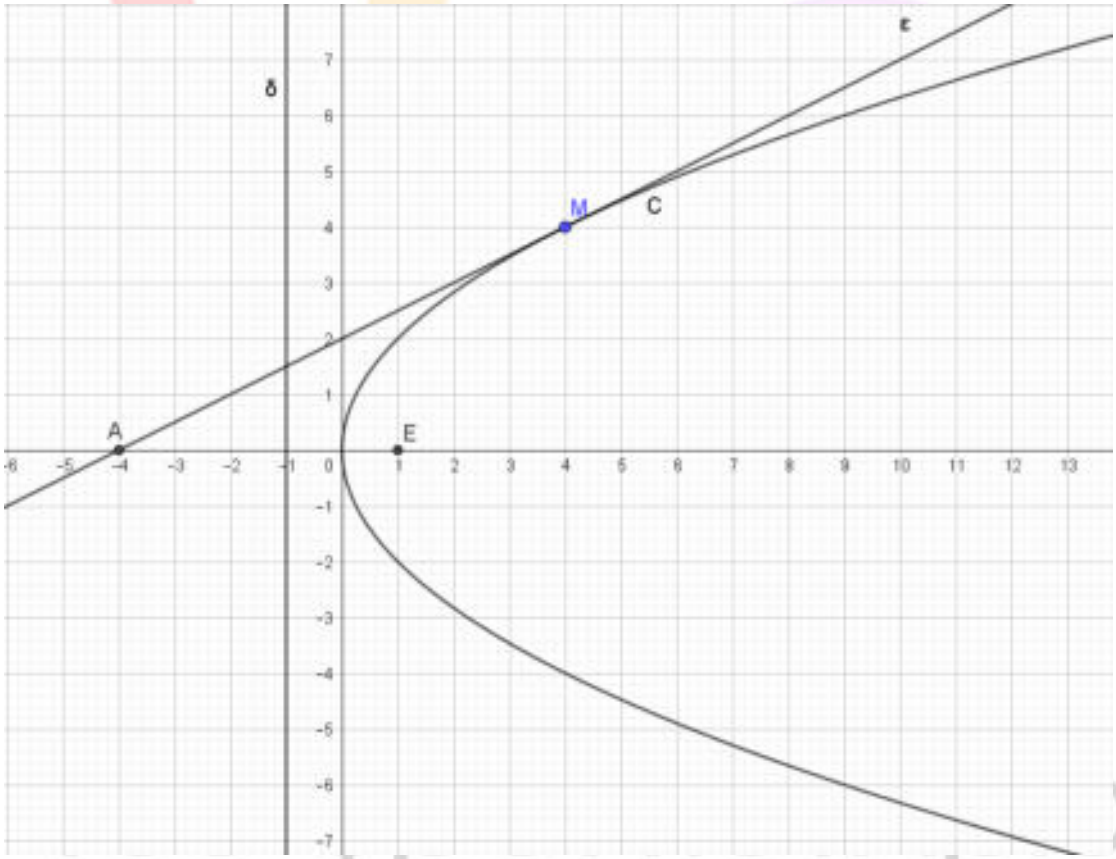
ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$ όπου $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$, οπότε η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ δηλαδή $\mathrm{E}(1,0)$ και διευθετούσα με εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta : x = -1$.

β) Η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση της μορφής $yy_1 = p(x + x_1)$ δηλαδή $y \cdot 4 = 2(x+4) \Leftrightarrow 2y = x + 4$.

γ) Η ευθεία (ε) εκτός από το $\mathrm{M}(4,4)$ διέρχεται και από το σημείο $\mathrm{A}(-4,0)$.

Η παραβολή C, η διευθετούσα δ και η ευθεία (ε) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται το σημείο $A(3, -4)$.

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A.

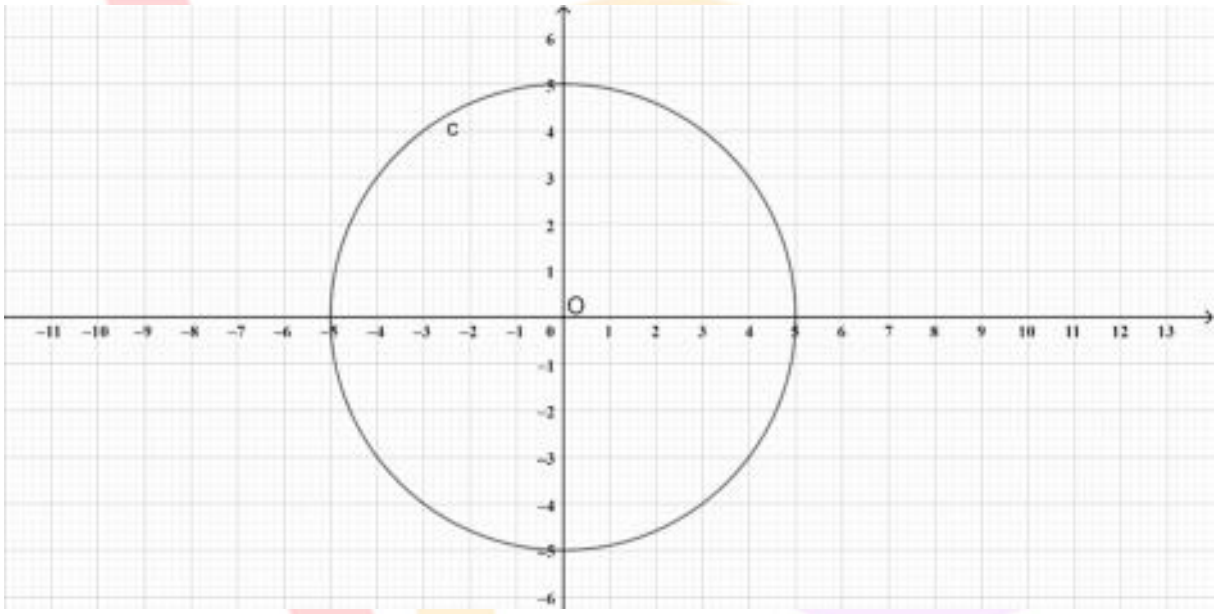
(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, δηλαδή το $(0,0)$ και ακτίνα 5 είναι $C: x^2 + y^2 = 25$.

Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και με τη βοήθεια του διαβήτη κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα ίση με την απόσταση του O από το σημείο $(5,0)$. Προκύπτει το παρακάτω σχήμα:



β) i. Το σημείο $A\ (3, -4)$ επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου C, δηλαδή

$3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25.$

Επίσης, από το σχήμα που κάναμε στο α) ερώτημα φαίνεται ότι το σημείο $A(3, -4)$ ανήκει στον κύκλο C.

ii. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $A(x_1, y_1)$ του κύκλου της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$ δίνεται από το τύπο $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = \rho^2$.

Άρα, η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(3, -4)$ του κύκλου C είναι $\varepsilon: 3x - 4y = 25$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση

$$(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R=2$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του κύκλου (K,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται διαδοχικά:

$$(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4$$

$$(x^2+3x-x-3)+(y^2-3y+y-3)=-4$$

$$x^2+2x+y^2-2y=2$$

$$(x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)=4$$

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2^2 \quad (2)$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R=2$.

β)

i. Η εξίσωση (2) γίνεται για $x=-1$:

$$(-1+1)^2+(y-1)^2=2^2$$

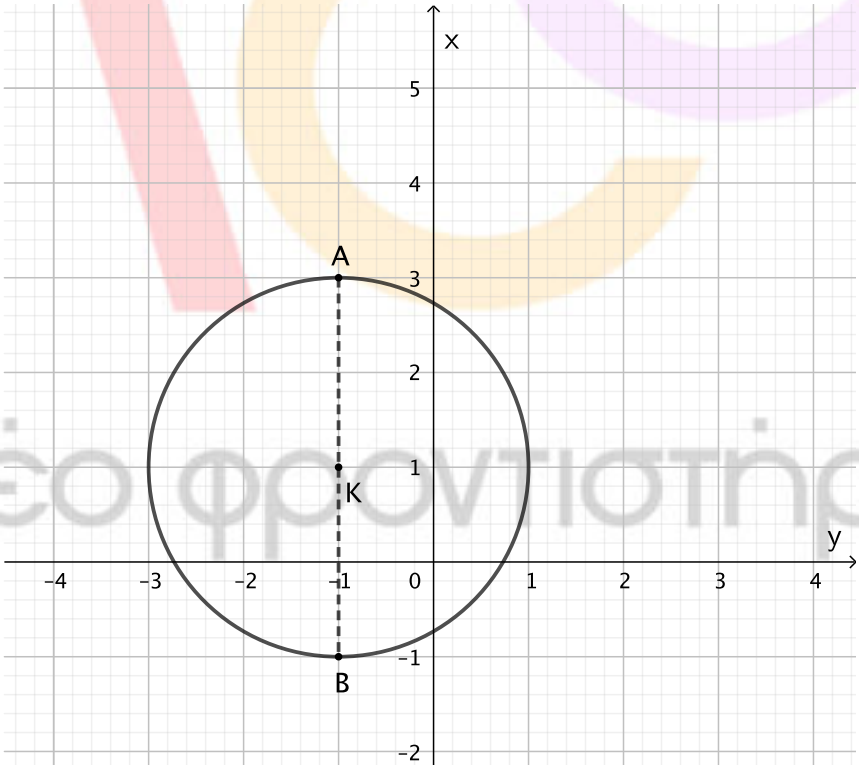
$$(y-1)^2=4$$

$$y-1=2 \text{ ή } y-1=-2$$

$$y=3 \text{ ή } y=-1$$

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι:

$$A(-1,-1) \text{ και } B(-1,3)$$



ii. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στην ευθεία $x=-1$, η οποία διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Επομένως, τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $(\frac{1}{8},1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $8x - 2y + 3 = 0$. (Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι: C: $y^2 = 2\cdot 4x$, οπότε p = 4, άρα $E(\frac{p}{2}, 0) = (2, 0)$ είναι η εστία και

δ: $x = -\frac{p}{2}$ ή x = - 2, είναι η διευθετούσα.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής C στο $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι:

ε_1: $yy_1 = p(x + x_1)$ ή ε_1: $y\cdot 1 = 4(x + \frac{1}{8})$ ή ε_1: $y = 4x + \frac{1}{2}$ με $\lambda_{\varepsilon_1} = 4$.

Επίσης για την ευθεία ε: 8x – 2y + 3 = 0 είναι: $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{8}{-2} = 4$.

Οπότε $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_\varepsilon$ επομένως η $\varepsilon_1 // \varepsilon$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης C: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

α) Να βρείτε τα μήκη ΒΒ', ΑΑ' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της Ε και Ε'. (Μονάδες 12)

β) Αν Ε'(-3,0) και Ε(3,0), να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο Ε' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το Ε και είναι παράλληλη στον άξονα y'y. (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι: C: $16x^2 + 25y^2 = 400$ ή C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, οπότε:

$\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, άρα (A'A) = 2α = 2·5 = 10 είναι το μήκος του μεγάλου άξονα.

Επίσης $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$, άρα (B'B) = 2β = 2·4 = 8 είναι το μήκος του μικρού άξονα.

Ακόμη: $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9$, οπότε γ = 3.

Άρα E'(-γ,0) και E(γ,0) ή E'(-3,0) και E(3,0) είναι οι εστίες της έλλειψης.

β) Έχουμε E'(-3,0) και E(3,0).

Θέλουμε η E' να είναι εστία της ζητούμενης παραβολής, άρα $\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6$, άρα

C': $y^2 = 2px$ ή C': $y^2 = 2\cdot(-6)x$ ή C': $y^2 = -12x$, είναι η ζητούμενη εξίσωση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3,-3), Β(2,-8) και Γ(7,-3). Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 10)

β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Α και εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι: ΒΓ: $y - y_\Gamma = \frac{y_B - y_\Gamma}{x_B - x_\Gamma}(x - x_\Gamma)$ ή ΒΓ: $y + 3 = \frac{-8+3}{2-7}(x - 7)$ ή ΒΓ: $y + 3 = \frac{-5}{-5}(x - 7)$

ή ΒΓ: $y + 3 = x - 7$ ή ΒΓ: $x - y - 10 = 0$.

β) Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι

$\rho = d(A, ΒΓ) = \frac{|1\cdot 3 - 1\cdot(-3) - 10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι:

C: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = \rho^2$ ή C: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = (2\sqrt{2})^2$ ή C: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 8$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x, κορυφή Ο(0,0) και εστία Ε(2,0), όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο Α της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Οxy.

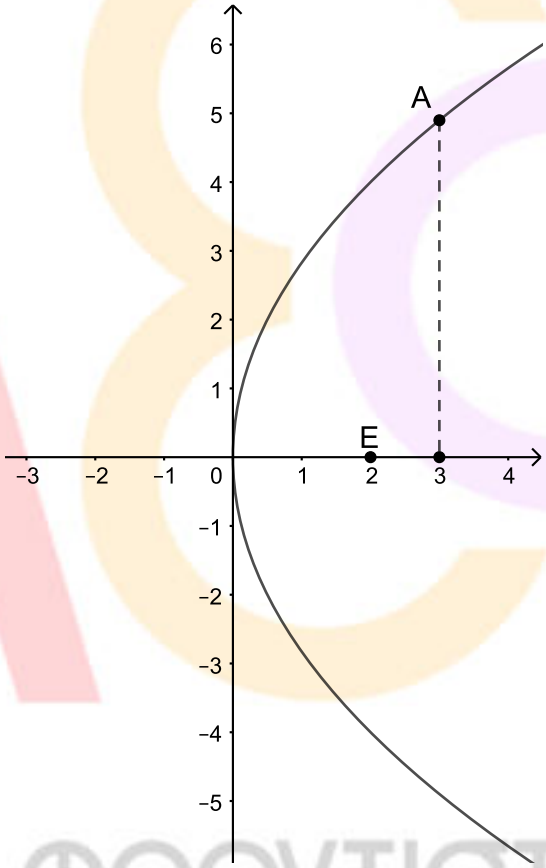
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο Α. (Μονάδες 09)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x και κορυφή Ο(0,0) έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$.

Άρα $\frac{p}{2} = 2$ ή $p = 4$ και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2 \cdot 4 \cdot x$ ή $y^2 = 8x$.

Το σημείο $A(3, y_A)$ της παραβολής έχει $y_A > 0$, εφόσον βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy. Οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής.

Επομένως ${y_A}^2 = 8 \cdot 3$ ή ${y_A}^2 = 24$ ή $y_A = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

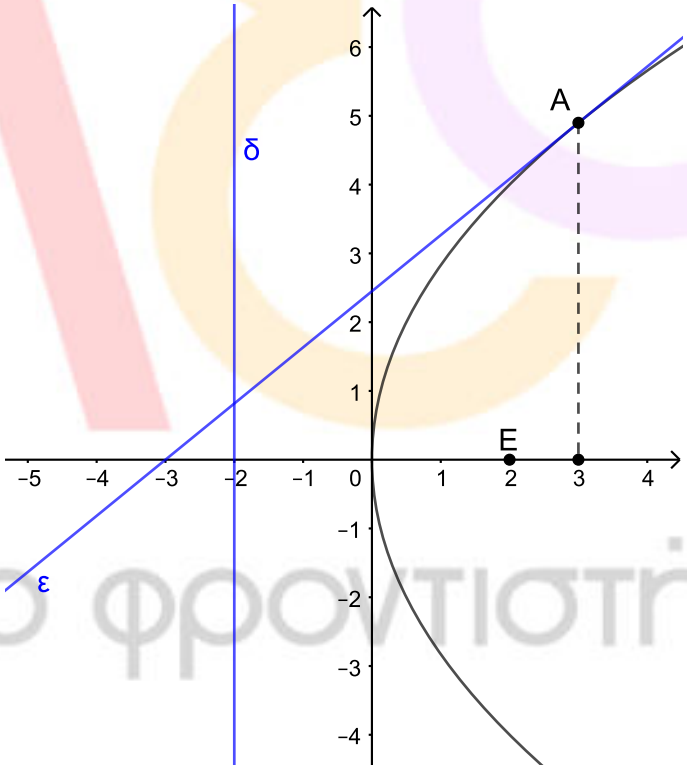
β) Η διευθετούσα (δ) της παραβολής είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{p}{2}$. Για $p = 4$ δηλαδή είναι η $x = -2$, την οποία σχεδιάζουμε στο παρακάτω σχήμα.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο της Α έχει εξίσωση:

$$yy_A = p(x + x_A)$$

Αντικαθιστούμε ως x_A και y_A τις συντεταγμένες του σημείου Α και $p = 4$ και παίρνουμε:

$2\sqrt{6}y = 4(x + 3)$ ή $2\sqrt{6}y = 4x + 12$ ή ή $4x - 2\sqrt{6}y + 12 = 0$ ή $2x - \sqrt{6}y + 6 = 0$.



ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0,3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία A(6,3) και B(-6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για την παραβολή $x^2 = 12y$ ή $x^2 = 2 \cdot 6y$ το $p = 6$, άρα η εστία της είναι το $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ή $E(0,3)$.

Το σημείο $(x_0, 3)$ ανήκει στην παραβολή, άρα:

$$x_0^2 = 12 \cdot 3 \text{ ή } x_0^2 = 36 \text{ ή } (x_0 = 6 \text{ ή } x_0 = -6)$$

Επομένως $A(6,3)$ και $B(-6,3)$ είναι τα ζητούμενα σημεία.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της (x_1, y_1) έχει εξίσωση:

$$xx_1 = p(y + y_1)$$

Για την (ε_1) με σημείο επαφής το $A(6,3)$ αντικαθιστούμε ως x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου Α και $p = 6$:

$$6x = 6(y+3) \text{ ή } 6x = 6y + 18 \text{ ή } x = y + 3 \text{ ή } y = x - 3$$

Για την (ε_2) με σημείο επαφής το $B(-6,3)$ αντικαθιστούμε ως x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου Β και $p = 6$:

$$-6x = 6(y+3) \text{ ή } -6x = 6y + 18 \text{ ή } -x = y + 3 \text{ ή } y = -x - 3$$

γ) Βρίσκουμε το σημείο τομής των (ε_1): $y = x - 3$ και (ε_2): $y = -x - 3$ λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = x - 3 \\ 2y = -6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -3 = x - 3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι το σημείο $(0, -3)$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης και την απόστασή τους.

(Μονάδες 09)

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

(Μονάδες 08)

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0,4)$.

(Μονάδες 08)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της έλλειψης είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=5$ και $\beta=4$.

Επομένως έχει εστίες της μορφής $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$, με $\gamma>0$, όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ ή $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ ή $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$.

Αντικαθιστώντας $\alpha=5$ και $\beta=4$ έχουμε $\gamma^2=5^2-4^2$ ή $\gamma^2=25-16$ ή $\gamma^2=9$ ή $\gamma=3$, εφόσον $\gamma>0$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι οι $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$.

Η απόσταση των εστιών είναι $2\gamma=2\cdot 3=6$.

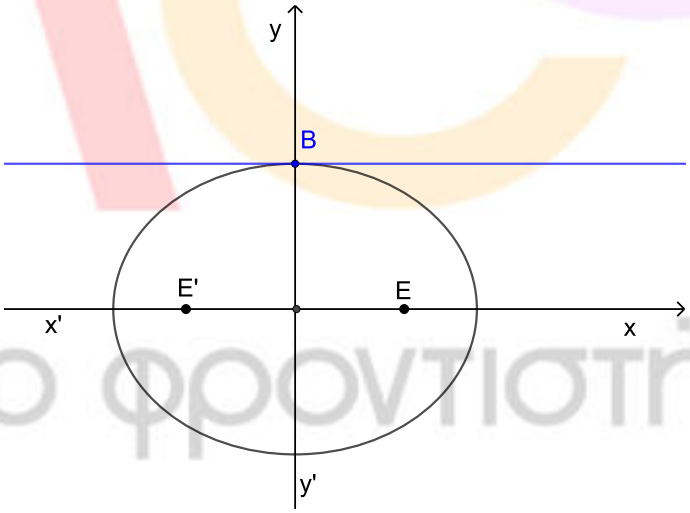
β) Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\beta=2\cdot 4=8$.

Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\alpha=2\cdot 5=10$.

γ) Από τη θεωρία η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της (x_1,y_1) είναι $\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y_2}{\beta^2}=1$.

Αντικαθιστώντας όπου x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου Β της έλλειψης και όπου $\alpha=5$ και $\beta=4$ έχουμε:

$\frac{0x}{25}+\frac{4y}{16}=1$ ή $y=4$, που είναι η εξίσωση της (ε).



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση $(C)\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(1,2022) μπορεί να ανήκει στην (C) .

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Η εξίσωση (C) ανήκει σε υπερβολή, διότι είναι της μορφής $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=2,\beta=3$.

Οι εστίες της έχουν συντεταγμένες $E(\gamma,0),E'(-\gamma,0)$

όπου $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2\Leftrightarrow\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=4+9=13$. Οπότε $E(\sqrt{13},0),E'(-\sqrt{13},0)$.

β) Για $x=1,y=2022$ η εξίσωση (C) γίνεται:

$\frac{1^2}{4}-\frac{2022^2}{9}=36\Leftrightarrow 9-4\cdot 2022^2=36^2\Leftrightarrow 4\cdot 2022^2=9-36^2<0$, η οποία δεν μπορεί να ισχύει.

Άρα το σημείο Μ δεν μπορεί να ανήκει στην υπερβολή.

Γενικότερα, είναι γνωστό ότι για μία υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ισχύει ότι $x\le -a$ ή $x\ge a$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $A(5,6)$, $B(1,2)$, $\Gamma(12,2)$ και το ύψος του $A\Delta$, όπου Δ σημείο της ΒΓ, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και $A\Delta$.

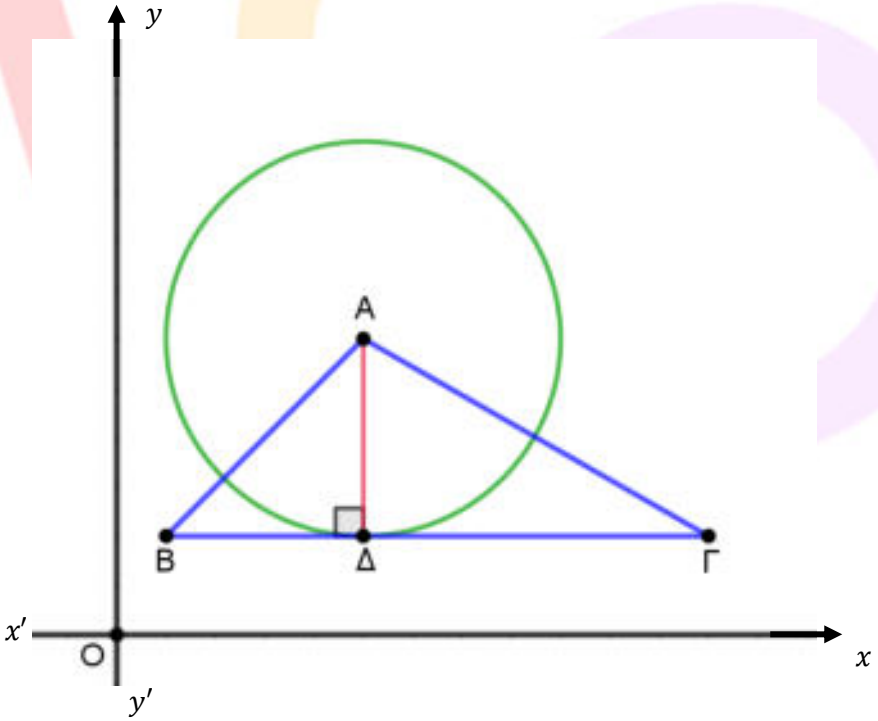
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $B\Gamma$ στο σημείο Δ.

(Μονάδες 10)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

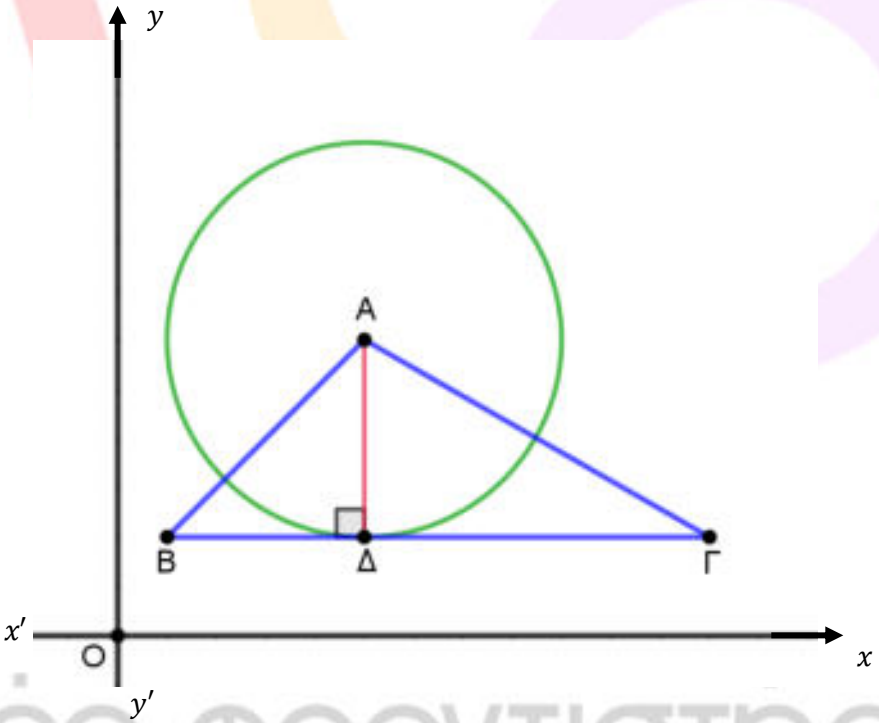
α) Παρατηρούμε ότι τα σημεία Β και Γ έχουν την ίδια τεταγμένη 2, άρα κάθε σημείο της ευθείας $B\Gamma$ έχει τεταγμένη 2 και επομένως η ευθεία ΒΓ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, άρα $B\Gamma: y = 2$.

Η ευθεία ΑΔ είναι κάθετη στην ΒΓ, άρα παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ και καθώς το σημείο Α έχει τετμημένη 5, θα είναι $A\Delta: x = 5$.

β) Αφού το σημείο Δ είναι η τομή των ευθειών με εξισώσεις $A\Delta: x = 5$ και $B\Gamma: y = 2$, άρα θα είναι $\Delta(5, 2)$.

γ) Η ακτίνα του κύκλου θα είναι το μήκος $A\Delta = y_A - y_\Delta = 6 - 2 = 4$.

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστηριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 9)

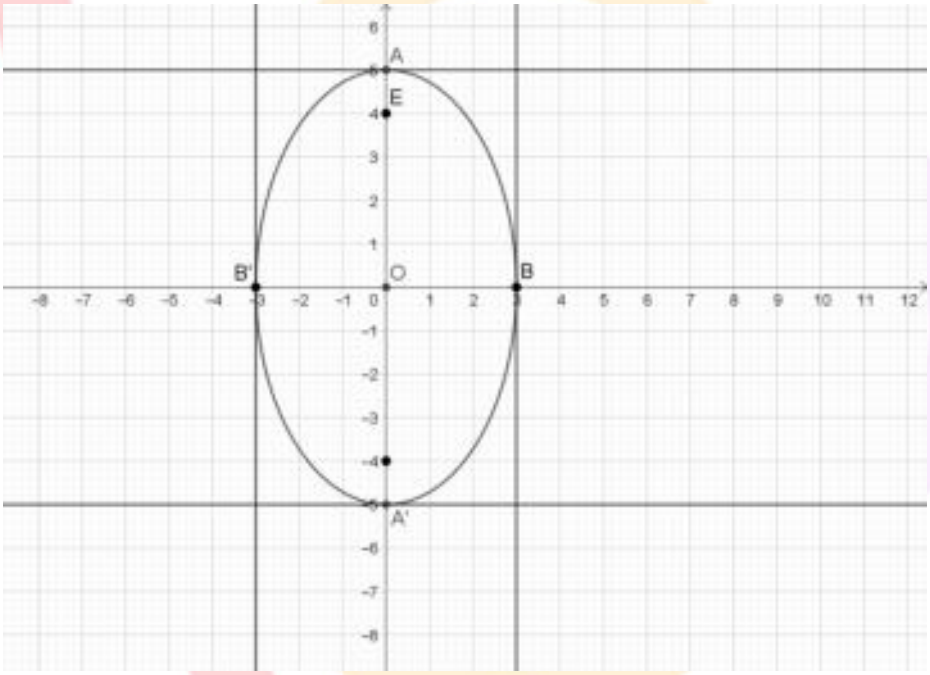
νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha^2 = 25$ και $\beta^2 = 9$ οπότε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 9 = 16$ και άρα $\gamma = 4$. Οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $E(0,4)$ και $E'(0,-4)$.

β) Η έλλειψη C έχει κορυφές τα σημεία $A(0,5)$, $A'(0,-5)$, $B(3,0)$, $B'(-3,0)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

γ) Οι εφαπτόμενες στα άκρα των δύο αξόνων της, δηλαδή στα σημεία $A(0,5)$, $A'(0,-5)$, $B(3,0)$, $B'(-3,0)$ έχουν εξισώσεις $y = 5$, $y = -5$, $x = 3$, $x = -3$ και φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(0,3), Β(3,4) και Γ(1,0).

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το μέσο Κ της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι: $\overrightarrow{AB}$ = (x_B-x_A, y_B-y_A) = (3-0 , 4-3) = (3 , 1),

$\overrightarrow{A\Gamma}$ = (x_Γ-x_A, y_Γ-y_A) = (1-0 , 0-3) = (1 , -3).

Οπότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ = 3·1 + 1·(-3) = 3 – 3 = 0, άρα $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$ ή $B\hat{A}\Gamma$ = 90°.

β) Το σημείο Κ που είναι το μέσο του τμήματος ΒΓ θα έχει συντεταγμένες:

Κ $\left(\frac{X_B+X_\Gamma}{2}, \frac{Y_B+Y_\Gamma}{2}\right)$ ή Κ $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$ ή Κ(2 , 2).

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή και τα σημεία Α, Β και Γ είναι σημεία του ζητούμενου κύκλου, άρα η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, συνεπώς η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι διάμετρος του κύκλου και ισούται με:

(ΒΓ) = $\sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2}$ = $\sqrt{(1-3)^2 + (0-4)^2}$ = $\sqrt{4+16}$ = $\sqrt{20}$ = $2\sqrt{5}$.

Όμως ΒΓ = 2R, άρα 2R = $2\sqrt{5}$ ή R = $\sqrt{5}$.

Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ θα έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο Κ του ερωτήματος β) και η εξίσωσή του θα είναι:

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5.$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0 \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R).

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο A.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + Γ = 0$, με $A = -1$, $B = -1$, $Γ = -\frac{7}{2}$.

Είναι

$$A^2 + B^2 - 4Γ = 1 + 1 + 14 = 16 > 0$$

Επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4Γ}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

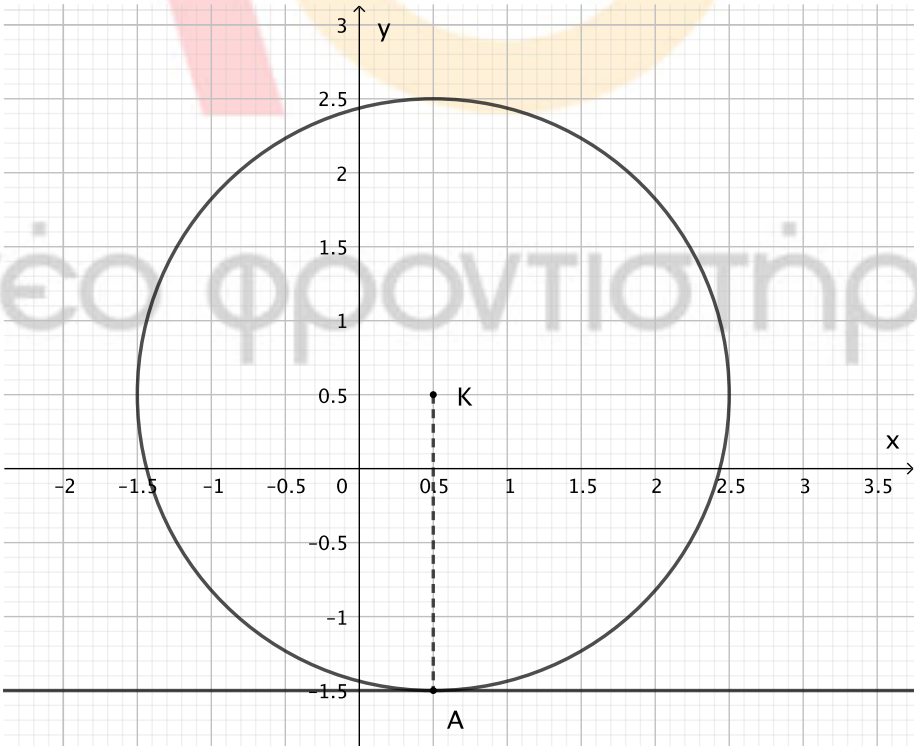
β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{10}{4} - \frac{5}{2} = 0$$

Άρα, το σημείο Α είναι σημείο του κύκλου (K,R).

γ) Η εφαπτομένη του κύκλου (K,R) στο Α είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ. Αφού είναι $x_K = x_A$, η ακτίνα ΚΑ είναι κάθετη στον άξονα x΄x, οπότε η εφαπτομένη του κύκλου στο Α θα είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. Άρα, θα έχει εξίσωση

$$y = y_A \text{ ή } y = -\frac{3}{2}$$



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο Α(1,2), να βρείτε:

i. Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)

ii. Την εστία Ε της παραβολής. (Μονάδες 05)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το Ο, αν η μια εστία της είναι το σημείο Ε(1,0) και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Η παραβολή $y^2 = 2px$ διέρχεται από το Α(1,2), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή:

$$2^2 = 2p1 \text{ ή } 4 = 2p \text{ ή } p = 2$$

Επομένως, $y^2 = 2 \cdot 2x$ ή $y^2 = 4x$.

ii. Η εστία Ε της παραβολής είναι:

$$E\left(\frac{p}{2},0\right) \text{ ή } E(1,0)$$

β) Μία από τις εστίες της έλλειψης είναι το σημείο Ε(γ,0) και ο μεγάλος άξονας έχει μήκος 2α. Αφού η εστία είναι το σημείο Ε(1,0), έχουμε ότι γ = 1.

Επειδή ο μεγάλος άξονας έχει μήκος ίσο με 4 έχουμε ότι 2α = 4, οπότε α = 2.

Είναι:

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

Οπότε, η εξίσωση της έλλειψης γίνεται:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της Α και Α΄ είναι 8.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι η $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$. Εφόσον η $y = \frac{3}{4}x$ είναι ασύμπτωτη και α,β > 0, έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4}$ δηλαδή 4β = 3α ή $\beta = \frac{3}{4}\alpha$. (1)

Η απόσταση των κορυφών της ΑΑ' είναι ίση με 2α, οπότε 2α = 8, άρα α = 4. (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\beta = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$.

Επομένως η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ γίνεται $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ ή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

ii. $\alpha^2+\beta^2 = \gamma^2$ και από το αi) ερώτημα έχουμε ότι α = 4 και β = 3. Επομένως $4^2+3^2 = \gamma^2$ ή $\gamma^2 = 25$ ή γ = 5.

Οι εστίες είναι της μορφής Ε(γ,0) και Ε'(-γ,0), επομένως Ε(5,0) και Ε'(-5,0).

β) Η εφαπτόμενη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της (x_1, y_1) δίνεται από τον τύπο $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$ ή $\frac{xx_1}{16} - \frac{yy_1}{9} = 1$. Στο σημείο $(5, \frac{9}{4})$ θα έχουμε $\frac{5x}{16} - \frac{\frac{9}{4}y}{9} = 1$ ή $\frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την ευθεία ε: $3x - 4y = 0$ και το σημείο Α(-2,1).

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία είναι 2. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο Α. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στην ευθεία (ε). (Μονάδες 07)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση του σημείου (x_o, y_o) από την ευθεία Ax + By + Γ = 0 δίνεται από τον τύπο:

$d = \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Επομένως έχουμε $d(A,\varepsilon) = \frac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$

β) Η ζητούμενη ευθεία (η) είναι κάθετη στην (ε), οπότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης της (η) και της (ε) θα είναι -1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\lambda_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας (η) θα είναι $-\frac{4}{3}$.

Η ευθεία διέρχεται από το Α(-2,1), οπότε η εξίσωση θα είναι $y-y_o = \lambda(x-x_o)$ ή $y - 1 = -\frac{4}{3}(x+2)$

ή $y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + 1$ ή $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$.

γ) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο (x_o, y_o) και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \rho^2$ (1). Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία (ε), θα πρέπει η απόσταση του κέντρου του Α από την (ε) να ισούται με την ακτίνα ρ. Στο ερώτημα (α) βρήκαμε ότι η απόσταση του Α από την (ε) είναι 2, επομένως ρ = 2 και η (1) γίνεται $(x-(-2))^2 + (y-1)^2 = 2^2$ ή $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση

$$y^2 = x \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,-1) είναι σημείο της παραβολής.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της Α(1,-1).

(Μονάδες 08)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αρχικά υπολογίζουμε την παράμετρο p της παραβολής. Είναι:

$$2p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

Η εστία Ε της παραβολής έχει συντεταγμένες

$$E\left(\frac{p}{2},0\right) = \left(\frac{1}{4},0\right)$$

Η διευθετούσα (δ) της παραβολής έχει εξίσωση

$$x = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$$

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Για $x = 1$ και $y = -1$ είναι:

$$(-1)^2 = 1$$

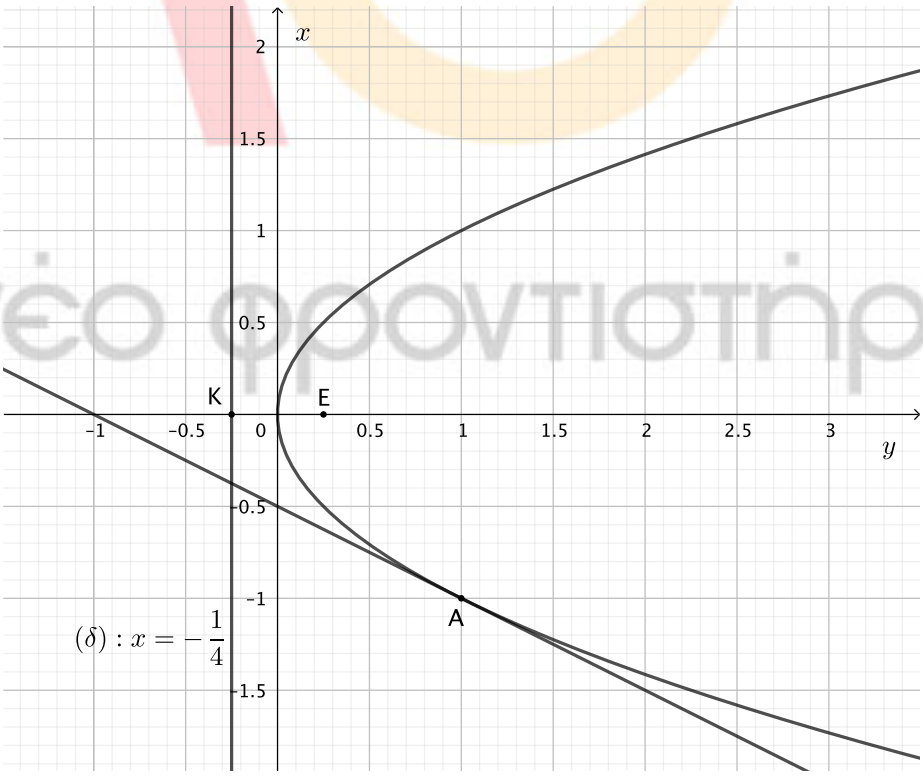
Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο Α είναι σημείο της παραβολής.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι:

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Αφού δίνεται Α(1,-1), η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$-1 \cdot y = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{ή} \quad x + 2y + 1 = 0$$



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1 \qquad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β(0,9) είναι σημείο της έλλειψης.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της Β(0,9).

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η έλλειψη με εξίσωση την (1) έχει $\alpha^2 = 225$, $\beta^2 = 81$ και εστίες τα σημεία Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0). Είναι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 225 - 81 = 144$$

Άρα, $\gamma = 12$. Επομένως, οι εστίες της έλλειψης είναι:

$$E(12,0),\ E'(-12,0)$$

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου Β επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης. Για $x = 0$ και $y = 9$ είναι:

$$\frac{0^2}{225} + \frac{9^2}{81} = 1$$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο Β είναι σημείο της έλλειψης .

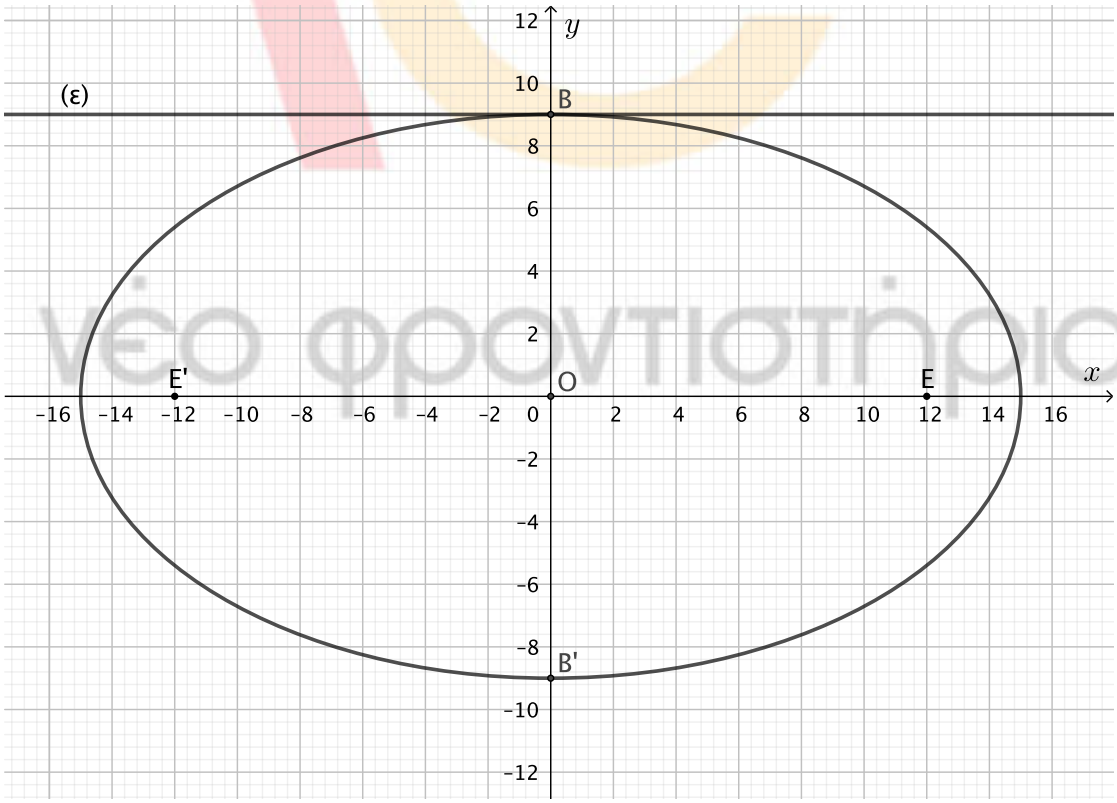
γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $B(x_1,y_1)$ είναι:

$$\frac{xx_1}{225} + \frac{yy_1}{81} = 1$$

Αφού δίνεται ότι Β(0,9), η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$\frac{0x}{225} + \frac{9y}{81} = 1 \quad \text{ή} \quad y = 9$$

Η καμπύλη της έλλειψης, οι εστίες Ε, Ε΄ της και η εφαπτομένη (ε) απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση

$$x^2 - y^2 = 25 \qquad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1$$

Επομένως, είναι $\alpha^2=25 \Leftrightarrow \alpha=5$, $\beta^2=25 \Leftrightarrow \beta=5$ και $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25+25=50$.

Άρα, $\gamma=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0), δηλαδή:

$$E\left(5\sqrt{2},0\right),\ E'\left(-5\sqrt{2},0\right)$$

β) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

είναι οι ευθείες

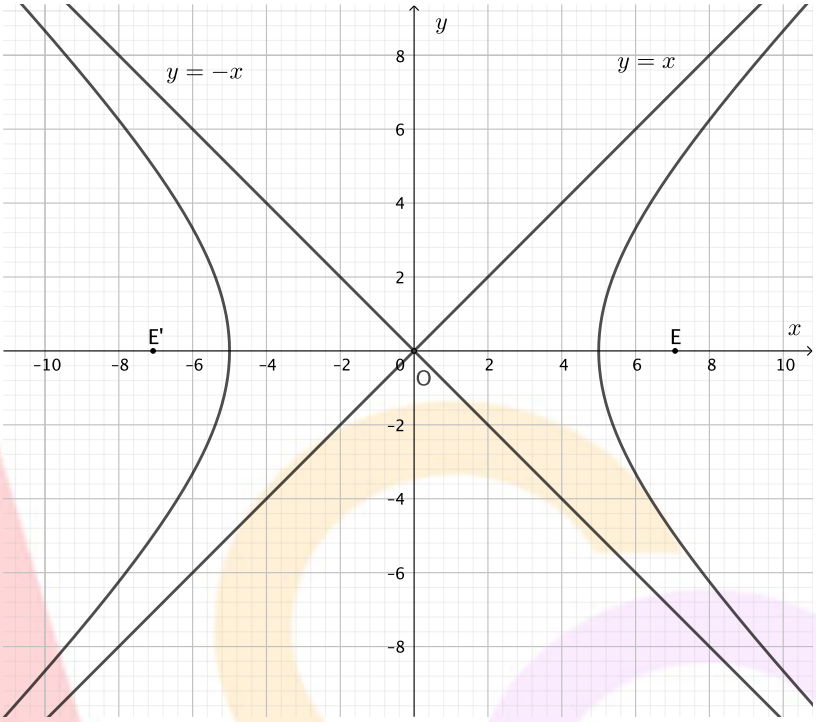
$$(\varepsilon_1):\ y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2):\ y=-\frac{\beta}{\alpha}x$$

δηλαδή

$$(\varepsilon_1):\ y=x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2):\ y=-x$$

γ) Οι ευθείες (ε_1), (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-1$ αντίστοιχα. Αφού $\lambda_1\lambda_2=-1$, συμπεραίνουμε ότι οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) είναι κάθετες. Η καμπύλη της υπερβολής, οι εστίες Ε, Ε΄ της και οι ασύμπτωτες απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:

νέο φροντιστήριο



νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση y^2 = 4x (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ..... Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(....., ...) και η διευθετούσα έχει εξίσωση .....». (Μονάδες 09)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο Α(1, -2). (Μονάδες 08)

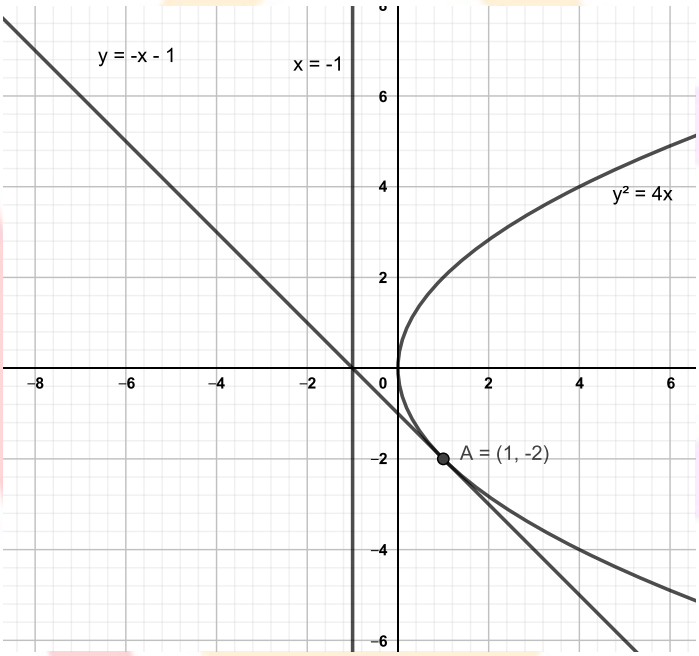
γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδες 08)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής y^2 = 2px, όπου 2p= 4, άρα p=2. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε παραβολή με εστία στον άξονα x'x. Η Εστία της είναι το σημείο E($\frac{p}{2}$, 0) και η διευθετούσα της έχει εξίσωση x = -$\frac{p}{2}$.

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή.** Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(**1, 0**) και η διευθετούσα έχει εξίσωση **x = -1** ».



β) Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) της παραβολής είναι της μορφής : $yy_1=p(x+x_1)$ και επειδή p =2 η εφαπτόμενη ε θα είναι ε: $yy_1=2(x+x_1)$. Δίνεται το σημείο επαφής Α(1, -2), οπότε η εξίσωση της ευθείας ε για x_1 = 1 και y_1 = -2 θα είναι ε: -2y= 2 (x +1) ή ε: y = -x -1.

γ) Για να βρω το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x θέτω στην εξίσωση της ευθείας ε όπου y = 0. Οπότε έχω -x -1 = 0 ή x = -1, δηλαδή το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x είναι το σημείο (-1,0), το οποίο είναι σημείο της διευθετούσας αφού η εξίσωση της διευθετούσας είναι η x = -1.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\frac{\chi^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ..... Οι εστίες της Ε και Ε' , έχουν συντεταγμένες Ε(....., ...) και Ε'(....., ...) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με ..... και η εκκεντρότητα της είναι ίση με .....».

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της Β(0,-2). (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

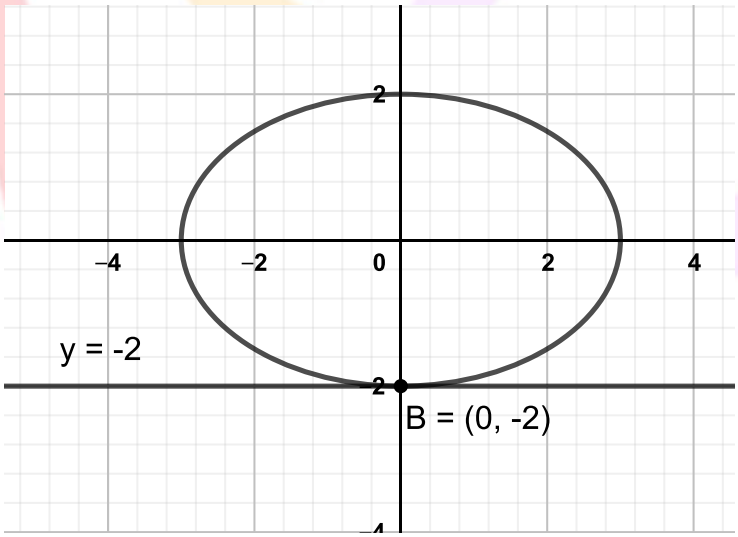
ΛΥΣΗ

Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οι εστίες έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) , και Ε'(-γ, 0), όπου $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{5}$. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης είναι ίσο με $2\alpha = 2\cdot 3 = 6$

α) «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **έλλειψη**. Οι εστίες της Ε και Ε' , έχουν συντεταγμένες Ε($\sqrt{5}$, **0**) και Ε'**(-$\sqrt{5}$, 0)** . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με **6** και η εκκεντρότητα της είναι ίση με $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ».

β)



Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) της έλλειψης είναι της μορφής ε: $\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\cdot xx_1 + 9\cdot yy_1 = 36$. Δίνεται το σημείο επαφής Β(0,-2), οπότε αν θέσουμε στην εξίσωση της ευθείας ε όπου $x_1 = 0$ και $y_1 = -2$ θα έχουμε ε : $4x\cdot 0 + 9y\cdot(-2) = 36$ ή ε : $-18y = 36$ ή ε: $y = -2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$. (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1) έχει $\alpha^2 = 4$ και $\beta^2 = 1$. Οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα x'x και έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) και Ε'(-γ, 0), όπου $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{5}$.

i. Οι εστίες της υπερβολής έχουν συντεταγμένες Ε($\sqrt{5}$, 0) και Ε'(- $\sqrt{5}$, 0).

ii. Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

iii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = \frac{\beta}{\alpha} x = \frac{1}{2} x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha} x = -\frac{1}{2} x$.

β) Η εξίσωση της εφαπτόμενης της υπερβολής στο σημείο της με συντεταγμένες (x_1, y_1) θα έχει τη μορφή $\varepsilon : \frac{x x_1}{4} - y y_1 = 1 \Leftrightarrow x x_1 - 4 y y_1 = 4$. Οπότε για $x_1 = \sqrt{5}$ και $y_1 = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση της ευθείας ε θα έχουμε $\varepsilon : \sqrt{5} \cdot x - 4 \cdot \frac{1}{2} y = 4$ ή $\varepsilon : \sqrt{5} \cdot x - 2 y = 4$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση

$$(y-1)^2 = (3+x)(1-x) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Η αρχή $O(0,0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R).

(Μονάδες 7)

γ) Η ευθεία (ε): $x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R).

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται διαδοχικά:

$$(y-1)^2 = (3+x)(1-x)$$
$$(y-1)^2 = 3-3x+x-x^2$$
$$(y-1)^2 = 3-2x-x^2$$
$$(x^2+2x+1)+(y-1)^2 = 4$$
$$(x+1)^2+(y-1)^2 = 4$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$.

β) Υπολογίζουμε την απόσταση ΟΚ της αρχής $O(0,0)$ των αξόνων από το κέντρο $K(-1,1)$ του κύκλου. Είναι:

$$OK = \sqrt{(x_K - x_O)^2+(y_K - y_O)^2} = \sqrt{(-1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2} < R = 2$$

Άρα, η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R).

γ) Υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία (ε) με εξίσωση $x+y-2=0$. Είναι:

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < R = 2$$

Άρα, η ευθεία (ε) είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

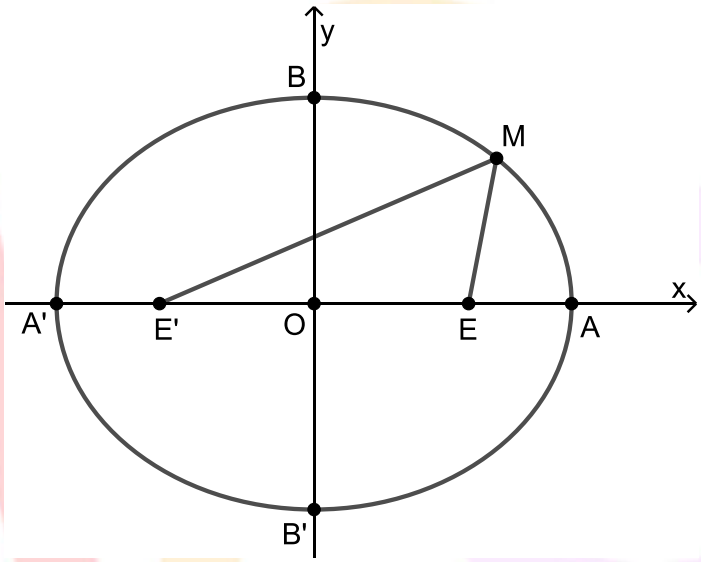
Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5\,,0)$, $A(5\,,0)$, $B'(0\,,-4)$ και $B(0\,,4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A) = 10$ και $(B'B) = 8$. (Μονάδες 10)

ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3\,,0)$ και $E(3\,,0)$. (Μονάδες 10)

β) Έστω M ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι $(ME') + (ME) = 10$. (Μονάδες 5)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i) Είναι $(A'A) = |x_A - x_{A'}| = |5+5| = 10$ και $(B'B) = |y_B - y_{B'}| = |4+4| = 8$,

άρα ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $(A'A) = 10$ και ο μικρός άξονας έχει μήκος $(B'B) = 8$.

ii) Είναι $(A'A) = 2\alpha$ ή $2\alpha = 10$ ή $\alpha = 5$

και $(B'B) = 2\beta$ ή $2\beta = 8$ ή $\beta = 4$.

Επομένως

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

$5^2 = 4^2 + \gamma^2$

$\gamma^2 = 9$

$\gamma = 3$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$.

β) Επειδή το Μ είναι σημείο της έλλειψης, σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης θα είναι

$(ME') + (ME) = 2\alpha$ ή $(ME') + (ME) = 10$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

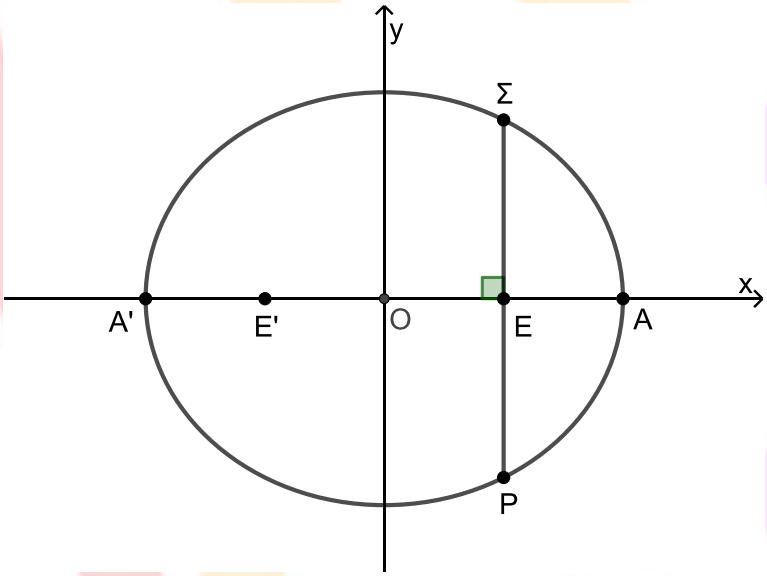
Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2\,,0)$ και $E(2\,,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A\,) = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. (Μονάδες 12)

β) Έστω Σ και Ρ τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία $E(2\,,0)$. Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2\,,3)$ και $P(2\,,-3\,)$. (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣP . (Μονάδες 5)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-2\,,0)$ και $E(2\,,0)$,

άρα $2\gamma = (E'E\,) = 4$ ή $\gamma = 2$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $(A'A\,) = 8$,

άρα $2\alpha = (A'A\,) = 8$ ή $\alpha = 4$.

Επομένως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 4^2 - 2^2 = 12$.

Επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$, η έλλειψη έχει εξίσωση της μορφής

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, οπότε με αντικατάσταση προκύπτει $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

β) i) Από την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, για $x = x_E = 2$ βρίσκουμε:

$\frac{2^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

$\frac{1}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$

$3 + y^2 = 12$

$y^2 = 9$

$y = 3$ ή $y = -3$

Επειδή το Σ έχει θετική τεταγμένη και το P αρνητική, θα είναι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3\,)$.

ii) Είναι $(\Sigma P) = |y_P - y_\Sigma| = |-3-3| = |-6| = 6$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

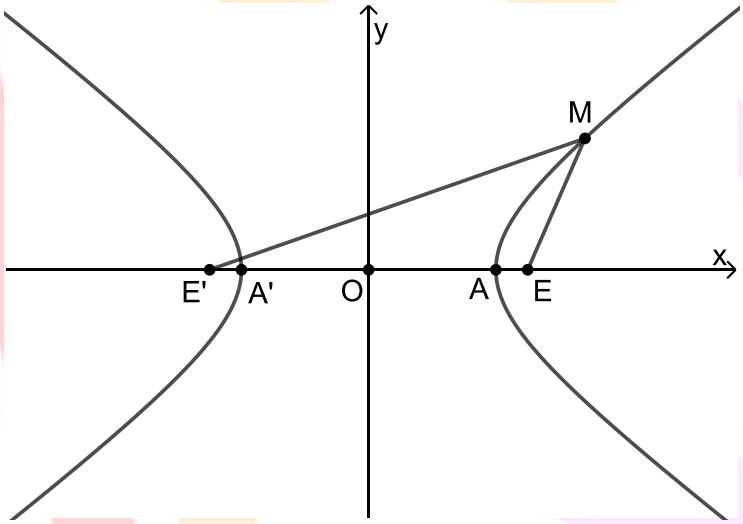
Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10\,,0)$ και $E(10\,,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8\,,0)$ και $A(8\,,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. (Μονάδες 12)

β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME')-(ME)|=16$. (Μονάδες 8)

ii. Αν $(ME)=9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E'. (Μονάδες 5)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η υπερβολή έχει τις εστίες της $E'(-10\,,0)$, $E(10\,,0)$ και τις κορυφές της $A'(-8\,,0)$, $A(8\,,0)$ στον άξονα $x'x$, η εξίσωση της είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Είναι $\gamma=10$ και $\alpha=8$, άρα

$\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$

$\beta^2=10^2-8^2$

$\beta^2=36$

$\beta=6$.

Επομένως η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

β) i) Το Μ είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του Μ από τις εστίες E' και Ε είναι 2α, δηλαδή $|(ME')-(ME)|=2\alpha$.

Επειδή $\alpha=8$, θα είναι $|(ME')-(ME)|=16$.

ii) Δίνεται $(ME)=9$ οπότε έχουμε:

$|(ME')-9|=16$

$(ME')-9=-16$ ή $(ME')-9=16$

$(ME')=-7$ ή $(ME')=25$

και επειδή $(ME')>0$ θα είναι $(ME')=25$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

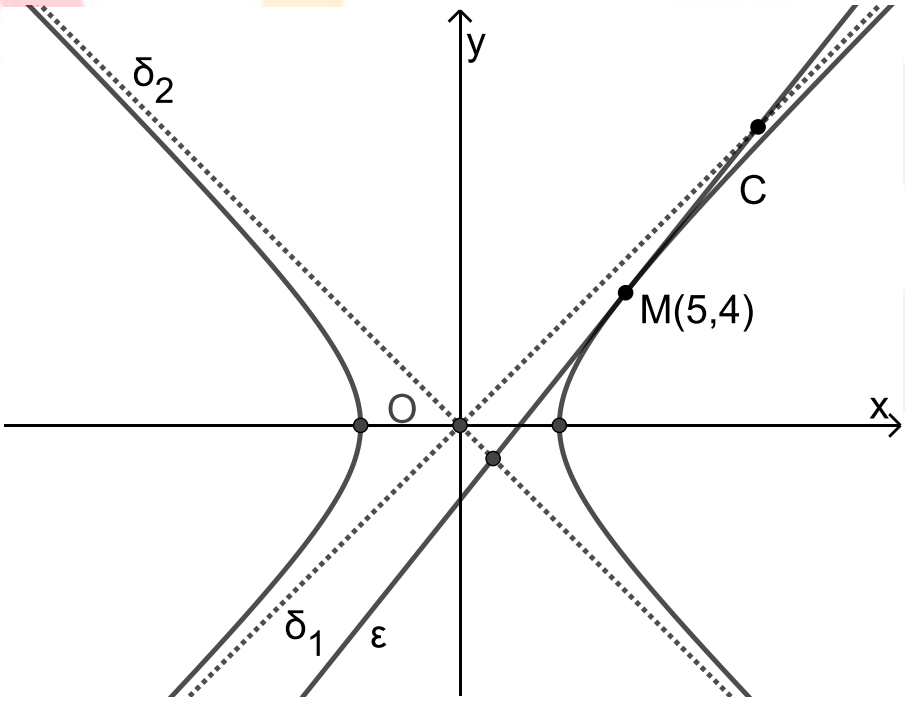
Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5\,,4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$. (Μονάδες 8)

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι ε: $5x - 4y = 9$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2 . (Μονάδες 9)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Επειδή $C: x^2-y^2=9$ είναι $\alpha^2=\beta^2=9$, άρα $\alpha=\beta=3$, οπότε οι ασύμπτωτες της C είναι οι ευθείες $\delta_1: y=\frac{3}{3}x$ ή $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-\frac{3}{3}x$ ή $\delta_2: y=-x$.

ii) Η εφαπτομένη ε της υπερβολής $C: x^2-y^2=9$ στο σημείο της $M(5\,,4)$, έχει εξίσωση $\varepsilon: xx_1-yy_1=9$ ή $\varepsilon: 5x-4y=9$.

β) Τα σημεία τομής της $\varepsilon: 5x-4y=9$ με τις $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-x$, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Επομένως θα έχουμε

$$\begin{cases}5x-4y=9\\ y=x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5x-4x=9\\ y=x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=9\\ y=9\end{cases}$$

και

$$\begin{cases}5x-4y=9\\ y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5x+4x=9\\ y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}9x=9\\ y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}.$$

Επομένως το σημείο τομής των ε και δ_1 έχει συντεταγμένες $(9\,,9)$ και το σημείο τομής των ε και δ_2 έχει συντεταγμένες $(1\,,-1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.

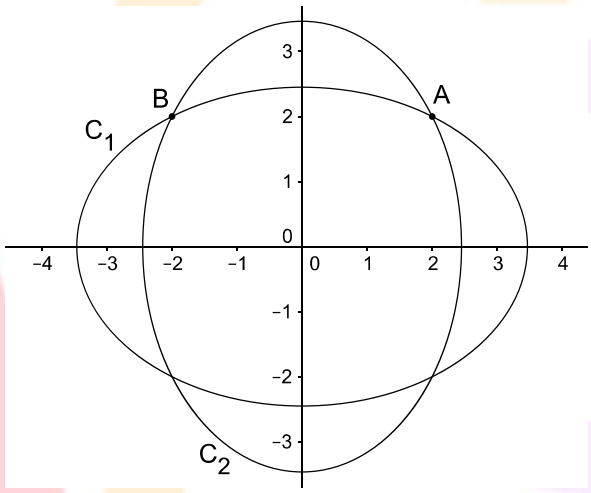
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α και η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β είναι αντίστοιχα

$$x + 2y - 6 = 0 \text{ και } -2x + y - 6 = 0 \ .$$

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 είναι κάθετες. (Μονάδες 5)



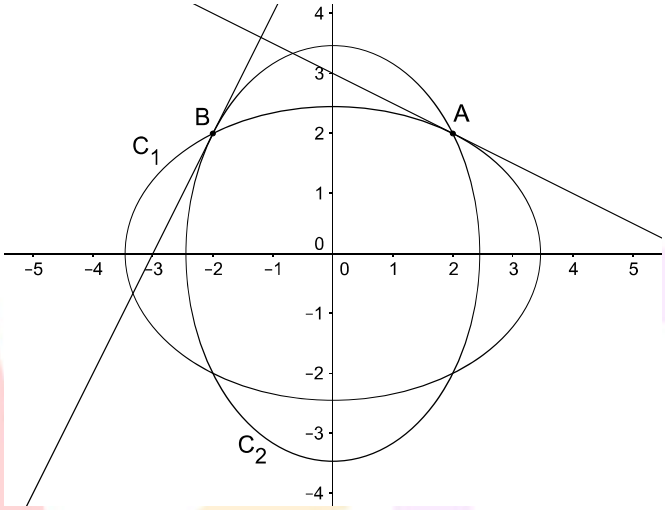
νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ελλείψεων αφού

$$\frac{2^2}{12}+\frac{2^2}{6}=\frac{4}{12}+\frac{4}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \quad \text{και} \quad \frac{2^2}{6}+\frac{2^2}{12}=\frac{4}{6}+\frac{4}{12}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

Το σημείο Β είναι συμμετρικό του σημείο Α ως προς τον άξονα $y'y$, επομένως θα ανήκει στις δύο ελλείψεις, αφού και το σημείο Α ανήκει στις δύο ελλείψεις.



β) Η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α έχει εξίσωση:

$$\frac{2x}{12}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow x+2y=6 \Leftrightarrow x+2y-6=0.$$

Η εφαπτομένη ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β έχει εξίσωση:

$$\frac{-2x}{6}+\frac{2y}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{-2x}{6}+\frac{y}{6}=1 \Leftrightarrow -2x+y=6 \Leftrightarrow -2x+y-6=0.$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_1 είναι $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_2 είναι $\lambda_2=2$.

Οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 είναι κάθετες, γιατί $\lambda_1\lambda_2=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0)

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Α και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$ (Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή γράφεται

$$4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

άρα η υπερβολή είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστίες και κορυφές στον άξονα $x'x$, και έχει $\alpha^2 = 1$ άρα $\alpha = \pm 1$

επομένως οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι τα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0) δηλαδή

$$A(1,0) \text{ και } A'(-1,0)$$

β) Σύμφωνα με τον μνημονικό κανόνα για τον υπολογισμό των ασύμπτωτων τις υπερβολής, παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσής της και εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν. Έχουμε $4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$, άρα οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι:

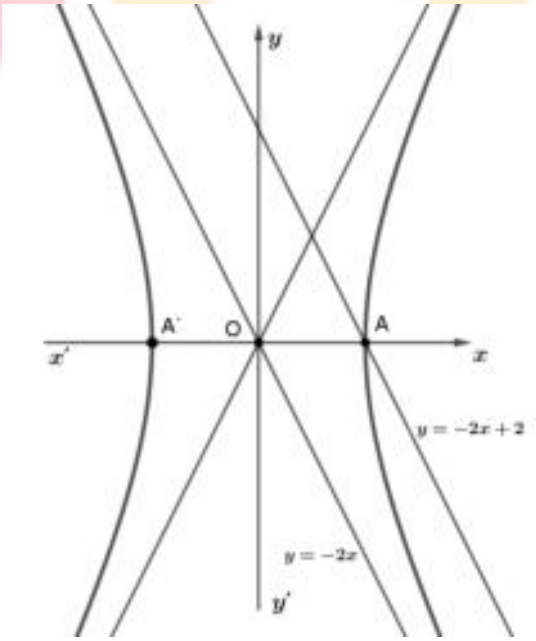
$$2x - y = 0 \quad \text{και} \quad 2x + y = 0$$

δηλαδή

$$y = 2x \quad \text{και} \quad y = -2x$$

γ) Η ευθεία που είναι παράλληλη της ασύμπτωτης $y = -2x$, και διέρχεται από το $A(1,0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = - 2, άρα έχει εξίσωση

$$y - 0 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2$$



ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία $A'(-4\,,0)$ και $A(4\,,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

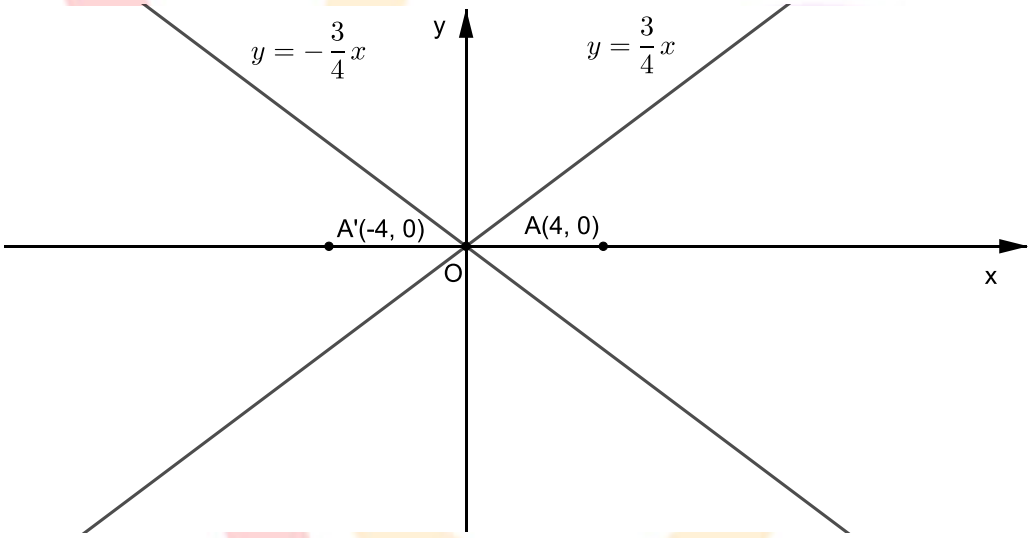
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha = 4$ και $\beta = 3$, (Μονάδες 10)

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5\,,0)$ και $E(5\,,0)$. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C .

(Μονάδες 5)



νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i) Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha\,,0)$ και $A(\alpha\,,0)$. Δίνεται $A'(-4\,,0)$ και $A(4\,,0)$, άρα θα έχουμε $\alpha=4$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Δίνεται ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{3}{4}x$,

άρα θα έχουμε $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{4}$ και επειδή $\alpha=4$, προκύπτει $\beta=3$.

ii) Οι εστίες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι τα σημεία $E'(-\gamma\,,0)$ και $E(\gamma\,,0)$.

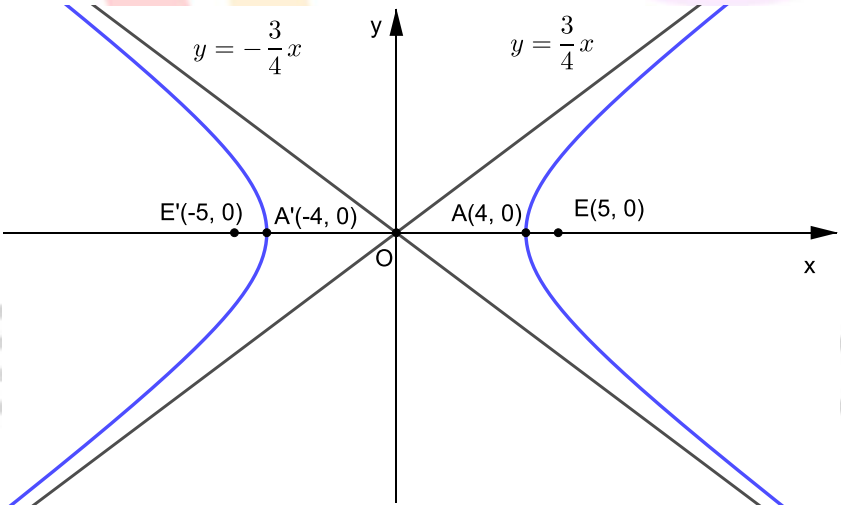
Είναι

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$

$\gamma^2=4^2+3^2$

$\gamma^2=25$

$\gamma=5$.

Επομένως οι εστίες της υπερβολής είναι τα σημεία $E'(-5\,,0)$ και $E(5\,,0)$.

β)