Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 3 Κωνικές Τομές

Θέμα 4

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις εξισώσεις (ε_1): $\mu x - y - \mu = 0$ και

(ε_2): $(\mu + 1)x + (\mu - 1)\, y - \mu + 1 = 0$, $\mu \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξτε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Κάθε μία από τις εξισώσεις (ε_1) και (ε_2) είναι στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$, εξίσωση που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία όταν $|A| + |B| > 0$, δηλαδή όταν οι αριθμοί Α και Β δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν. Παρατηρούμε ότι στην (ε_1) είναι $B = -1 \neq 0$, ενώ στην (ε_2) είναι $A = \mu + 1, B = \mu - 1$ και $A = 0$ για $\mu = -1$, $B = 0$ για $\mu = 1$. Έτσι, δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου μ η οποία να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές Α και Β.

β) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$. Έτσι, θα είναι $\overrightarrow{\delta_1} = (1, \mu)$ παράλληλο στην (ε_1) και $\overrightarrow{\delta_2} = (1 - \mu, 1 + \mu)$ παράλληλο στην (ε_2).

Οπότε η οξεία γωνία θ των (ε_1) και (ε_2) θα είναι ίση ή παραπληρωματική της οξείας γωνίας φ των διανυσμάτων $\overrightarrow{\delta_1}$ και $\overrightarrow{\delta_2}$. Αλλά $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\overrightarrow{\delta_1} \cdot \overrightarrow{\delta_2}}{|\overrightarrow{\delta_1}| \cdot |\overrightarrow{\delta_2}|}$.

Όμως $\overrightarrow{\delta_1} \cdot \overrightarrow{\delta_2} = 1 \cdot (1 - \mu) + \mu \cdot (1 + \mu) = 1 - \mu + \mu + \mu^2 = 1 + \mu^2$.

Επίσης $|\overrightarrow{\delta_2}| = \sqrt{(1 - \mu)^2 + (1 + \mu)^2} = \sqrt{1 - 2\mu + \mu^2 + 1 + 2\mu + \mu^2} = \sqrt{2 + 2\mu^2} = \sqrt{2(1 + \mu^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \mu^2} = \sqrt{2} \cdot |\overrightarrow{\delta_1}|$.

Έτσι, $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1+\mu^2}{|\overrightarrow{\delta_1}| \cdot \sqrt{2} \cdot |\overrightarrow{\delta_1}|} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}|\overrightarrow{\delta_1}|^2} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{2}(1+\mu^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ώστε $\hat{\theta} = 45^o$.

γ) Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2). Ένας τρόπος είναι με την μέθοδο της αντικατάστασης. Από την (ε_1) παίρνουμε $y = \mu x - \mu$ οπότε αντικαθιστώντας στην (ε_2) παίρνουμε

$(\mu + 1)x + (\mu - 1)(\mu x - \mu) - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(\mu + 1)x + \mu(\mu - 1)x - \mu(\mu - 1) - \mu + 1 = 0$, άρα

$(\mu + 1 + \mu^2 - \mu)x - \mu^2 + \mu - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2+1}$.

Τότε $y = \mu\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2+1} - \mu = \frac{\mu^3 - \mu - \mu^3 - \mu}{\mu^2+1} = \frac{-2\mu}{\mu^2+1}$.

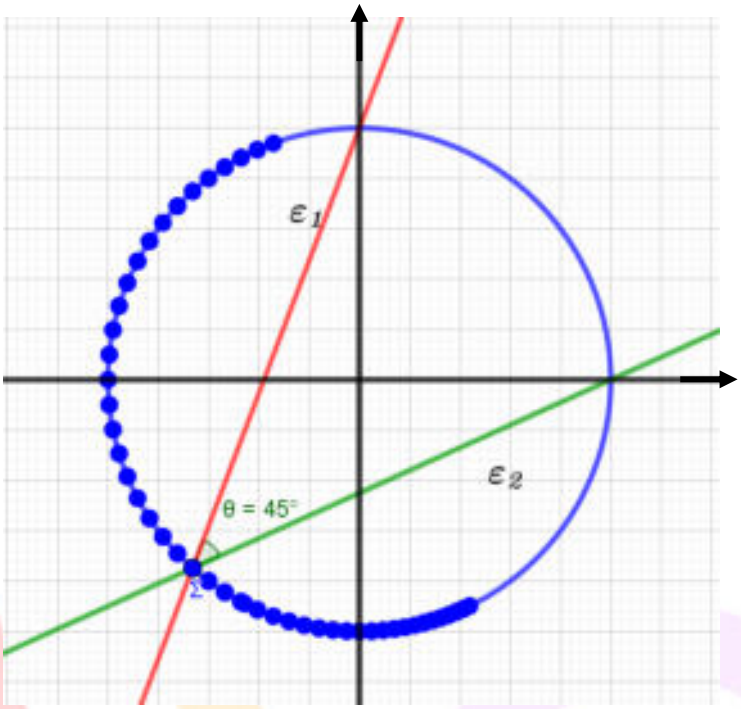
Έτσι τα σημεία τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι τα $\Sigma_\mu\left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2+1}, \frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)$ για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

Ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Σ_μ επαληθεύουν την εξίσωση αυτή.

Πράγματι: $\left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)^2 = \frac{\mu^4 - 2\mu^2 + 1 + 4\mu^2}{(1+\mu^2)^2} = \frac{\mu^4 + 2\mu^2 + 1}{(1+\mu^2)^2} = 1$.

Τα παραπάνω αποτυπώνονται στο παρακάτω σχήμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2,-3)$ και $B(7,9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων Μ που είναι κορυφές των τριγώνων ΑΜΒ ώστε $(AMB) = 12$ τ.μ.

α) Να αποδείξτε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2).

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα ΑΧΒΥ υπάρχουν, αν το Χ πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Υ σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2; Εξηγήστε.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $\frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\right| = 12$, άρα $\left|\begin{vmatrix} x+2 & y+3 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}\right| = 24$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα παίρνουμε $|12(x+2) - 9(y+3)| = 24 \Leftrightarrow 3|4(x+2) - 3(y+3)| = 24$, άρα $|4x+8-3y-9| = 8 \Leftrightarrow |4x-3y-1| = 8$. Τελικά έχουμε:

$4x - 3y - 1 = 8$ ή $4x - 3y - 1 = -8$, δηλαδή $4x - 3y = 9$ ή $4x - 3y = -7$ οι οποίες είναι εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

Οι ευθείες είναι παράλληλες αφού έχουν κοινό συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{4}{3}$.

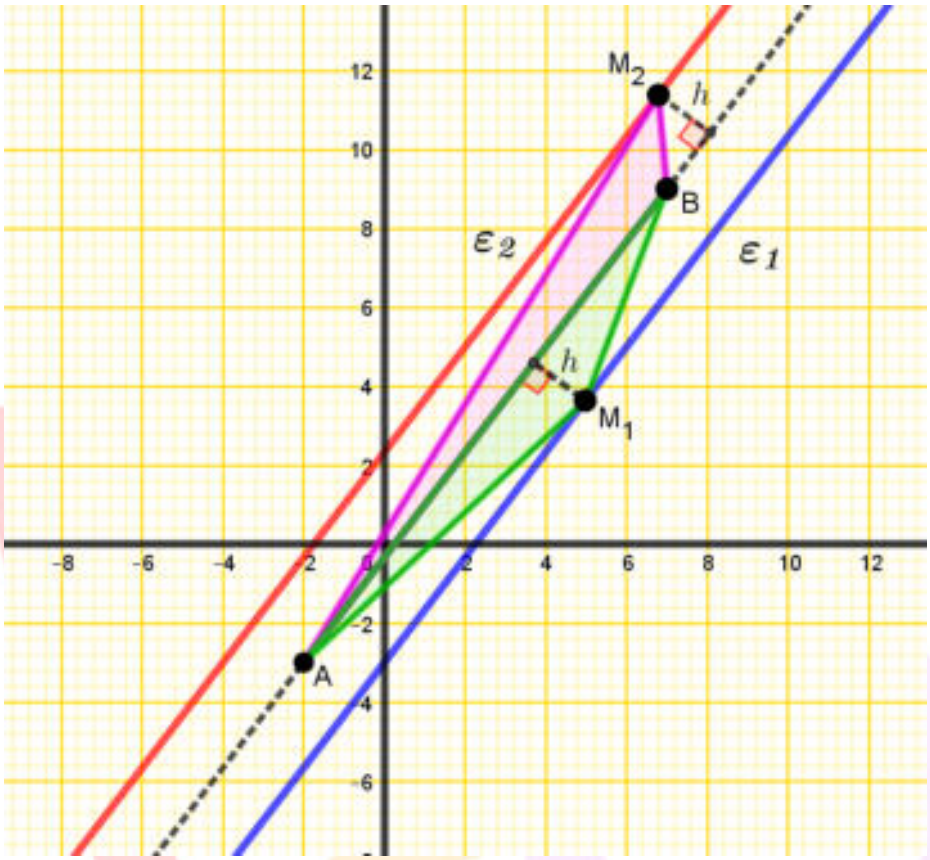
β) Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-(-3)}{7-(-2)} = \frac{4}{3}$, άρα η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στις (ε_1) και (ε_2). Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι ένα οποιοδήποτε σημείο της ΑΒ ισαπέχει από τις (ε_1) και (ε_2). Για ευκολία βρίσκουμε το μέσο του ΑΒ που είναι το σημείο $K\left(\frac{-2+7}{2}, \frac{-3+9}{2}\right)$ δηλαδή το $K\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

Τώρα $d(K,\varepsilon_1) = \frac{\left|4\cdot\frac{5}{2} - 3\cdot 3 - 9\right|}{\sqrt{4^3+(-3)^2}} = \frac{8}{5}$ και $d(K,\varepsilon_2) = \frac{\left|4\cdot\frac{5}{2} - 3\cdot 3 + 7\right|}{\sqrt{4^3+(-3)^2}} = \frac{8}{5}$

γ) Με βάση το παρακάτω σχήμα, διαπιστώνουμε ότι οποιοδήποτε σημείο M_1 της (ε_1) σχηματίζει με το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τρίγωνο σταθερού εμβαδού, αφού το ύψος h του τριγώνου ΑΜΒ που αντιστοιχεί στην ΑΒ είναι σταθερό και ίσο με το μισό της απόστασης των (ε_1) και (ε_2), οπότε $(AM_1B) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot\frac{8}{5} = 12$, αφού

$AB = \sqrt{(7+2)^2+(9+3)^2} = \sqrt{225} = 15$. Ανάλογα, $(AM_2B) = 12$, έτσι $(AM_1BM_2) = 24$. Ώστε $(AXBY) = 24$ για οποιαδήποτε σημεία Χ,Υ των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, αρκεί να σχηματίζεται τετράπλευρο (να μην είναι για παράδειγμα τα σημεία M_1, B, M_2 συνευθειακά). Άρα υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα ΑΧΒΥ με σταθερό εμβαδόν 24.

νέο φροντιστήριο



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος $C:(x-2)^2+(y+3)^2=5$ και η ευθεία $\varepsilon:2x+y+5=0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1),(\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1),(\eta_2)$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β) Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}=\rho$ και αφού $d(K,\varepsilon)>\rho$ ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε), δηλαδή $\lambda_\eta=-2$. Έτσι $(\eta): y=-2x+\beta \Leftrightarrow 2x+y-\beta=0$

Για να εφάπτεται η ευθεία (η) στον κύκλο πρέπει και αρκεί να απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου δηλαδή

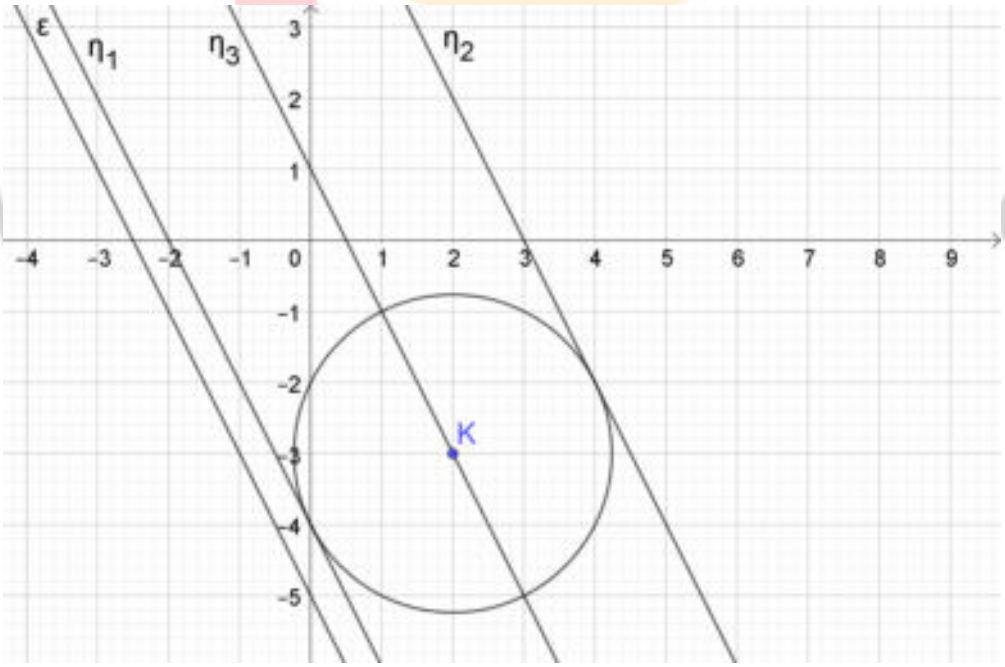
$$d(K,\eta)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 2+1\cdot(-3)-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1-\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-\beta|=5 \Leftrightarrow$$

$$1-\beta=5 \quad ή \quad 1-\beta=-5 \quad \Leftrightarrow \quad \beta=-4 \quad ή \quad \beta=6$$

Συνεπώς έχουμε δύο εφαπτομένες τις $\eta_1: 2x+y+4=0$ και $\eta_2: 2x+y-6=0$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

δ) Είναι $d(K,\eta_1)=d(K,\eta_2)=\rho$ δηλαδή το $K(2,-3)$ ισαπέχει από τις ευθείες $(\eta_1),(\eta_2)$ οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλή τους. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη (η_3) ως παράλληλη στις $(\eta_1),(\eta_2)$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\eta_3}=-2$.

Τελικά η ζητούμενη μεσοπαράλληλη είναι η $(\eta_3): y+3=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+1$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι εξισώσεις

$$C_1:\ x^2+y^2-2x-8=0 \qquad (1)$$

και

$$C_2:\ x^2+y^2-6x+8=0 \qquad (2).$$

α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $\mathrm{K}(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1=3$, $\rho_2=1$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου $(\mathrm{K}\Lambda)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}$, αν και μόνο αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$.

Για την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=4-4(-8)=36>0,$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(1,0)$ και ακτίνα $\rho_1=3$.

Όμοια για την (2) έχουμε:

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=36-4\cdot 8=4>0,$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $\Lambda(3,0)$ και ακτίνα $\rho_2=1$.

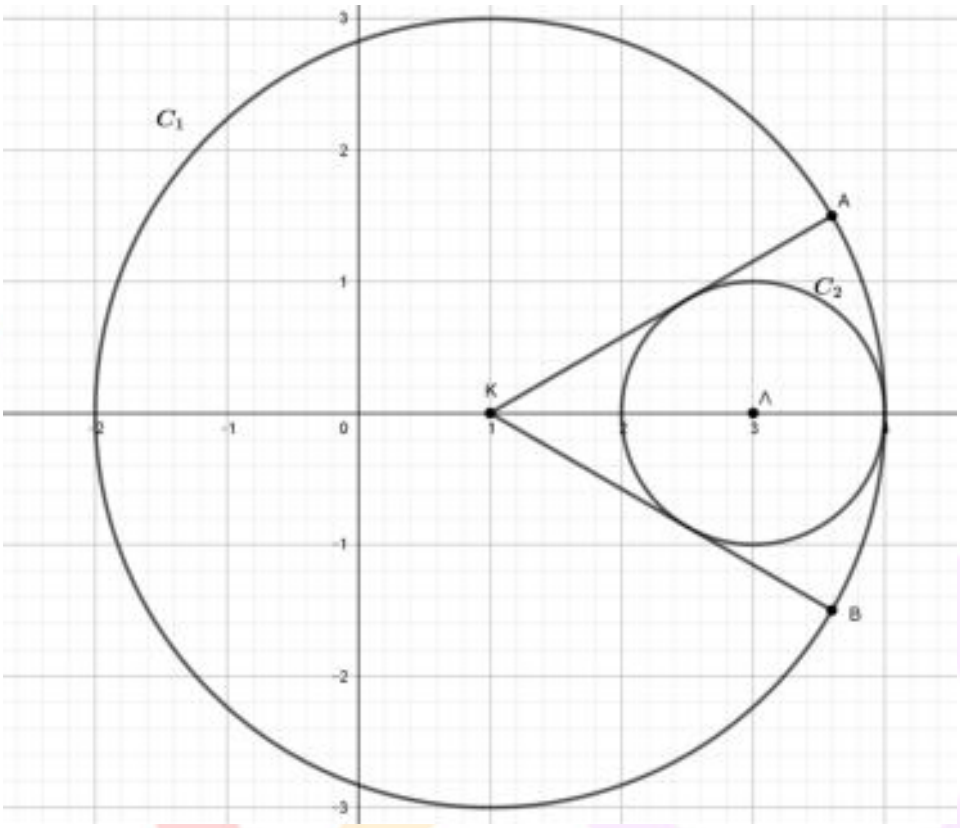
β)

i. Έχουμε $(\mathrm{K}\Lambda)=\sqrt{(3-1)^2+0^2}=2$.

ii. Δύο κύκλοι με κέντρα K, Λ και ακτίνες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα εφάπτονται εσωτερικά αν και μόνο αν $(\mathrm{K}\Lambda)=|\rho_1-\rho_2|=\rho_1-\rho_2$, όπως γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Είναι $\rho_1-\rho_2=3-1=2$, από β)i. έχουμε $(\mathrm{K}\Lambda)=2=\rho_1-\rho_2$, δηλαδή ικανοποιείται η προϋπόθεση οπότε ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1.

γ) Κάθε ακτίνα του κύκλου C_1, KA και KB σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, που δεν είναι κάθετη στον $x'x$ άξονα, είναι πάνω σε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{K}(1,0)$ και έχει κλίση $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα θα έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon):\ y-0=\lambda(x-1)\Leftrightarrow y-\lambda x+\lambda=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$



Η (ε) θα εφάπτεται στον C_2 αν και μόνο αν $d(\Lambda,\varepsilon)=\rho_2$. Έχουμε:

$$d(\Lambda,\varepsilon)=\rho_2 \Leftrightarrow \frac{|0-3\lambda+\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=1 \Leftrightarrow |2\lambda|=\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow 3\lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Τελικά οι ζητούμενες ακτίνες KA και KB έχουν εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1):\ 3y-\sqrt{3}x+\sqrt{3}=0 \text{ και}$$

$$(\varepsilon_2):\ 3y+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0 \text{ αντίστοιχα.}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \text{ και}$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $\mathrm{K}\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2.

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή $K\left(-\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνα : $\rho_1=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=1$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή $\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνα : $\rho_2=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=3$.

β)

i. Μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και δεν είναι κάθετη στον $x'x$ άξονα έχει εξίσωση:

$$(\eta):\ y=\lambda x \Leftrightarrow y-\lambda x=0\,.$$

Η ευθεία (η) εφάπτεται και στους δύο κύκλους αν και μόνο αν οι αποστάσεις των κέντρων K και Λ από την ευθεία αυτή είναι ίσες με τις αντίστοιχες ακτίνες των κύκλων. Δηλαδή έχουμε:

$$d(K,\eta)=1 \qquad (1) \qquad \text{και}$$

$$d(\Lambda,\eta)=3 \qquad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

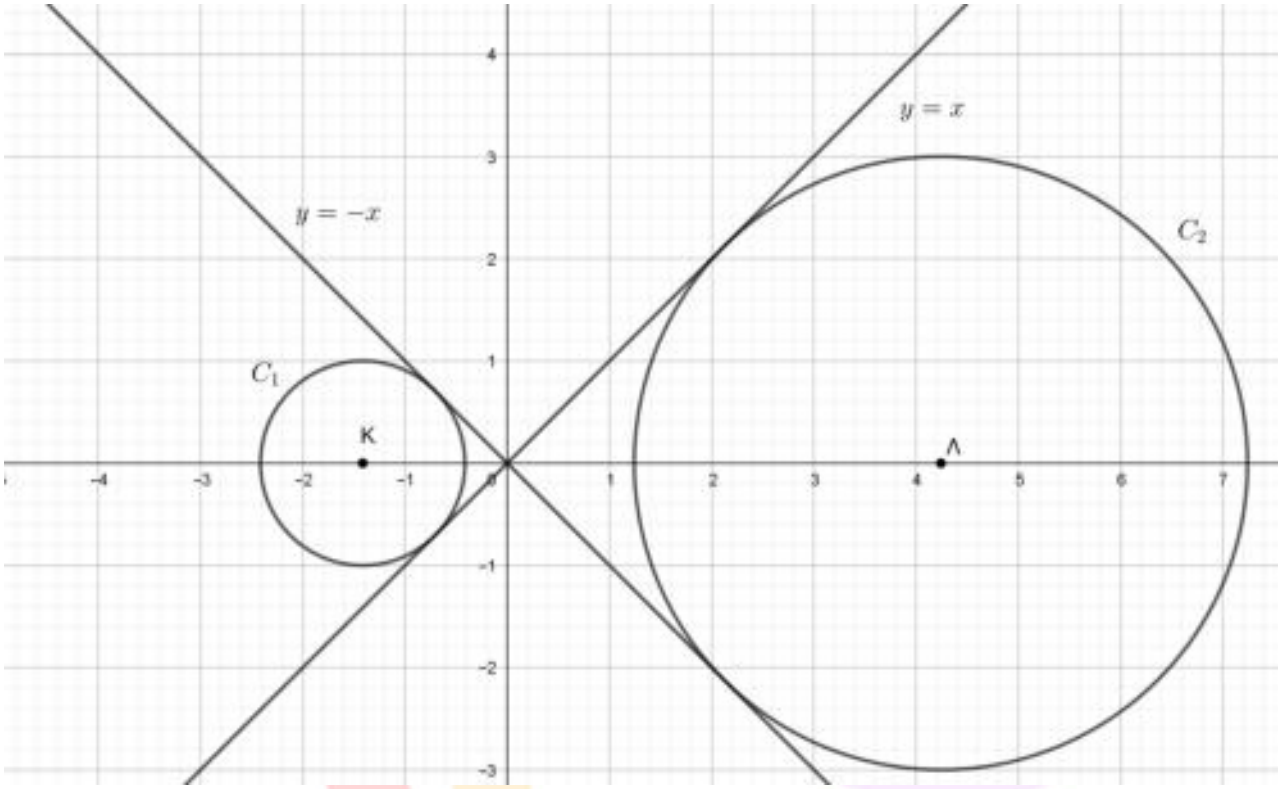
$$\begin{cases}\dfrac{\left|0+\sqrt{2}\lambda\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=1\\[2ex] \dfrac{\left|0-3\sqrt{2}\lambda\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\sqrt{2}\lambda\right|=\sqrt{1+\lambda^2}\\ \left|3\sqrt{2}\lambda\right|=3\sqrt{1+\lambda^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda^2=1+\lambda^2\\ 18\lambda^2=9+9\lambda^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\pm1\\ \lambda=\pm1\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\pm1\,.$$

Άρα, από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων, με εξισώσεις:

$$(\eta_1):y=-x \text{ και } (\eta_2):y=x\,.$$

ii. Η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι εσωτερικό σημείο της διακέντρου $K\Lambda$, διότι η $K\Lambda$ είναι πάνω στον άξονα $x'x$ και έχει άκρα τα σημεία $K\left(-\sqrt{2},0\right)$ και $\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$. Επομένως οι

εφαπτόμενες που βρήκαμε στο βi) ερώτημα είναι εσωτερικές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=-1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Μ.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση γράφεται

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4$$

οπότε παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $\rho=2$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(KM)>\rho$. Πραγματικά, είναι:

$$(KM)=\sqrt{(3-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}>2$$

οπότε το Μ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το Μ είναι:

- Η κατακόρυφη ευθεία $x=3$. Η ευθεία αυτή απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση $d=\frac{|1-3|}{\sqrt{1+0}}=2=\rho$. Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x=3$ εφάπτεται στον κύκλο.
- Όλες οι μη κατακόρυφες ευθείες που είναι της μορφής $y-2=\lambda(x-3)$ δηλαδή $\lambda x-y-3\lambda+2=0$. Μια τέτοια ευθεία εφάπτεται στον κύκλο, μόνο όταν η απόσταση d του κέντρου Κ από αυτή είναι ίση με την ακτίνα ρ. Είναι:

  $$d=2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda+2-3\lambda+2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4=\lambda^2+1 \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{4}$$

  Επομένως η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το Μ είναι η:

  $y-2=\frac{3}{4}(x-3)$ που γράφεται $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι κοινές εφαπτόμενες των δυο κύκλων είναι οι ευθείες με εξισώσεις $x=3$ και $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία Ε και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M(1,2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β. Από το σημείο Μ φέρνουμε ημιευθεία Mt παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Η.

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Η, Ε.

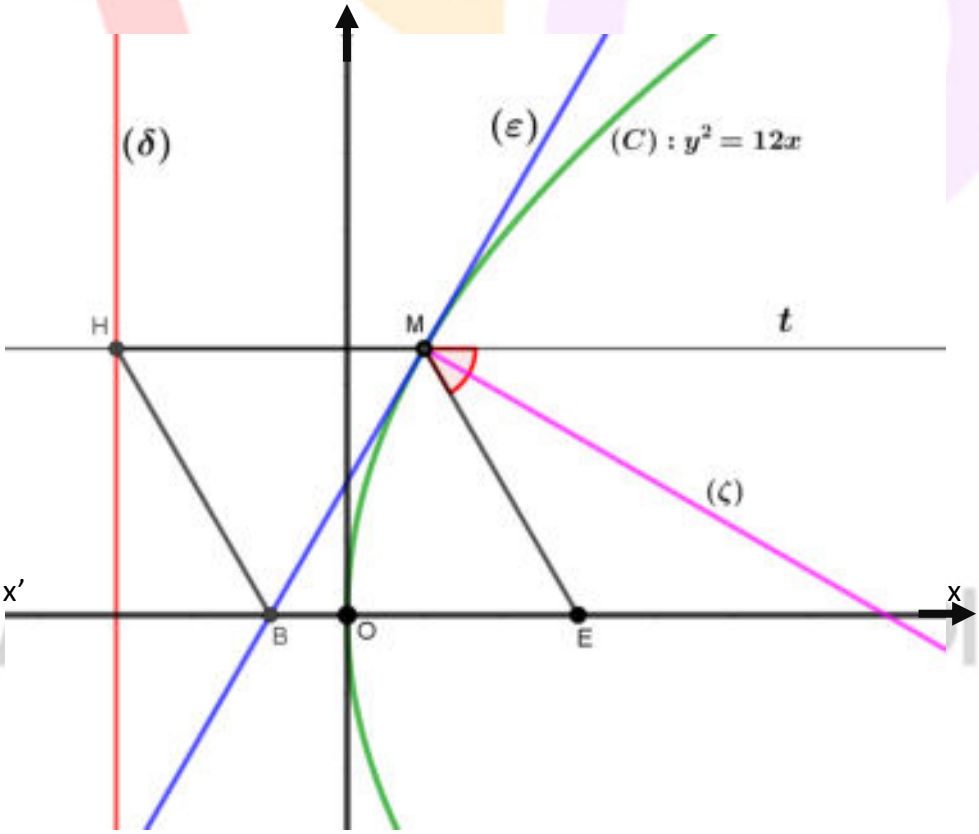
(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΕΒΗ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $E\hat{M}t$.

(Μονάδες 6)



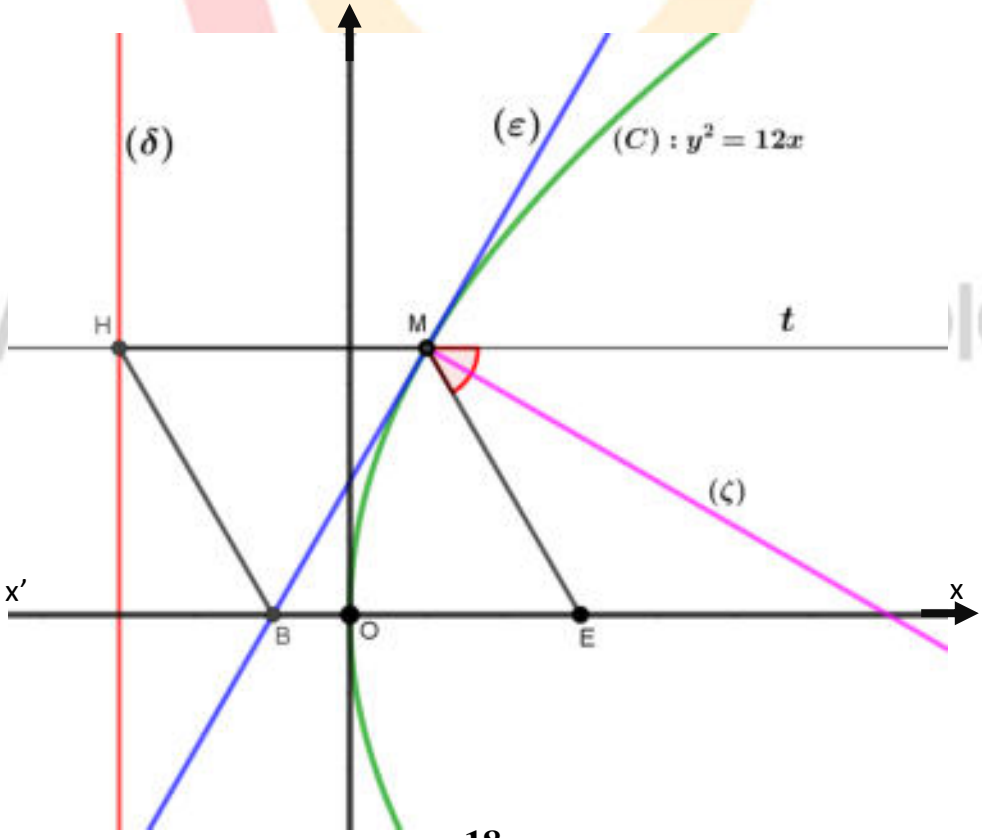
ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $y_1 y = p(x + x_1)$. Αλλά $2p = 12$, άρα $p = 6$. Ώστε (ε): $2\sqrt{3} \cdot y = 6(x + 1)$. Έτσι $y = \frac{3}{\sqrt{3}}(x + 1)$ άρα $y = \sqrt{3}(x + 1)$, τελικά $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

β) Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$, άρα είναι (δ): $x = -3$ έτσι είναι $H(-3, 2\sqrt{3})$ και η εστία Ε έχει συντεταγμένες $E(\frac{p}{2}, 0)$, άρα $E(3,0)$. Επίσης για $y = 0$ από την εξίσωση της (ε) παίρνουμε $0 = \sqrt{3}(x + 1)$, άρα $x = -1$. Ώστε $B(-1,0)$.

γ) Βρίσκουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΜΕ και ΒΗ. Είναι $\lambda_{ME} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{1 - 3} = -\sqrt{3}$ και $\lambda_{HB} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{-3 - (-1)} = -\sqrt{3}$. Ώστε ME παράλληλη στην HB. Άρα το ΜΕΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά από τον ορισμό της παραβολής είναι $MH = ME$. Παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι ρόμβος.

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, γνωρίζουμε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) στο σημείο επαφής Μ, διχοτομεί την γωνία $E\widehat{M}t$ όπου Ε η εστία της παραβολής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) στο Μ. Αλλά $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1$, έτσι $\lambda_\zeta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ώστε (ζ): $y - 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$, άρα είναι (ζ): $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ και τελικά (ζ): $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{3}$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\kappa x - 2\kappa y + 4 = 0$ (1) με $\kappa \epsilon \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \epsilon \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

(Μονάδες 7)

δ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2,2)$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, για να παριστάνει κύκλο μόνο όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, όπου $A = -4\kappa, B = -2\kappa$ και $\Gamma = 4$.

Άρα $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16\kappa^2 + 4\kappa^2 - 16 = 20\kappa^2 - 16$ και

$$20\kappa^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \kappa^2 > \frac{4}{5} \Leftrightarrow |\kappa| > \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \kappa < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ή } \kappa > \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

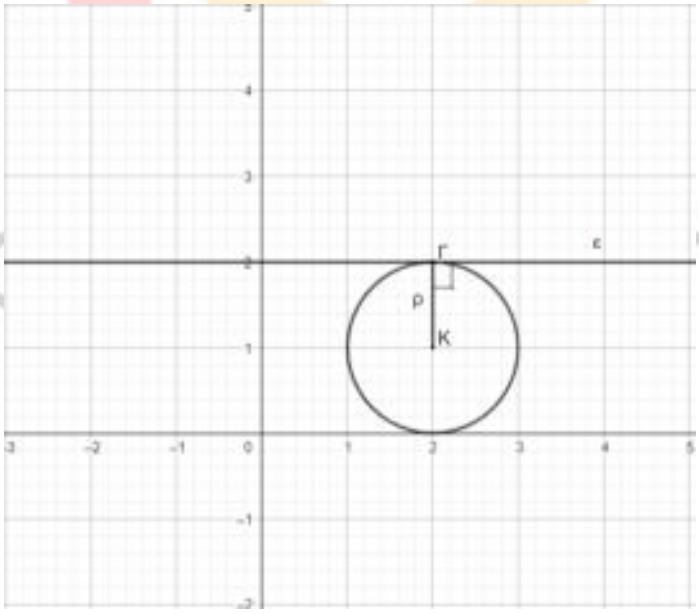
β) Η εξίσωση (1) είναι μία παραμετρική εξίσωση με παράμετρο κ και $\kappa \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$.

Για κάθε $\kappa \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$ έχουμε έναν κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή με $K(2\kappa, \kappa)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{20\kappa^2-16}}{2}$.

γ) Τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) παραμετρική εξίσωση, από το ερώτημα β) έχουν συντεταγμένες $(2\kappa, \kappa)$, δηλαδή $x = 2\kappa$ και $y = \kappa$.

Άρα $x = 2y \Leftrightarrow x - 2y = 0$ (2), δηλαδή τα κέντρα ανήκουν στην εξίσωση ευθείας (2).

δ) Για $\kappa = 1$ η εξίσωση (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, με κέντρο $K(2,1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.



Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε τον παραπάνω κύκλο.

Η ευθεία που είναι εφαπτομένη στον κύκλο στο σημείο Γ είναι η ευθεία που είναι κάθετη στο τμήμα $\text{ΚΓ} = \rho$ και παράλληλη στον άξονα x΄x, γιατί Κ και Γ έχουν την ίδια τετμημένη. Άρα έχει εξίσωση $y = 2$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4 - 2k)x - 2(1 + k)y + 5 - 2k = 0$ $(\boldsymbol{I})$, όπου $k \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η $(\boldsymbol{I})$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k - 2, k + 1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η $(\boldsymbol{I})$ είναι στη μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με

$A^2+B^2-4\Gamma=(4-2k)^2+[-2(1+k)]^2-4\cdot(5-2k)=$

$16-16k+4k^2+4+8k+4k^2-20+8k=8k^2.$

Αφού $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η $(\boldsymbol{I})$ παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{8k^2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}k}{2}=k\sqrt{2}$ και κέντρο $M\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=M\left(-\frac{4-2\kappa}{2},-\frac{-2(1+k)}{2}\right)=M(k-2,k+1)$. Καθώς η παράμετρος k παίρνει άπειρες τιμές, έχουμε άπειρους κύκλους.

β) Ας είναι x η τετμημένη των σημείων M και y η τεταγμένη των σημείων M. Τότε:

$x=k-2$, $y=k+1$. Ώστε $y=(x+2)+1$, άρα $y=x+3$, η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία ανήκουν τα σημεία M.

γ) Προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση των κέντρων Μ από την σταθερή ευθεία $(\varepsilon): x+y+1=0$ ισούται με την ακτίνα. Πράγματι:

$d(M,\varepsilon)=\frac{|1(k-2)+1(k+1)+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|2k|}{\sqrt{2}}=k\sqrt{2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2+(y-1)^2=9$ και $C_2: (x-4)^2+(y-4)^2=9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα K,Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ του συστήματος συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής B,Γ των κύκλων C_1 και C_2.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y=x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα B,Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}\tau.\mu.$

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{K}(1,1)$ και ακτίνα $\rho=3$ ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(4,4)$ και ακτίνα $\rho=3$.

Έχουμε $\lambda_{\mathrm{K}\Lambda}=\dfrac{4-1}{4-1}=1$, άρα η $\mathrm{K}\Lambda$ βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $y-1=1(x-1)\Leftrightarrow y=x$, δηλαδή η διάκεντρος βρίσκεται στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{\mathrm{O}}y$.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε $(x-1)^2+(y-1)^2-(x-4)^2-(y-4)^2=0\Leftrightarrow(x-1)^2-(x-4)^2=(y-4)^2-(y-1)^2\Leftrightarrow$ $3(2x-5)=-3(2y-5)\Leftrightarrow 2x-5=5-2y\Leftrightarrow y=5-x$.

Αντικαθιστώντας την τιμή του y στην $(x-1)^2+(y-1)^2=9$, βρίσκουμε $(x-1)^2+(4-x)^2=9\Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x_1=1, x_2=4$ με τις αντίστοιχες τιμές $y_1=4, y_2=1$.Τελικά τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 είναι $\mathrm{B}(1,4)$ και $\Gamma(4,1)$.

γ) Το σημείο $\mathrm{A}(x,y)$ ανήκει στην ευθεία που ανήκουν τα σημεία Κ και Λ με εξίσωση, όπως βρήκαμε στο α) ερώτημα, $y=x$ αν αι μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση. Οπότε έχουμε $\mathrm{A}(x,x)$.

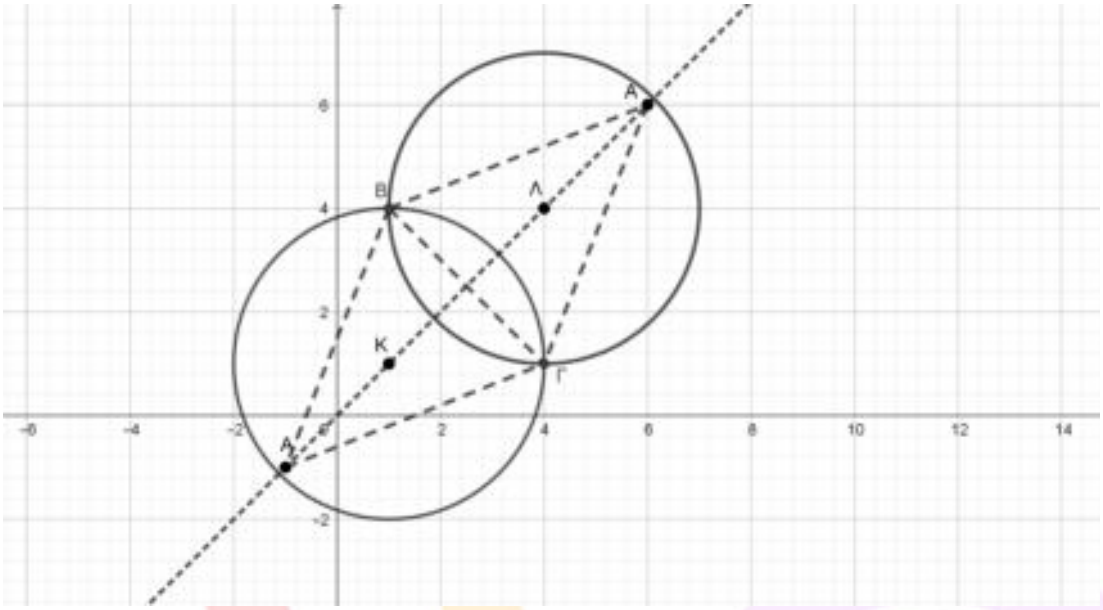
Είναι $\overline{\mathrm{AB}}=(1-x,4-x)$ και $\overline{\mathrm{A\Gamma}}=(4-x,1-x)$.

Ακόμα $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1-x & 4-x\\ 4-x & 1-x\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left|(1-x)^2-(4-x)^2\right|=\dfrac{1}{2}|6x-15|$.

Οπότε $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{21}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}|6x-15|=\dfrac{21}{2}\Leftrightarrow|6x-15|=21\Leftrightarrow\begin{cases}6x-15=21\\6x-15=-21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\x=-1\end{cases}$.

Τελικά βρήκαμε δύο σημεία της ευθείας $y=x$, τα $\mathrm{A}(6,6)$ και $\mathrm{A}'(-1,-1)$, που σχηματίζουν με τα σημεία τομής B και Γ τρίγωνο εμβαδού $\dfrac{21}{2}\tau.\mu.$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε την έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ και εστίες τα σημεία E' και E, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A', A, B', B, E', E.

(Μονάδες 8)

β) Σε τυχαίο σημείο $M(x_1, y_1)$ της έλλειψης, με $x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0$, φέρνουμε την εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) και την διχοτόμο (δ) της γωνίας $E'\widehat{M}E$. Από την εστία E φέρνουμε κάθετη στην ευθεία (ε), η οποία τέμνει την προέκταση της ME' στο σημείο P.

i. Να αποδείξετε ότι κλίση των ευθειών (ε) και (δ) είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{9x_1}{25y_1}$ και $\lambda_\delta = \frac{25y_1}{9x_1}$.

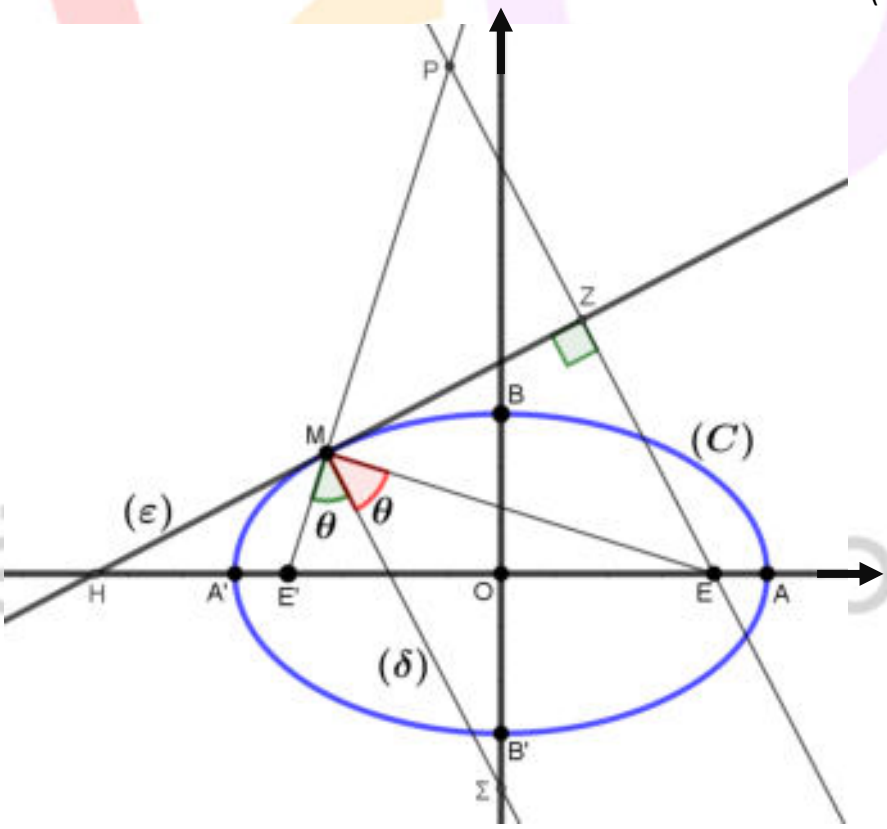
(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MEP είναι ισοσκελές με $ME = MP$.

(Μονάδες 5)

iii. Να υπολογίσετε το μήκος $E'P$.

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι είναι $\alpha^2 = 25$, άρα $\alpha = 5$ και $\beta^2 = 9$ άρα $\beta = 3$.

Έτσι, έχουμε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 16$, άρα $\gamma = 4$.

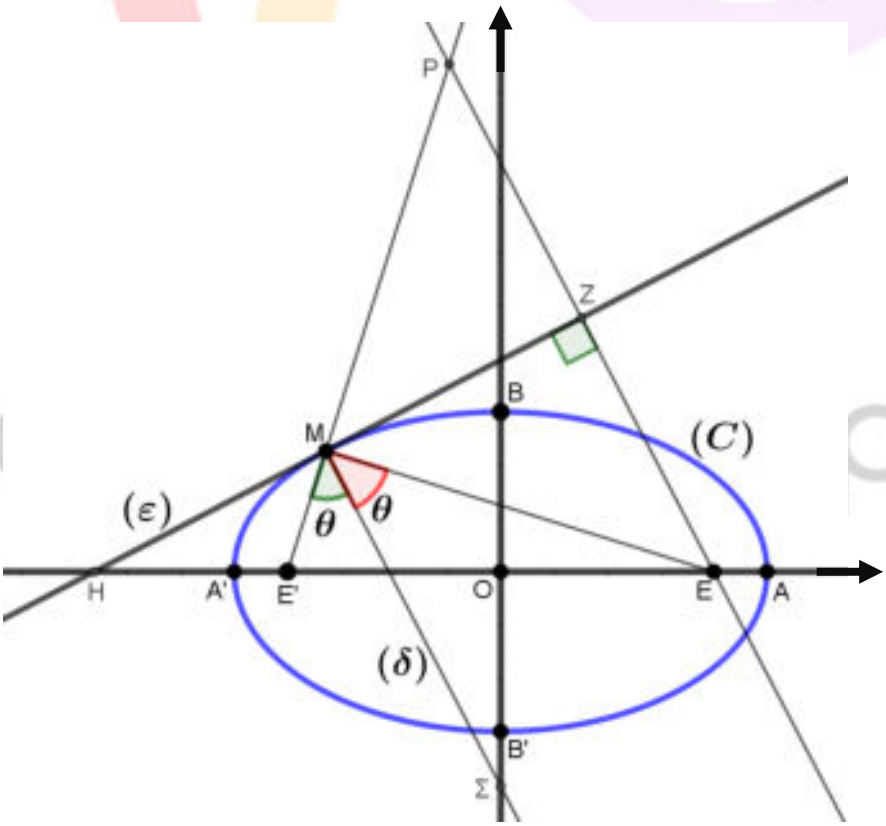
Ώστε $E'(-4,0), E(4,0), A'(-5,0), A(5,0), B'(0,-3), B(0,3)$.

β)

i. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της (ε) είναι $\frac{x_1}{25}x + \frac{y_1}{9}y = 1$, οπότε η κλίση της είναι $-\frac{x_1/25}{y_1/9} = -\frac{9x_1}{25y_1}$. Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης, η κάθετη στην (ε) στο Μ διχοτομεί την γωνία $E'\widehat{M}E$. Ώστε η (δ) είναι κάθετη στην (ε). Άρα το γινόμενο των κλίσεων τους ισούται με -1. Έτσι, η κλίση της ευθείας (δ) θα είναι $\frac{25y_1}{9x_1}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι η ευθεία (δ) είναι παράλληλη προς την ΕΡ. Έτσι θα είναι $M\hat{E}P = E\widehat{M}\Sigma = \hat{\theta}$ ως εντός εναλλάξ και $M\hat{P}E = E'\widehat{M}\Sigma = \hat{\theta}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά. Άρα $M\hat{E}P = M\hat{P}E$, οπότε $ME = MP$.

iii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $ME = MP$. Από το σχήμα όμως προκύπτει ότι $E'P = ME' + MP = ME' + ME = 2\alpha = 10$, αφού από τον ορισμό της έλλειψης κάθε σημείο της έλλειψης έχει σταθερό άθροισμα αποστάσεων από τις εστίες, ίσο με 2α.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(5,5).

α) Αν για το σημείο Μ(x,ψ) ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6\psi - 6x + 10 = 0$ (1)

(Μονάδες 08)

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 03)

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,3) και η ακτίνα του ρ = $2\sqrt{2}$:

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): λχ + ψ = 2 εφάπτεται του κύκλου (1). (Μονάδες 07)

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την ΑΒ γωνία 45°;

(Μονάδες 07)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. $\overrightarrow{AM}=(x-1,\psi-1)$
$\overrightarrow{BM}=(x-5,\psi-5)$.

$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=32\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(\psi-1)^2}^2+\sqrt{(x-5)^2+(\psi-5)^2}^2=32$

$x^2-2x+1+\psi^2-2\psi+1+x^2-10x+25+\psi^2-10\psi+25=32$

$2x^2+2\psi^2-12x-12\psi+20=0$ διαιρούμε με 2 και έχουμε

$x^2+\psi^2-6x-6\psi+10=0$ (1)

ii. Για να παριστάνει η εξίσωση $x^2+\psi^2+Ax+B\psi+\Gamma=0$ κύκλο θα πρέπει $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

Από την (1) έχουμε A = - 6, B = - 6, Γ = 10.

$A^2+B^2-4\Gamma=6^2+6^2-4\cdot10=32>0$. Επομένως πρόκειται περί κύκλου.

β)

i. Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία , πρέπει η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία να ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

d(K,ε) = ρ δηλαδή $\frac{|3\lambda+3-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\sqrt{2}\Rightarrow|3\lambda+1|=2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Rightarrow(3\lambda+1)^2=8(\lambda^2+1)$.

$9\lambda^2+6\lambda+1=8\lambda^2+8\Rightarrow\lambda^2+6\lambda-7=0$.

Υπολογίζουμε τις ρίζες και έχουμε λ = -7 και λ = 1.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\frac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}=\frac{5-1}{5-1}=1$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ΑΒ είναι το $\vec{\delta}_1=(1,1)$ ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}_2=(1,-\lambda)$. Η γωνία των δύο ευθειών είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων που είναι παράλληλα σε αυτές.

$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2}\right)=\sigma\upsilon\nu45^o$ ή $\frac{\vec{\delta}_1\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\frac{(1,1)(1,-\lambda)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\frac{1-\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$2(1-\lambda)=\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2}$ ή $2(1-\lambda)=2\sqrt{1+\lambda^2}$ ή $1-\lambda=\sqrt{1+\lambda^2}$ ή $(1-\lambda)^2=\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2$

$1-2\lambda+\lambda^2=1+\lambda^2$ ή λ =0.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο *ΑΒΓ* και σημείο του επιπέδου *Μ*, τέτοιο ώστε:

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία *Β, Γ, Μ* είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το *Μ* είναι το μέσο του $B\Gamma$.

(Μονάδες 2)

γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa$ και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa\,\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο *ΑΒΓ* είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\mu \in R$ έτσι ώστε $\overrightarrow{B\Gamma} = \mu\,\overrightarrow{BM}$.

Πράγματι, θεωρώντας το *Β* ως σημείο αναφοράς, είναι:

$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA}) = \vec{0} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM}$

β) Το *Μ* είναι το μέσο του τμήματος *ΒΓ*, διότι

$\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{BM}$

γ) i. Επειδή τα σημεία *Α, Β, Γ* ως κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, έπεται ότι τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

Είναι $\kappa\,\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$.

Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\kappa\,\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \frac{\lambda}{\kappa}\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB}$.

Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\kappa\,\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\,\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{\kappa}{\lambda}\,\overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB}$.

Επομένως πρέπει $\kappa = \lambda = 0$.

ii) Τότε είναι: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0 \end{cases}$

Αφού $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$ έπεται ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα. Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με $\hat{A} = 90°$.

Αφού $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$ έπεται ότι η διάμεσος *ΑΜ* του ορθογώνιου τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά *ΒΓ*, δηλαδή είναι και ύψος.

Ως εκ τούτου το τρίγωνο είναι και ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=8 \text{ και } C_2:(x-7)^2+(y+2)^2=18.$$

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου $\text{Κ},\Lambda$ τα κέντρα των κύκλων C_1,C_2 αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{K}(2,3)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2\sqrt{2}$, ενώ ο κύκλος C_2 κέντρο $\Lambda(7,-2)$ και ακτίνα $\rho_2 = 3\sqrt{2}$. Οπότε έχουμε $(\mathrm{K}\Lambda) = \sqrt{(7-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$. Ακόμα $\rho_1 + \rho_2 = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, δηλαδή $(\mathrm{K}\Lambda) = \rho_1 + \rho_2$.

Αφού η διάκεντρος των δύο κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β)

i. Έχουμε $\lambda_{\mathrm{K}\Lambda} = \dfrac{-2-3}{7-2} = -1$, οπότε $\mathrm{K}\Lambda : y-3 = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x+5$.

ii. Θα βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$ με τον κύκλο C_1.

Έχουμε:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (-x+2)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 4 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \pm 2 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4 \text{ ή } x = 0 \\ y = 1 \text{ ή } y = 5. \end{cases}$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$ με τον κύκλο C_1 είναι τα $\mathrm{A}(4,1)$ και $\mathrm{A}'(0,5)$.

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2 + (-x+7)^2 = 18 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2 = 9 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = \pm 3 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4 \text{ ή } x = 10 \\ y = 1 \text{ ή } y = -5. \end{cases}$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας $\mathrm{K}\Lambda$ με τον κύκλο C_2 είναι τα $\mathrm{A}(4,1)$ και $\mathrm{A}''(10,-5)$. Η κοινή λύση των δύο συστημάτων είναι το ζητούμενο σημείο επαφής των δύο κύκλων. Άρα το κοινό σημείο της ευθείας και με τους δύο κύκλους είναι το $\mathrm{A}(4,1)$, οπότε είναι το σημείο επαφής.

Εναλλακτική λύση:

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 λύνοντας το σύστημα $\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases}$ και βρίσκουμε, όπως και στον προηγούμενο τρόπο λύσης, τα σημεία $\text{A}(4,1)$ και $\text{A}'(0,5)$.

Έχουμε $\overrightarrow{\text{ΚΛ}}=(7-2,-2-3)=(5,-5)$ και $\overrightarrow{\text{ΚΑ}}=(4-2,1-3)=(2,-2)$, δηλαδή

$$\overrightarrow{\text{ΚΑ}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\text{ΚΛ}},$$

οπότε το A, ως εσωτερικό σημείο του $\overrightarrow{\text{ΚΛ}}$, είναι το μοναδικό ζητούμενο σημείο επαφής.

γ) Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη (η) των δύο κύκλων είναι κάθετη στην ευθεία ΚΛ και διέρχεται από το σημείο επαφής $\text{A}(4,1)$.

Στο ερώτημα β)i έχουμε βρει ότι $\lambda_{\text{ΚΛ}}=-1$, οπότε $\lambda_\eta\cdot\lambda_{\text{ΚΛ}}=-1\Leftrightarrow\lambda_\eta\cdot(-1)=-1\Leftrightarrow\lambda_\eta=1$, και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δυο κύκλων έχει εξίσωση:

$$(\eta): y-1=1(x-4)\Leftrightarrow y=x-3.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση

$$c_1:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2.$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{NB}^2=4$, ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-x-2$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2+2y^2+10x+14y+21=0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R=2\sqrt{2}$.

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε σημείο $N(x,y)$ του επιπέδου.

Τότε είναι $\overrightarrow{NA}=(1-x,-y)$, $\overrightarrow{NB}=(-x,-1-y)$, οπότε ισχύει:

$\overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{NB}^2=4 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{NA}\right|^2-\left|\overrightarrow{NB}\right|^2=4 \Leftrightarrow (1-x)^2+y^2-x^2-(1+y)^2=4 \Leftrightarrow$

$x+y+2=0.$

Άρα τα ζητούμενα σημεία N ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση (ε): $y=-x-2$.

β) Έστω σημείο $P(x,y)$ του επιπέδου. Τότε, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, ισχύει:

$$2x^2+2y^2+10x+14y+21=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+5x+7y+\frac{21}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2+y^2+2y\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2=-\frac{21}{2}+\frac{25}{4}+\frac{49}{4} \Leftrightarrow$$

$$c_2:\ \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=8$$

Άρα τα σημεία P ανήκουν σε κύκλο c_2, με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $R=2\sqrt{2}$.

$2^{ος}$ τρόπος:

$$2x^2+2y^2+10x+14y+21=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+5x+7y+\frac{21}{2}=0$$

Είναι: $5^2+7^2-4\cdot\frac{21}{2}=32>0$, επομένως η εξίσωση παραστάνει κύκλο, με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{32}}{2}=2\sqrt{2}$.

γ)

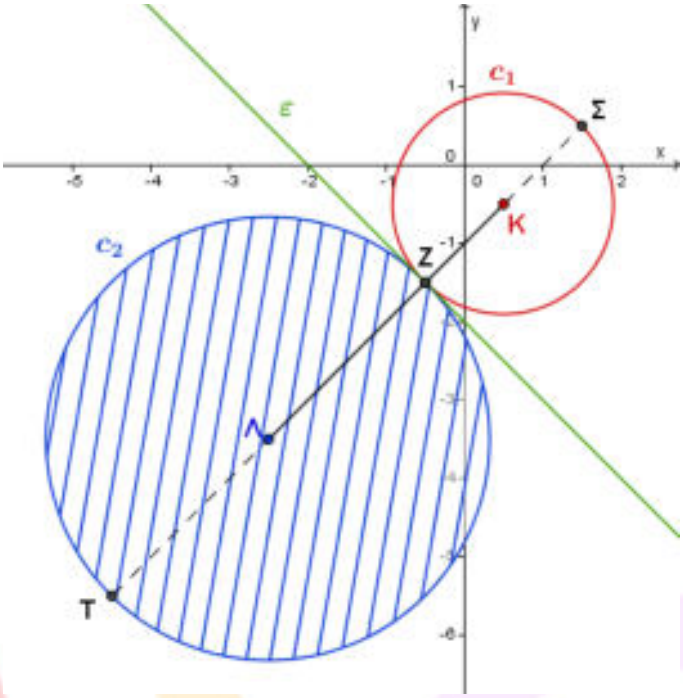
i. Οι κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά, διότι έχουν διάκεντρο

$\delta=(K\Lambda)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}+\frac{7}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$ και ισχύει $\delta=\rho+R$.

Άρα η ελάχιστη απόσταση των σημείων των δύο κύκλων είναι μηδέν και η μέγιστη απόσταση είναι ίση με $\Sigma T=\Sigma Z+ZT=2\rho+2R=6\sqrt{2}$.

ii. Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\rho$ και $d(\Lambda,\varepsilon)=\frac{\left|-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=R$.

Άρα η ευθεία (ε) είναι η ζητούμενη κοινή εσωτερική εφαπτομένη.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2 + (y+1)^2 = 5$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το μέσο K του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right)$ δηλαδή $(0,-1)$.

Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(2-(-2)\right)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

β) Ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \sqrt{5}$. Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$C: x^2 + (y+1)^2 = 5.$$

γ) Έστω $M(x,y)$. Τότε $(ABM) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)\right|$ με $\overrightarrow{AM} = (x+2, y)$ και $\overrightarrow{AB} = (4,-2)$

Οπότε:

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)\right| = 5 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ x+2 & y \end{vmatrix}\right| = 10 \Leftrightarrow$$

$$|4y + 2(x+2)| = 10 \begin{cases} 4y + 2x + 4 = 10 \\ \text{ή} \\ 4y + 2x + 4 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ \text{ή} \\ 2x + 4y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ \text{ή} \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

δ) Για να εφάπτονται οι ε_1 και ε_2 στο κύκλο C πρέπει $d(K, \varepsilon_1) = d(K, \varepsilon_2) = \sqrt{5}$.

Είναι

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{|0 + 2(-1) - 3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

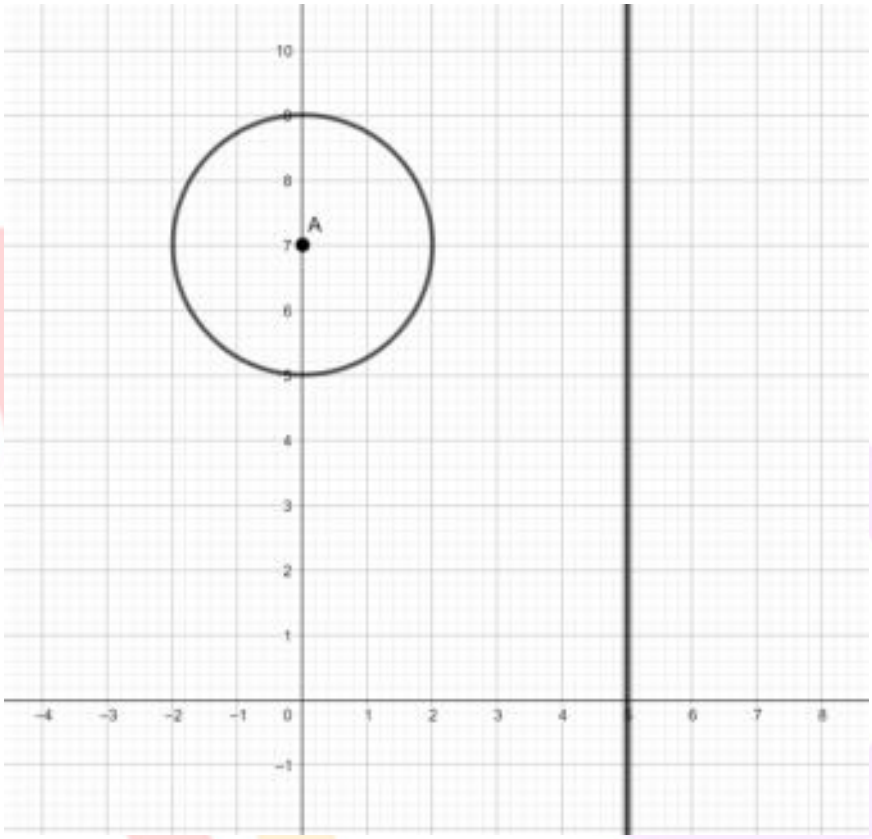
και

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{|0 + 2(-1) + 7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου A και την ευθεία (ε): $x=5$.



α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1.

(Μονάδες 3)

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $\mathrm{B}(x_1, y_1)$

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $\mathrm{B}(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου AB σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου B

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)i. με ακτίνα 2, που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\mathrm{A}(0,7)$ και ακτίνα $\rho=2$, άρα αντικαθιστώντας στον τύπο $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$, τις αντίστοιχες τιμές έχουμε:

$(x-0)^2+(y-7)^2=2^2 \Leftrightarrow x^2+(y-7)^2=4$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου C_1.

β)

i. Σύμφωνα με το τύπο $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$, οι κύκλοι με κέντρο $\mathrm{B}(x_1,y_1)$ και ακτίνα 2 έχουν εξίσωση $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=4$.

ii. Η απόσταση δύο σημείων $\mathrm{A}(x_A,y_A)$ και $\mathrm{B}(x_\mathrm{B},y_\mathrm{B})$ δίνεται από τον τύπο $(\mathrm{AB})=\sqrt{(x_A-x_\mathrm{B})^2+(y_A-y_\mathrm{B})^2}$, οπότε για τα σημεία $\mathrm{A}(0,7)$ και $\mathrm{B}(x_1,y_1)$ έχουμε $(\mathrm{AB})=\sqrt{(0-x_1)^2+(7-y_1)^2} \Leftrightarrow (\mathrm{AB})=\sqrt{x_1^2+(7-y_1)^2}$.

γ) Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους. Οπότε έχουμε:

$(\mathrm{AB})=2+2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-7)^2}=4 \Leftrightarrow x_1^2+(y_1-7)^2=16$ (1).

Ένας κύκλος εφάπτεται σε ευθεία αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε έχουμε:

$d(\mathrm{B},\varepsilon)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|0+x_1-5|}{\sqrt{0^2+1^2}}=2 \Leftrightarrow |x_1-5|=2$ (2).

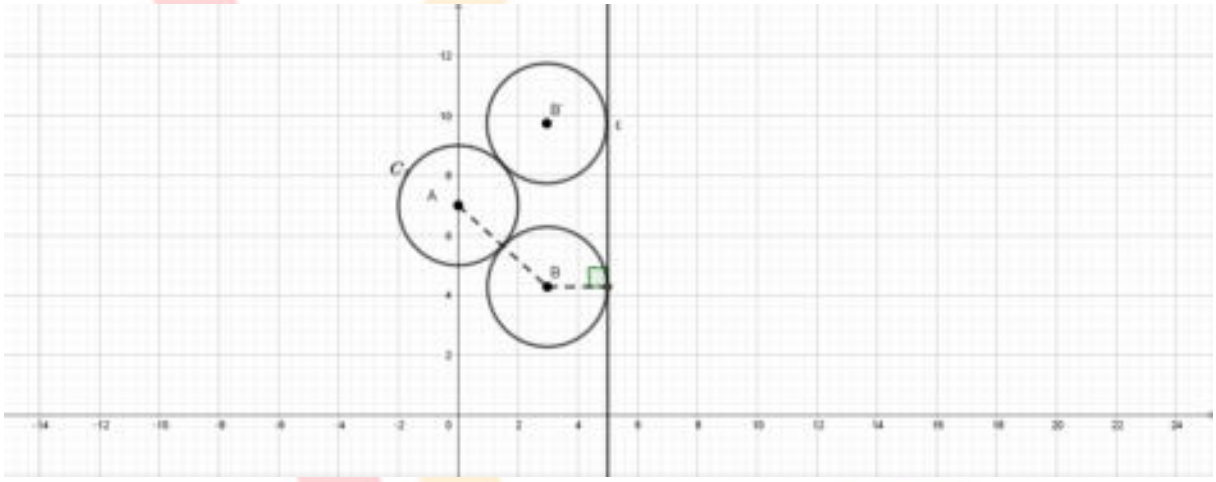
Για να βρούμε τους κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ |x_1-5|=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

νέο φροντιστήριο

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1-5=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1-7)^2=-33 \\ x_1=7 \end{cases} \text{ Αδύνατο.} \\ \text{ή} \\ \begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2+(y_1-7)^2=16 \\ x_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1-7)^2=7 \\ x_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=7-\sqrt{7} \text{ ή } y_2=7+\sqrt{7} \\ x_1=3 \end{cases} \end{cases}$$

Τελικά είναι δύο οι δύο κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) έχουν κέντρα τα σημεία $B\left(3,7-\sqrt{7}\right)$ και $B'\left(3,7+\sqrt{7}\right)$ και ακτίνα $\rho=2$.



νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2(\lambda+1)x-2\lambda y+2\lambda+1=0$ (1) , όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ.

(Μονάδες 7)

β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda=0$;

(Μονάδες 3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1,K_2,K_3,K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ. Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

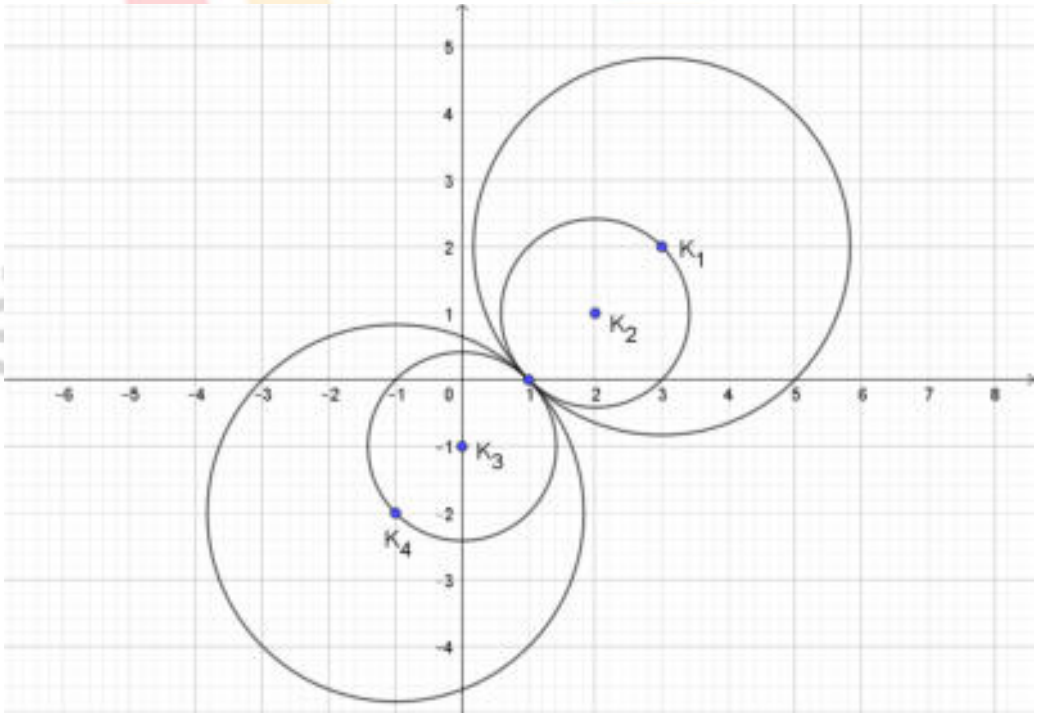
(Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 5)

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x+y-1=0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).

(Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Η (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, όπου $A=-2(\lambda+1)$, $B=-2\lambda$ και $\Gamma=2\lambda+1$. Είναι:

$$A^2+B^2-4\Gamma=(-2(\lambda+1))^2+(-2\lambda)^2-4(2\lambda+1)=4\lambda^2+8\lambda+4+4\lambda^2-8\lambda-4=8\lambda^2$$

Για να παριστάνει η (1) κύκλο πρέπει και αρκεί $A^2+B^2-4\Gamma>0 \Leftrightarrow 8\lambda^2>0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$.

Το κέντρο είναι το $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ δηλαδή $K(\lambda+1,\lambda)$ και η ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{8\lambda^2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}|\lambda|}{2}=\sqrt{2}|\lambda|$$

β) Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται $x^2+y^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=1 \\ \kappa\alpha\iota \\ y=0 \end{Bmatrix}$

που σημαίνει ότι παριστάνει το σημείο $M(1,0)$.

γ)

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα K_1,K_2 του σχήματος έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{y_{K_1}-y_{K_2}}{x_{K_1}-x_{K_2}}=\frac{2-1}{3-2}=1$ και εξίσωση $\zeta: y-1=1(x-2) \Leftrightarrow y=x-1$.

Θα αποδείξουμε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία ζ. Πράγματι το τυχαίο κέντρο $K(\lambda+1,\lambda)$ ανήκει στην ευθεία ζ, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $y=x-1$.

ii. Οι κύκλοι του σχήματος διέρχονται από το σημείο $M(1,0)$. Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από το $M(1,0)$. Πράγματι οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, αφού

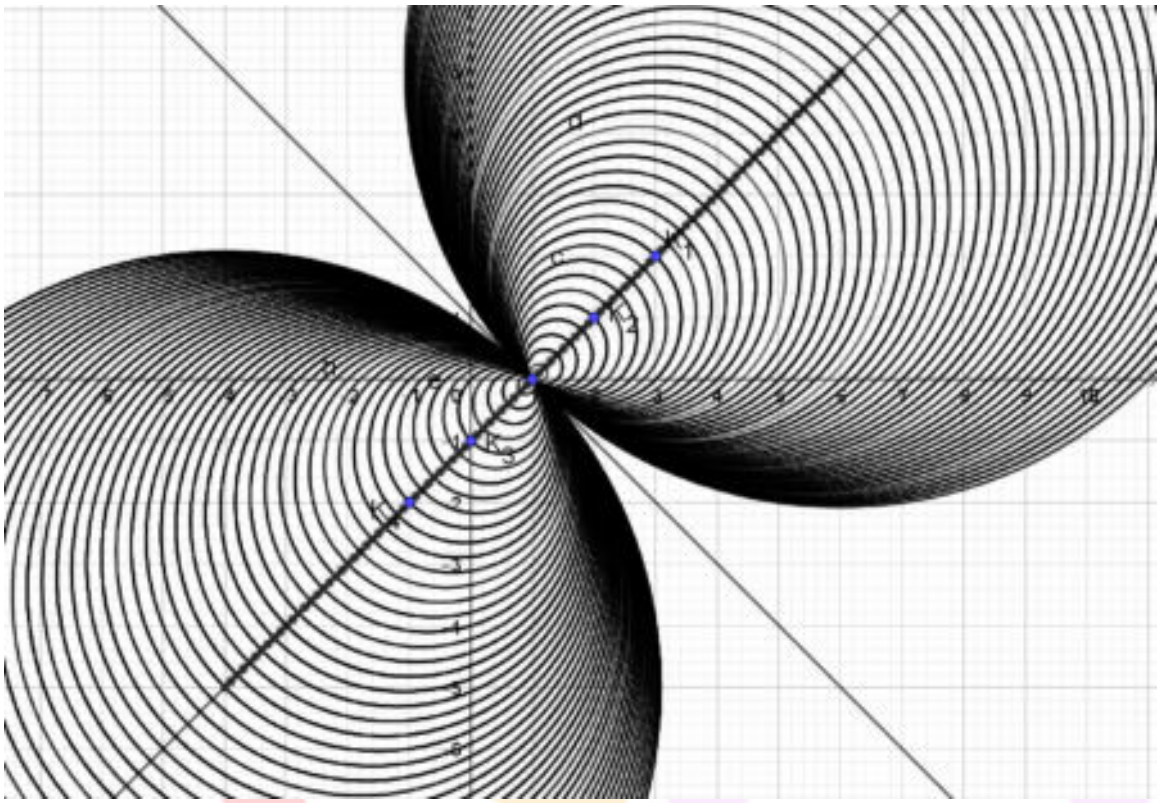
$1^2+0^2-2(\lambda+1)\cdot 1-2\lambda\cdot 0+2\cdot\lambda+1=0 \Leftrightarrow 0=0$ που ισχύει.

iii. Θα πρέπει το κέντρο $K(\lambda+1,\lambda)$ να απέχει από την ευθεία $\varepsilon: x+y-1=0$ απόσταση ίση με την ακτίνα ρ.

Πράγματι $d(K,\varepsilon)=\frac{|\lambda+1+\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2|\lambda|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|\lambda|=\rho$

Σημείωση : Η ευθεία $\varepsilon: x+y-1=0$ διέρχεται από το σημείο $M(1,0)$ και να είναι κάθετη στην ευθεία ζ, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1 \quad (1)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $A(1,0)$ και $B(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

(Μονάδες 07)

δ) Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

(Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι γνωστό ότι η εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα $\rho>0$.

Η (1) γράφεται $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2$, επομένως παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(2,\lambda)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\lambda^2+1}$, διότι $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Επιλέγουμε δύο από τους κύκλους (1), δίνοντας τις παρακάτω τιμές:

Για $\lambda=0,\quad x^2+y^2-4x+3=0$

Για $\lambda=1,\quad x^2+y^2-4x-2y+3=0.$

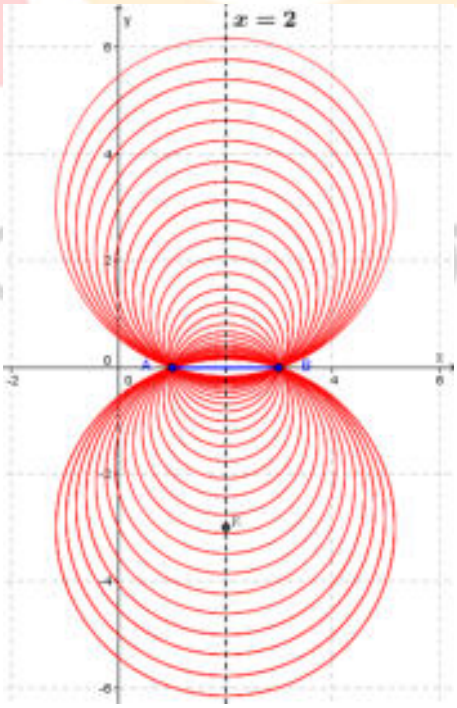
Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο ισότητες προκύπτει $y=0$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, είναι: $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

Επομένως οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τα $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

Με μια απλή αντικατάσταση στην (1), αποδεικνύεται ότι τα σημεία αυτά την επαληθεύουν για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και ως εκ τούτου, αποτελούν τα κοινά σημεία όλων των κύκλων.

γ) Η κοινή χορδή των κύκλων (1) είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$. Επομένως έχει εξίσωση $y=0$.

Τα κέντρα όλων των κύκλων είναι της μορφής $K(2,\lambda)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα, η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα όλων των κύκλων, είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x=2$. Επομένως είναι κάθετη στην κοινή χορδή.



δ) Αφού το σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, πρέπει υποχρεωτικά να είναι ή το $A(1,0)$ ή το $B(3,0)$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει: $\alpha \cdot \beta = 1 \cdot 0 = 3 \cdot 0 = 0$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $Γ(1, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία $ε: y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\overset{\cdot}{AB}=(4,0) \text{ και } \overset{\cdot}{A\Gamma}=(2,2)$$

και επειδή $\det(\overline{AB},\overline{A\Gamma})=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=8\neq 0$, τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Η πλευρά ΒΓ έχει μέσο το σημείο $M\left(\frac{3+1}{2},\frac{2+4}{2}\right)$ δηλαδή το $M(2,3)$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{B\Gamma}=\frac{4-2}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1$, οπότε η μεσοκάθετη (ε) της ΒΓ διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Επομένως, η εξίσωσης της ευθείας (ε) είναι $y-3=x-2$ δηλαδή $y=x+1$.

γ) Έστω $K(x,y)$ το σημείο της μεσοκάθετης που ισαπέχει από τα σημεία Α, Β. Με $y=x+1$, έχουμε:

$$(KA)=(KB)\Leftrightarrow (KA)^2=(KB)^2\Leftrightarrow (x+1)^2+(x-1)^2=(x-3)^2+(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-6x+9\Leftrightarrow 8x=8\Leftrightarrow x=1$$

οπότε $y=2$. Άρα, $K(1,2)$.

δ) Το σημείο Κ από τον τρόπο προσδιορισμού του ισαπέχει από τις κορυφές Α, Β, Γ του τριγώνου, άρα είναι το περίκεντρό του. Σε ότι αφορά στην ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου κύκλου ισχύει

$$\rho=(KA)=\sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

Επομένως, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, όπου $\alpha,\beta>0$.

α) Να βρείτε συναρτήσει των α,β

i. τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB.

(Μονάδες 5)

ii. την απόσταση (OM).

(Μονάδες 5)

β) Αν $(OM)=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $(OM)=\dfrac{(AB)}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Οι συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB είναι $M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$.

ii. Η απόσταση (OM) είναι

$$(OM)=\sqrt{(\frac{\alpha}{2}-0)^2+(\frac{\beta}{2}-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}.$$

β)

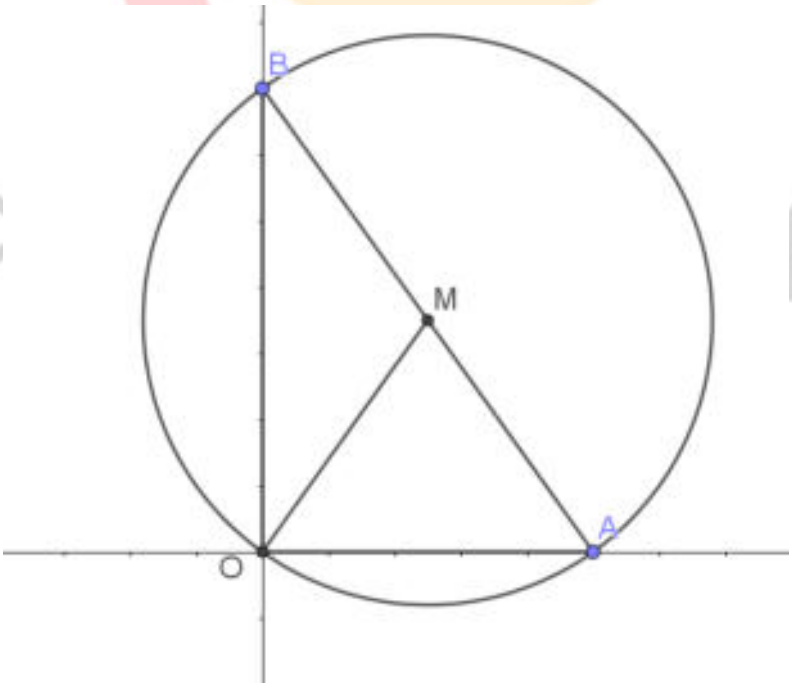
i. $(AB)=\sqrt{(\alpha-0)^2+(0-\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\cdot(OM)$ ή $(OM)=\frac{(AB)}{2}$.

ii. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί είναι η εξής:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

γ) Αφού $(OM)=\frac{(AB)}{2}=(AM)=(BM)$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο M ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου OAB και επομένως είναι το κέντρο του ζητούμενου περιγεγραμμένου κύκλου. Επίσης η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι η $(OM)=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$. Συνεπώς ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(x-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}.$$



ΘΕΜΑ 4

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία A(-2,- 2), B(0,-4) και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB.

(Μονάδες 08)

γ) Αν M(1,-2) και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABMK είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 08)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η γενική μορφή της εξίσωσης της παραβολής είναι $y^2 = 2px$. Για την $y^2 = 4x$ θα έχουμε ότι 2p = 4, οπότε είναι p = 2.

Η εστία της Ε είναι το σημείο $\left(\frac{p}{2},0\right)=\left(\frac{2}{2},0\right)=(1,0)$.

Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$, δηλαδή x = - $\frac{2}{2}=-1$.

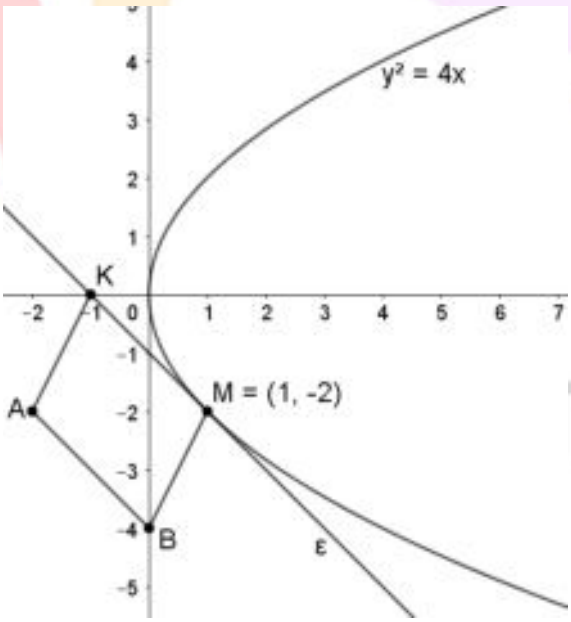
β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της M(x_1,y_1) δίνεται από την εξίσωση: $yy_1 = p(x+x_1)$, δηλαδή $yy_1 = 2(x+x_1)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_1 = \frac{2}{y_1}$, ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι $\lambda_2 = \frac{-4-(-2)}{0-(-2)} = \frac{-2}{2} = -1$.

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην ΑΒ πρέπει $\lambda_1 = \lambda_2$ ή $\frac{2}{y_1} = -1$, άρα $y_1 = -2$.

Επειδή όμως το σημείο Μ ανήκει στην παραβολή θα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή $y_1^2 = 4x_1$. Αντικαθιστούμε και έχουμε $(-2)^2 = 4x_1$, άρα $x_1 = 1$.

Επομένως το σημείο Μ θα είναι το (1,-2).

γ)



Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της παραβολής στο σημείο της M(1,-2) θα είναι $yy_1 = 2(x+x_1)$ ή $-2y = 2(x+1)$ ή $-y = x+1$ ή $x+y+1=0$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της με τον x΄x βάζουμε όπου $y=0$ και έχουμε x = -1. Επομένως το σημείο τομής με τον άξονα x΄x είναι το Κ(-1.0).

Από το ερώτημα (β) γνωρίζουμε ότι ΚΜ//ΑΒ.

(ΚΜ) = $\sqrt{(x_M-x_K)^2+(y_M-y_K)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(-2-0)^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$.

(ΑΒ) = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(0-(-2))^2+(-4-(-2))^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$.

Τα τμήματα ΑΒ και ΚΜ είναι ίσα και παράλληλα, επομένως το τετράπλευρο ΑΒΜΚ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2+(y+2\lambda)^2=1$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x+3y=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

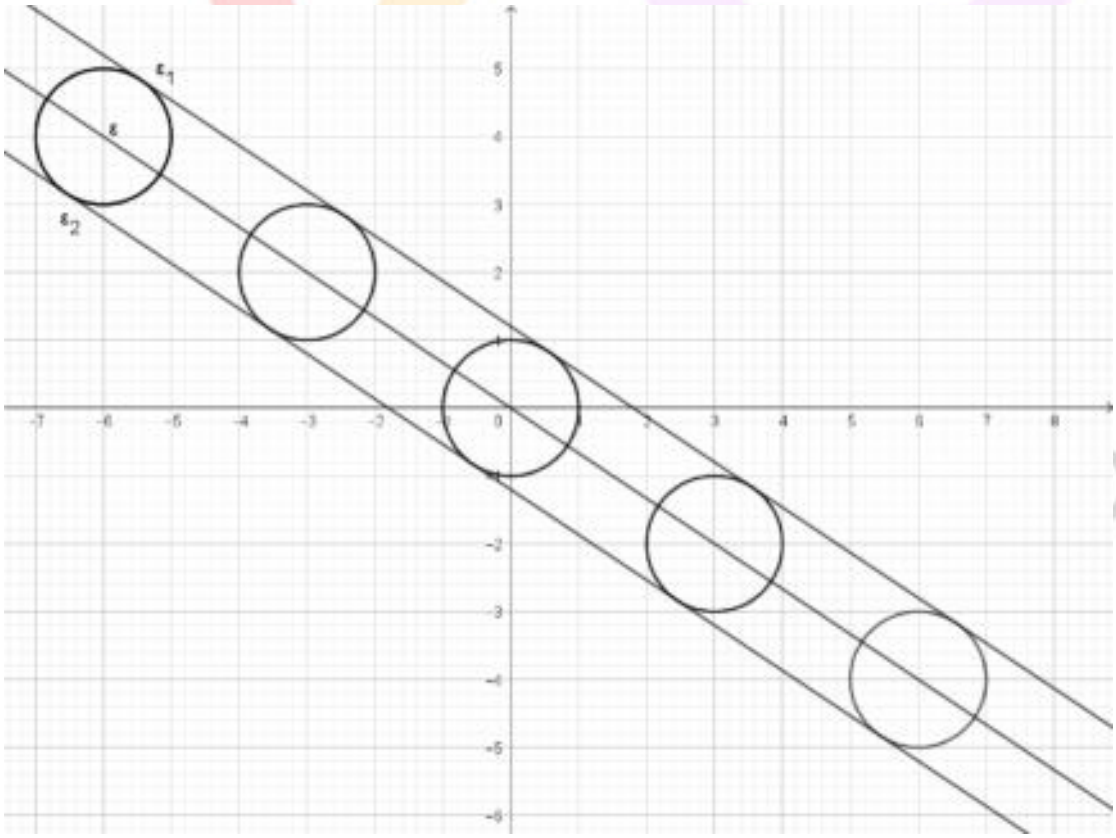
ΛΥΣΗ

α) Η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(3\lambda,-2\lambda)$ που ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 2x+3y=0$, αφού $2\cdot 3\lambda+3(-2\lambda)=6\lambda-6\lambda=0$.

β) Αν $\mathrm{M}(x,y)$ τυχαίο σημείο μιας εκ των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, τότε $d(\mathrm{M},\varepsilon)=1 \Leftrightarrow \dfrac{|2x+3y|}{\sqrt{2^2+3^2}}=1 \Leftrightarrow |2x+3y|=\sqrt{13}$ οπότε $2x+3y=\sqrt{13}$ ή $2x+3y=-\sqrt{13}$ που είναι οι ζητούμενες εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.

γ) Αφού τα κέντρα $\mathrm{K}(3\lambda,-2\lambda)$ όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ανήκουν στην $\varepsilon: 2x+3y=0$, δηλαδή στη μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, έχουμε ότι $d(\mathrm{K},\varepsilon_1)=d(\mathrm{K},\varepsilon_2)=1=\rho$. Συνεπώς όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.

δ) Ένα τετράγωνο του οποίου οι δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, θα έχει μήκος πλευράς ίσο με την απόσταση των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, δηλαδή 2. Συνεπώς το εμβαδόν του θα είναι ίσο με 4.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)$ (1) .

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

(Μονάδες 6)

β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y=\lambda x+4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}$. (Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα γράφεται $x^2-4x+y^2-2y=2x+2y-8 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2-4y=-8 \Leftrightarrow$

$x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2+y^2-2\cdot 2\cdot y+2^2=3^2+2^2-8 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y-2)^2=5(1).$

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β)

i. Η (1) για $x=4$ και $y=4$ δίνει $(4-3)^2+(4-2)^2=5 \Leftrightarrow 1^2+2^2=5$ που ισχύει. Επίσης η

(1) για $x=2$ και $y=0$ δίνει $(2-3)^2+(0-2)^2=5 \Leftrightarrow 1^2+2^2=5$ που ισχύει.

Συνεπώς τα σημεία Α και Β είναι πάνω στον κύκλο. Για να είναι αντιδιαμετρικά αρκεί το κέντρο Κ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Πράγματι $x_K=\frac{x_A+x_B}{2} \Leftrightarrow 3=\frac{4+2}{2} \Leftrightarrow 3=3$ ισχύει και $y_K=\frac{y_A+y_B}{2} \Leftrightarrow 2=\frac{4+0}{2} \Leftrightarrow 2=2$ ισχύει.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέτρου ΑΒ είναι $\lambda=\frac{0-4}{2-4}=2$.

Άρα και οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν κλίση 2.

Έστω ε: $y=2x+\beta \Leftrightarrow 2x-y+\beta=0$ η εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου .

Για να εφάπτεται στον κύκλο αρκεί $d(K,\varepsilon)=\rho \Rightarrow \frac{|2\cdot 3-2+\beta|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Rightarrow |\beta+4|=5$, οπότε

β + 4 = 5 ή β + 4 = -5 δηλαδή β = 1 ή β = - 9. Επομένως οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ έχουν εξισώσεις ε_1: y = 2x + 1 και ε_2: y = 2x - 9.

γ) Ισχύει $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}=2\rho$. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά δηλαδή η ευθεία (η) πρέπει να διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Άρα αντικαθιστώντας στην εξίσωση της (η) τις συντεταγμένες του κέντρου $x=3$ και $y=2$ έχουμε : $2=3\lambda+4 \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$.

α)

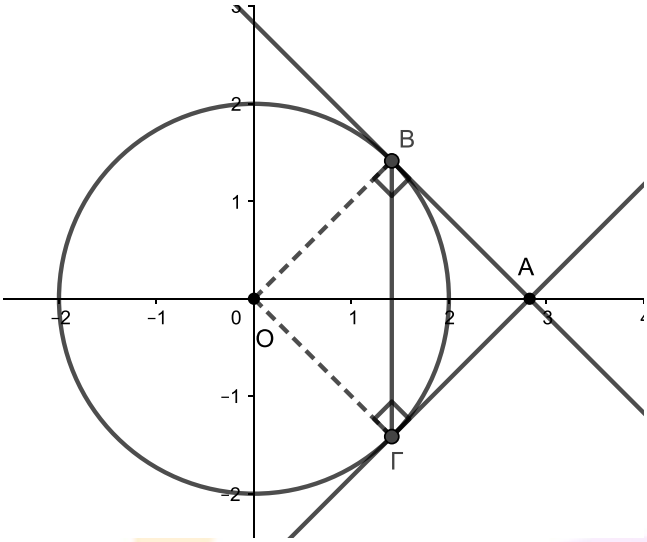
i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου C. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Α και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 12)

β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο Α, να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 08)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α)

i. Το σημείο $A(2\sqrt{2},0)$ είναι εξωτερικό του κύκλου C γιατί είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Ox με $(OA)= 2\sqrt{2} >2$ με 2 η ακτίνα του κύκλου.

ii. Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2\sqrt{2},0)$ είναι:

- Η κατακόρυφη $x= 2\sqrt{2}$ που δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου C γιατί $d(O,\varepsilon) =2\sqrt{2}$
- Οι ευθείες με εξίσωση (ε): $y-0=\lambda(x-2\sqrt{2})$ με $\lambda\in R$ ή $\lambda x-y-2\lambda\sqrt{2}=0$

  Η (ε) είναι εφαπτομένη του C αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του O ισούται με την ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή $d(O,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-0-2\lambda\sqrt{2}|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \Leftrightarrow$

  $2\sqrt{2}\,|\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow 8\lambda^2 = 4\lambda^2+4 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4 =0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

  Για $\lambda=1$, (ε_1): $y=x-2\sqrt{2}$ και για $\lambda= - 1$, (ε_2): $y=-x+2\sqrt{2}$

  Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 1 και -1 αντίστοιχα και $\lambda_1\cdot\lambda_2= -1$. Άρα οι εφαπτόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 του κύκλου από το σημείο A είναι μεταξύ τους κάθετες.

β) Αν B, Γ τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών ε_1 και ε_2 με τον κύκλο C, τότε οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία αυτά είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες. Δηλαδή το τετράπλευρο ABOΓ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο. Επειδή OA = OB = 2 ως ακτίνες του κύκλου, άρα είναι ρόμβος. Επομένως το ABOΓ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 2. Συνεπώς (ABOΓ) = 2^2 = 4 τ.μ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=1$.

α) Αν Α και Α΄ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox΄ αντίστοιχα, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Α΄ είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0). (Μονάδες 05)

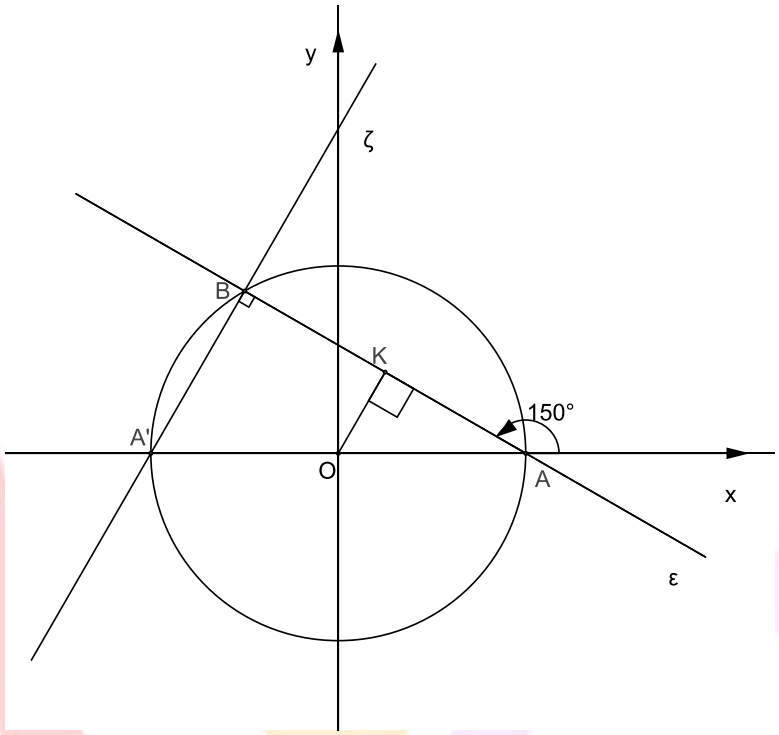
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 150° . (Μονάδες 06)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο Β, να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΒ έχει μήκος $\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από τα σημεία Α΄ και Β. (Μονάδες 06)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α)

i. Τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox΄ έχουν τεταγμένη μηδέν. Επομένως, για y=0 έχουμε: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα A΄(-1,0) και A(1,0).

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο A(1,0), είναι $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Οπότε η εξίσωση της ε είναι: $y-0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$.

β)

i. Αν ΟΚ το απόστημα της χορδής ΑΒ, τότε

$$OK=d(O,\varepsilon)=\frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0-0+\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1^2}}=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{12}{9}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Αν ΑΚ = μ = $\frac{AB}{2}$, με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΚ έχουμε: $OK^2+\mu^2=OA^2 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mu^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα $AB=2\mu=\sqrt{3}$.

ii. Η γωνία Α΄ΒΑ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα Α΄Β⊥ΒΑ δηλαδή ζ⊥ε,οπότε $\lambda_\zeta = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ και (ζ): $y - 0 = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ και η ευθεία (ε): $3x-4y=\mu$, $\mu\in R$.

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 05)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β

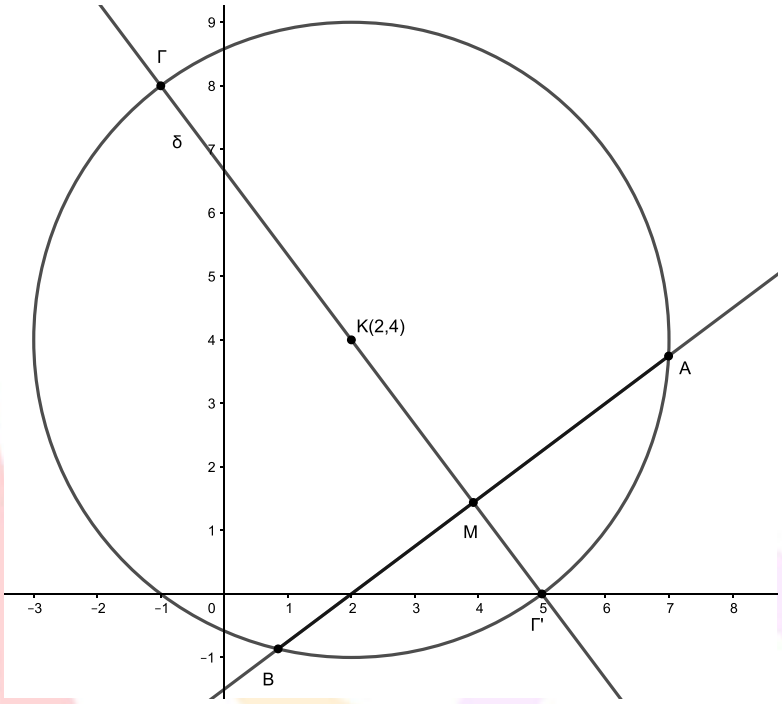
i. Να αποδείξετε ότι $-35<\mu<15$. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 04)

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ. (Μονάδες 09)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α) $x^2+y^2-4x-8y-5=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4-4+y^2-8y+16-16-5=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=25$. Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(2,4) και η ακτίνα του είναι ρ=5.

β)

i. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του από την ευθεία ε είναι μικρότερη της ακτίνας του. Δηλαδή d(K, ε) < ρ $\Leftrightarrow \frac{|3\cdot 2-4\cdot 4-\mu|}{\sqrt{3^2+4^2}}<5 \Leftrightarrow \frac{|-10-\mu|}{5}<5 \Leftrightarrow |\mu+10|<25 \Leftrightarrow -25<\mu+10<25 \Leftrightarrow -35<\mu<15$.

ii. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τότε οι συντεταγμένες του σημείου Κ θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή $3\cdot 2-4\cdot 4=\mu \Leftrightarrow \mu=-10$. Η τιμή μ= -10 είναι δεκτή αφού βρίσκεται στο διάστημα (-35,15) που βρήκαμε στο β)i. ερώτημα.

iii. Το ζητούμενο σημείο Γ θα είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΓΑΒ με βάση τη χορδή ΑΒ. Άρα το Γ θα ανήκει στη μεσοκάθετο ευθεία (δ) της χορδής ΑΒ που είναι ο φορέας του αποστήματος της χορδής ΑΒ και είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε, με $\lambda_\varepsilon=\frac{3}{4}$. Επειδή $\delta\perp\varepsilon$ θα είναι $\lambda_\delta\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_\delta=-\frac{4}{3}$.

Οπότε η εξίσωση της ευθείας δ είναι: $y-y_K=-\frac{4}{3}(x-x_K)$ ή $y-4=-\frac{4}{3}(x-2) \Leftrightarrow 3y-12=-4x+8$

$\Leftrightarrow$ 4x+3y=20. Τα σημεία τομής της ευθείας δ με τον κύκλο είναι τα ζητούμενα σημεία. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$(\Sigma)\begin{cases} x^2+y^2-4x-8y-5=0 \\ y=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+\frac{1}{9}(20-4x)^2-4x-8\frac{1}{3}(20-4x)-5=0 \\ y=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9x^2+400+16x^2-160x-36x-480+96x-45=0 \\ y=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 25x^2-100x-125=0 \\ y=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5=0 \\ y=\frac{1}{3}(20-4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \text{ ή } x=-1 \\ y=0 \text{ ή } y=8 \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ, τα Γ(5,0) και Γ΄(-1,8).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Τα σημεία Α(-7, -1) και Β(3, -5) είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου Κ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Μ. (Μονάδες 04)

ii. Την εξίσωση της ευθείας ΚΜ. (Μονάδες 08)

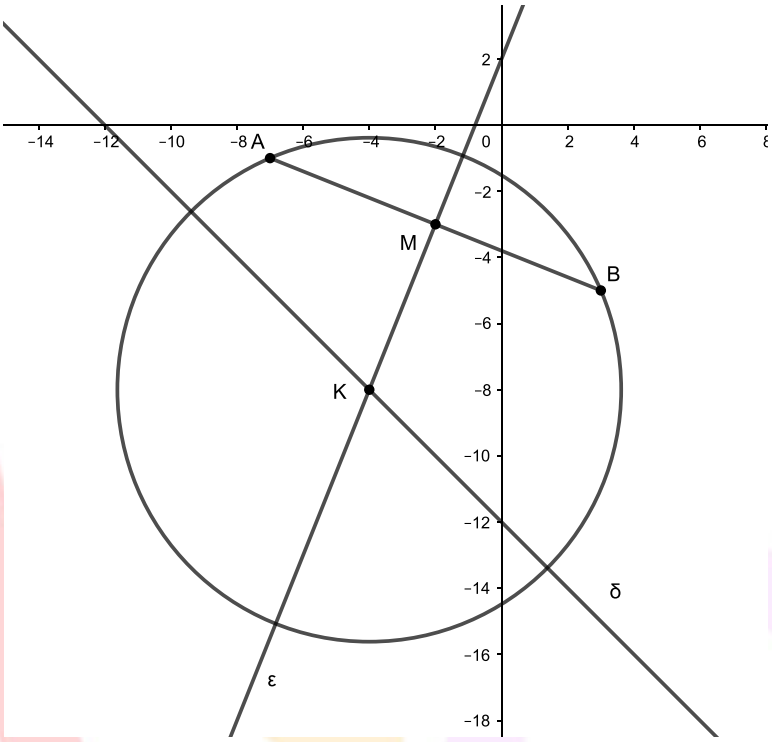
β) Αν από το κέντρο Κ του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): x+y= -12, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 06)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α)

i. Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{-7+3}{2}, \frac{-1-5}{2}\right)$ = (-2, -3).

ii. Το τμήμα ΚΜ ενώνει το κέντρο του κύκλου με το μέσο Μ της χορδής ΑΒ, οπότε είναι το απόστημα της χορδής και ΚΜ⊥ΑΒ. Οπότε $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{KM} = -1$.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{-5+1}{3+7} = -\frac{2}{5}$, επομένως $\lambda_{KM} = \frac{5}{2}$. Η εξίσωση της ευθείας ΚΜ είναι

(ΚΜ): $y - y_M = \frac{5}{2}(x - x_M) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{5}{2}(x + 2) \Leftrightarrow 2y+6 = 5x+10 \Leftrightarrow 5x - 2y + 4 = 0$

β)

i. Το κέντρο Κ του κύκλου ανήκει στην ευθεία δ και στην ευθεία ΚΜ. Άρα η τομή των δύο ευθειών, δηλαδή η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεών τους, θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου Κ.

$$(\Sigma)\ \begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ x + y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ 2x + 2y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -28 \\ x + y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -8 \end{cases}$$

Άρα Κ(-4, -8).

ii. Αρκεί να βρούμε την ακτίνα του κύκλου που είναι το μήκος του τμήματος ΚΑ.

$(KA) = \sqrt{(-4+7)^2 + (-8+1)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$.

Η εξίσωση του κύκλου είναι C: $(x+4)^2 + (y+8)^2 = 58$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση

ε: $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

α)

i. Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου Μ από την ε. (Μονάδες 07)

ii. Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι (ΜΓΔ) = 5 τ.μ. (Μονάδες 05)

β)

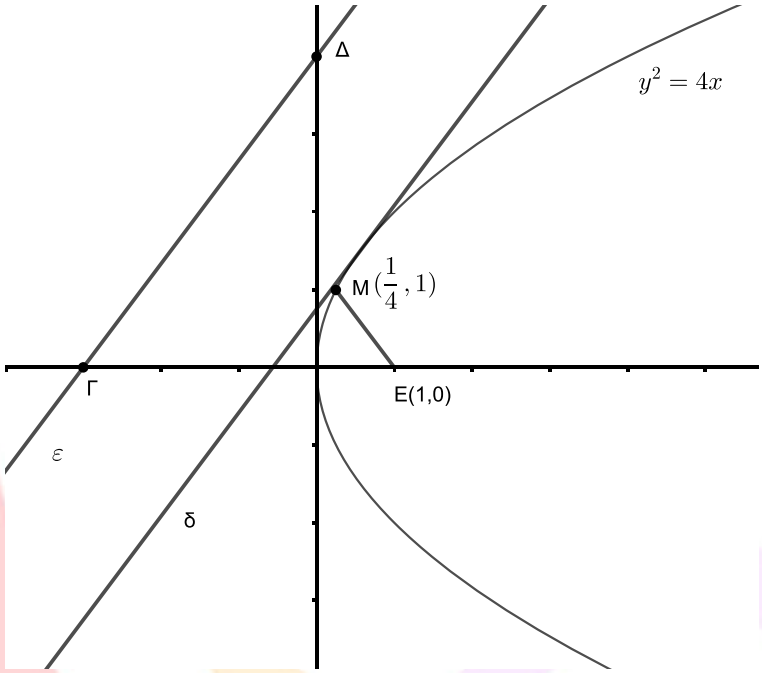
i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθεία ζ της παραβολής με ζ παράλληλη στην ε.

(Μονάδες 08)

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε; (Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ



α)

i. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$ είναι αδύνατο.

$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases}$. Η δευτέρου βαθμού εξίσωση $y^2 - 3y + 12 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού Δ = 9-48<0, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Η ευθεία ε ισοδύναμα γράφεται 4x-3y+12=0

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|4\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot 1 + 12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

ii. Τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες τα βρίσκουμε θέτοντας y=0 και x=0 στην εξίσωσή της.

Για y=0 έχουμε $\frac{x}{3}$ = -1 ή x = -3, άρα Γ(-3, 0).

Για x=0 έχουμε $\frac{y}{4}$ = 1 ή y = 4, άρα Δ(0, 4).

Για το εμβαδό του τριγώνου ΜΓΔ θα βρούμε το μήκος του τμήματος ΓΔ γιατί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτό είναι η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ε.

$$(ΓΔ) = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\,.$$

Άρα (ΜΓΔ) = $\frac{1}{2}$ (ΓΔ)· d(Μ, ε) = $\frac{1}{2}$ ·5·2 = 5 τ.μ.

β)

i. Η εφαπτομένη ζ της παραβολής σε τυχαίο σημείο της (x_1,y_1) με $y_1 \neq 0$ έχει εξίσωση $yy_1 = 2(x+x_1)$ ή $y = \frac{2}{y_1}\cdot x + \frac{2x_1}{y_1}$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\zeta = \frac{2}{y_1}$.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \frac{4-0}{0-(-3)} = \frac{4}{3}$. Για να είναι η ευθεία ε παράλληλη της εφαπτομένης ζ πρέπει και αρκεί $\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon$ ή $\frac{4}{3} = \frac{2}{y_1}$ ή $y_1 = \frac{3}{2}$.

Το σημείο (x_1,y_1) επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής, επομένως

$$y_1^2 = 4x_1 \text{ ή } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4x_1 \text{ ή } x_1 = \frac{9}{16}.$$

Για $x_1 = \frac{9}{16}$, $y_1 = \frac{3}{2}$ η εφαπτομένη ζ που είναι παράλληλη της ευθείας ε είναι:

$$y = \frac{2}{y_1}\cdot x + \frac{2x_1}{y_1} \quad \text{ή} \quad y = \frac{2}{\frac{3}{2}}x + \frac{2\cdot\frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} \quad \text{ή τελικά}$$

$$\zeta: 16x-12y+9=0$$

ii. Για να βρούμε την απόσταση των ευθειών ζ και ε, αρκεί να βρούμε ένα σημείο, έστω Κ, της ζ και να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ε.

Θέτοντας x=0 στην εξίσωση της ευθείας ζ έχουμε: $y = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Άρα το σημείο Κ της ευθείας ζ είναι το $K(0, \frac{3}{4})$. Η εξίσωση της ευθείας ε είναι: 4x-3y+12=0, επομένως:

$$d(\zeta, \varepsilon) = d(K, \varepsilon) = \frac{|4\cdot 0-3\cdot\frac{3}{4}+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|-\frac{9}{4}+\frac{48}{4}|}{\sqrt{25}} = \frac{\frac{39}{4}}{5} = \frac{39}{20}.$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathfrak{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathfrak{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. (Μονάδες 7)

δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για $\lambda=0$. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in R$, για την οποία:

$A = -(\lambda+8)$, $B = \lambda$ και $\Gamma = 7$, οπότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = [-(\lambda+8)]^2 + \lambda^2 - 4\cdot 7 = (\lambda+8)^2 + \lambda^2 - 28 =$

$\lambda^2 + 16\lambda + 64 + \lambda^2 - 28 = 2\lambda^2 + 16\lambda + 36 = 2(\lambda^2 + 8\lambda + 18) > 0$, για κάθε $\lambda \in R$,

εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = -8 < 0$.

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$.

Επίσης το κέντρο των κύκλων που ορίζονται από την (1) είναι το

$K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (-\frac{-(\lambda+8)}{2}, -\frac{\lambda}{2}) = (\frac{\lambda+8}{2}, -\frac{\lambda}{2})$, $\lambda \in R$ και ακτίνα η

$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\lambda^2 + 8\lambda + 18)}$, $\lambda \in R$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α), τα κέντρα των κύκλων που εκφράζει η εξίσωση (1) είναι

τα $K(\frac{\lambda+8}{2}, -\frac{\lambda}{2})$, $\lambda \in R$. Αν $K(x, y)$, τότε:

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda+8}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2y+8}{2} \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 4 \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in R \end{cases}$$

. Άρα τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1), κινούνται στην ευθεία ε: $x + y - 4 = 0$.

γ) Η εξίσωση (1) για κάθε $\lambda \in \Re$ γράφεται:

$x^2 + y^2 - \lambda x - 8x + \lambda y + 7 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 8x + 7) + \lambda(y - x) = 0$, οπότε:

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

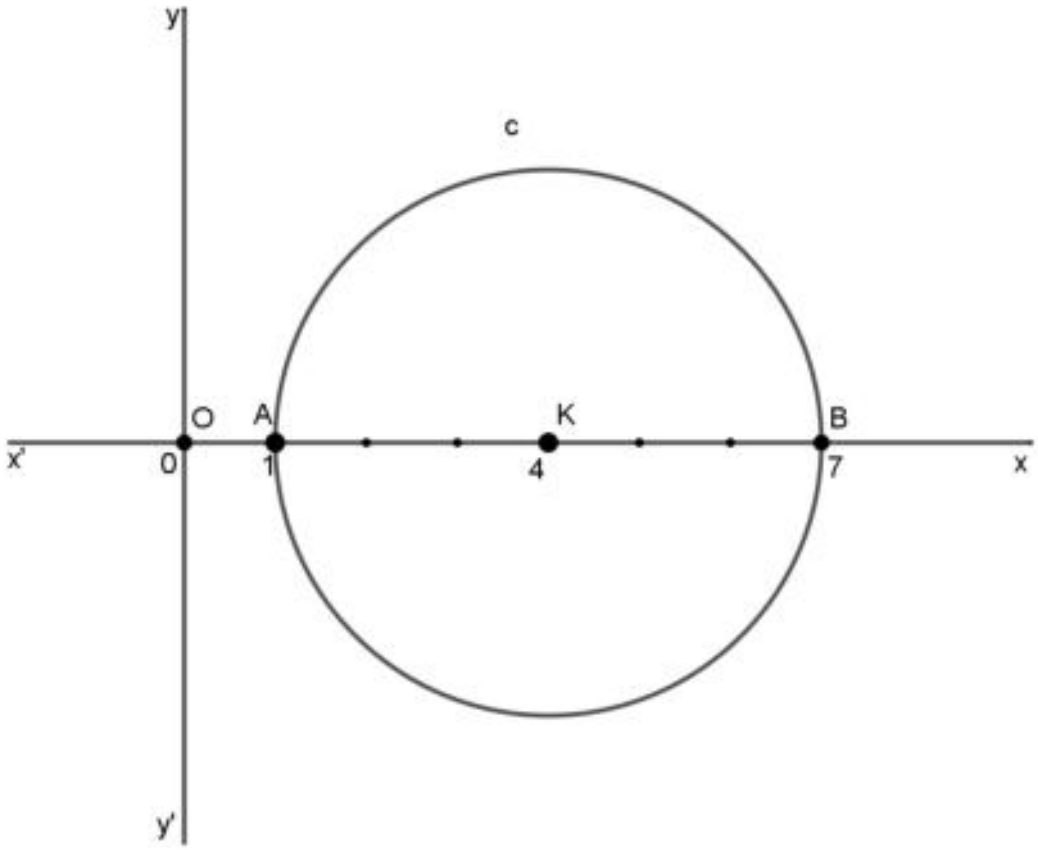
$$\begin{cases} y = x \\ x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$, άρα $x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = y$ ή $x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = y$.

Επομένως για κάθε $\lambda \in \Re$, όλοι οι κύκλοι (1), διέρχονται από τα σταθερά σημεία

$M(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ και $N(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2})$.

δ) Λόγω του ερωτήματος (α), για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1), εκφράζει κύκλο με κέντρο το $K(4, 0)$ και ακτίνα $\rho = 3$. Ο κύκλος αυτός φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων βρίσκονται πάνω στην ΟΚ. Οπότε το σημείο του που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0, 0)$, είναι το $A(1, 0)$ και το σημείο του που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση είναι το $B(7, 0)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\alpha y = 0 \qquad (1)$$

όπου α είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α).

(Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα x΄x.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

με $A = -4\alpha$, $B = -4\alpha$ και $\Gamma = 0$.

Για να παριστάνει κύκλο θα πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Είναι:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16\alpha^2 + 16\alpha^2 = 32\alpha^2$$

Επομένως, θα πρέπει

$$\alpha^2 > 0$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται αν και μόνο αν $\alpha \neq 0$.

β) Τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για $\alpha \neq 0$, είναι

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (2\alpha, 2\alpha)$$

και η ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{32\alpha^2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}|\alpha|}{2} = 2\sqrt{2}|\alpha|$$

γ) Για τα κέντρα των κύκλων έχουμε:

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2\alpha \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Επομένως, τα κέντρα των κύκλων κινούνται πάνω στην ευθεία $y = x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$, αφού είναι $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

δ) Για να εφάπτεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την εξίσωση (1) στον άξονα $x'x$, θα πρέπει να ισχύει:

$$|y_K| = R$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$|2\alpha| = 2\sqrt{2}|\alpha| \quad \text{ή} \quad |\alpha| = \sqrt{2}|\alpha| \quad \text{ή} \quad |\alpha|(1 - \sqrt{2}) = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha = 0$$

Όμως, $\alpha \neq 0$, οπότε δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται του άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 4

Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή $γ_1$, κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: Α (λ-1, 2λ+1), λ∈R.
- τη γραμμή $γ_2$, που περνάει από το σταθμό Σ (-4, 2) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}$ = (-1, 3).

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές $γ_1$ και $γ_2$. (Μονάδες 10)

β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο Κ(1, 1) του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές $γ_1$ και $γ_2$. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)

γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής $γ_1$. (Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε Α(λ-1, 2λ+1), λ∈R, οπότε αν Α(x, y) τότε:

$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ \lambda \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x + 1 \\ y = 2(x+1) + 1 \\ \lambda \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ \lambda = x + 1 \\ \lambda \in R \end{cases}$, οπότε γ_1: 2x – y + 3 = 0,

η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκετε η γραμμή γ_1.

Επίσης ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u}$ = (-1, 3) είναι:

$\lambda = \frac{y}{x} = \frac{3}{-1} = -3 = \lambda_{\gamma_2}$, οπότε

γ_2: $y - y_\Sigma = \lambda_{\gamma_2}(x - x_\Sigma)$ ή γ_2: y - 2 = -3(x + 4) ή γ_2: y - 2 = -3x – 12 ή γ_2: 3x + y + 10 = 0,

η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκετε η γραμμή γ_2.

β) Είναι Κ(1, 1), οπότε λόγω του ερωτήματος (α) είναι:

$d(K, \gamma_1) = \frac{|2\cdot1-1\cdot1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ και

$d(K, \gamma_2) = \frac{|3\cdot1+1\cdot1+10|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|14|}{\sqrt{10}} = \frac{14}{\sqrt{10}} = \frac{14\sqrt{10}}{10} = \frac{7\sqrt{10}}{5}$.

Εφόσον $\frac{4\sqrt{5}}{5} < \frac{7\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow d(K, \gamma_1) < d(K, \gamma_2)$, προφανώς συμφέρει η σύνδεση του σταδίου με τη γραμμή γ_1.

γ) Το κέντρο του ζητούμενου κύκλου που ορίζει το κυκλικό πάρκο γύρω από το στάδιο, είναι το σημείο Κ(1, 1). Εφόσον ο κύκλος αυτός εφάπτεται στη γραμμή γ_1, η ακτίνα του λόγω του ερωτήματος (β), είναι $\rho = d(K, \gamma_1) = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Επομένως:

C: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\frac{4}{\sqrt{5}})^2$ ή C: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{16}{5}$, είναι η εξίσωσή του.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή C : $y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $\mathrm{O}(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ.

(Μονάδες 6)

δ) Έστω $\mathrm{M}(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ. Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ, να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E.

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$ όπου $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$, οπότε η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ δηλαδή $\mathrm{E}(1,0)$ και διευθετούσα με εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta : x = -1$.

β) Η (1) είναι της μορφής $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ όπου $\mathrm{A} = \lambda^2 - 1, \mathrm{B} = 2\lambda, \Gamma = \lambda^2 + 1$.

Είναι $\mathrm{A} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ και $\mathrm{B} = 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζονται ταυτόχρονα τα A και B, η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επίσης $\Gamma = \lambda^2 + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε δεν διέρχεται από το $\mathrm{O}(0,0)$.

γ) Για $\lambda \neq 0$ η (1) παριστάνει ευθεία που δεν είναι παράλληλη στον yy' και επομένως δεν μπορεί να είναι η διευθετούσα δ.

Για $\lambda = 0$ η (1) γίνεται $x = 1$ που δεν είναι η διευθετούσα δ.

Συνεπώς η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ.

δ) Έστω $\mathrm{M}(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στη δ, δηλαδή $\alpha \neq -1$ και διέρχεται από αυτό μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ, δηλαδή οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για μία και μόνο τιμή του λ, συνεπώς ισχύει $\lambda^2\alpha - \alpha + 2\lambda\beta + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)\lambda^2 + 2\lambda\beta + 1 - \alpha = 0$ για μία και μόνο τιμή του λ. Η εξίσωση $(\alpha+1)\lambda^2 + 2\lambda\beta + 1 - \alpha = 0$ είναι 2ου βαθμού ως προς λ, αφού $\alpha \neq -1$ και για να επαληθεύεται για μία μόνο τιμή του λ, πρέπει και αρκεί $\Delta = 0$.

Είναι $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\beta)^2 - 4(\alpha+1)(1-\alpha) = 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 - 4 + 4\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$

που σημαίνει ότι το σημείο $\mathrm{M}(\alpha, \beta)$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, χωρίς το σημείο $(-1,0)$, αφού $\alpha \neq -1$. Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο το Ο(0,0) δηλαδή την κορυφή της παραβολής C και ακτίνα $\rho = 1$, οπότε διέρχεται από την εστία E, αφού $(\mathrm{OE}) = 1 = \rho$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η $B\hat{A}\Gamma = 90°$.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ.

(Μονάδες 09)

γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (2-1, 4-2) = (1, 2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3-1, 1-2) = (2, -1)$.

Τότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$. Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα και ως εκ τούτου $B\hat{A}\Gamma = 90°$.

Εναλλακτική λύση: $\lambda_{AB} = \frac{4-2}{2-1} = 2$, $\lambda_{A\Gamma} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$.

β) Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A, ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ έχει διάμετρο την υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου και κέντρο το μέσο K της $B\Gamma$.

Αλλά $x_K = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$, $y_K = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$, οπότε $K\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Για την ακτίνα του, είναι: $\rho = \frac{(B\Gamma)}{2} = \frac{\sqrt{(3-2)^2+(1-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ως γνωστόν, η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι η

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Επομένως, η εξίσωση του κύκλου c είναι η $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

γ) Έστω $\varepsilon: y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$ εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ισούται με την ακτίνα του ρ. Είναι λοιπόν:

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{\left|\lambda \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot \frac{5}{2} + 0\right|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot |\lambda - 1| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$25\,(\lambda - 1)^2 = 10\,(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

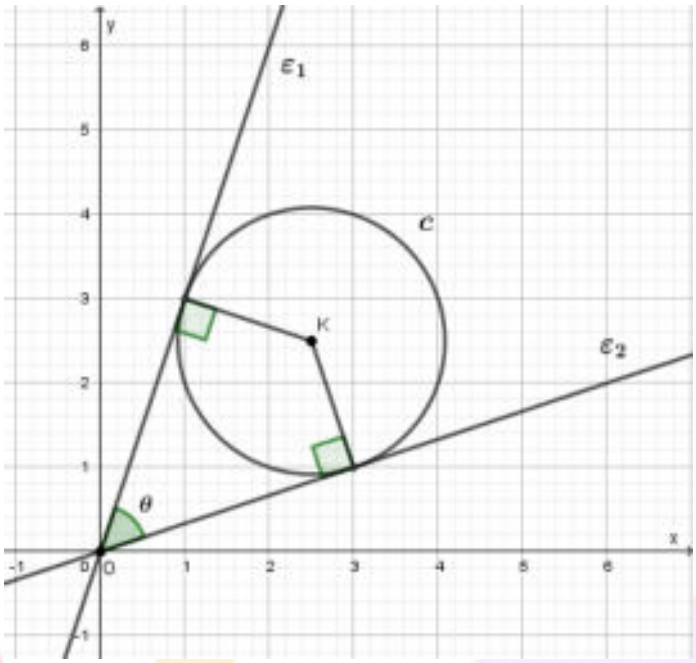
Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64 > 0$ και οι λύσεις της δευτέρου βαθμού εξίσωσης που έχει προκύψει είναι οι $\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3$ ή $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Επειδή από ένα σημείο εκτός κύκλου φέρονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες προς αυτόν, οι ζητούμενες ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: y = 3x \text{ και } \varepsilon_2: y = \frac{1}{3}x$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4,4)$ και η AK κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M. Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

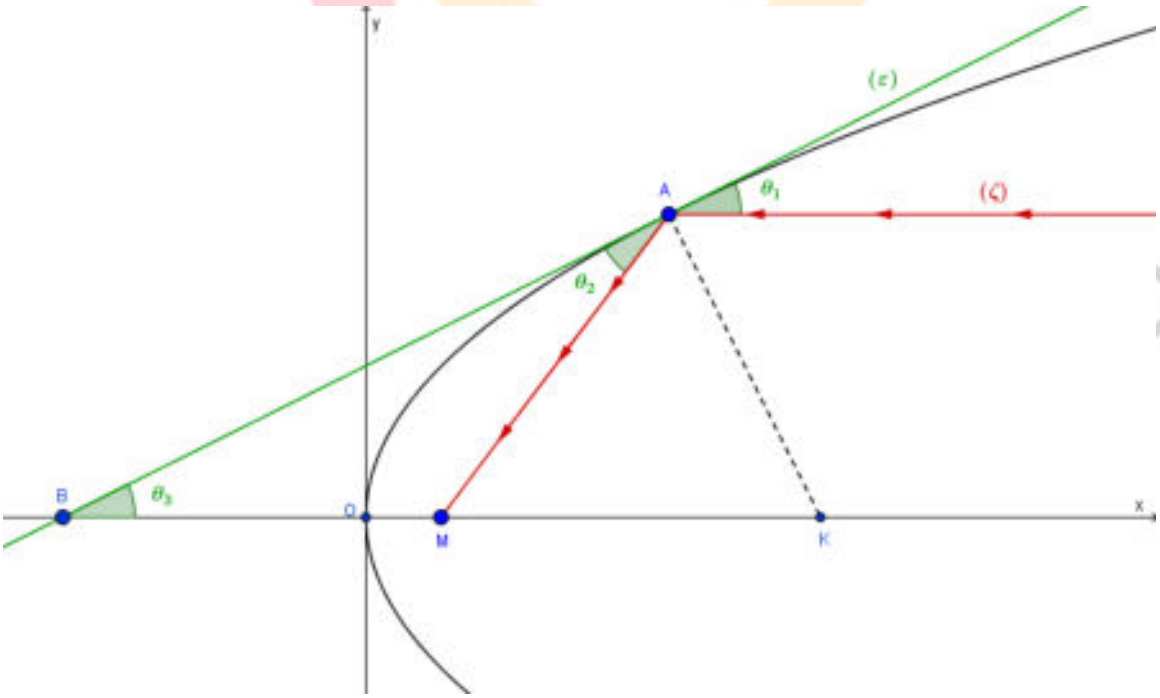
(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 07)

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

(Μονάδες 06)



ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ έχει άξονα τον $x'x$, εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -\frac{p}{2}$.

Ως εκ τούτου, η $y^2 = 4x$, (με $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$) έχει άξονα τον $x'x$, εστία το σημείο $E(1,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -1$.

β) Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο $A(4,4)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = p(x + x_1) \Leftrightarrow 4y = 2(x + 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Θέτοντας στη συνέχεια όπου $y = 0$, έχουμε ότι $\frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Το σημείο B λοιπόν, στο οποίο η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι το $B(-4, 0)$.

γ) Αν θ_3 είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\theta_3 = \theta_2$. Πραγματικά είναι:

Οι γωνίες θ_1 και θ_3 είναι ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ευθειών (ζ) και $x'x$. Από την εκφώνηση του προβλήματος είναι γνωστόν ότι $\theta_1 = \theta_2$. Επομένως $\theta_3 = \theta_2$ και ως εκ τούτου το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

δ) Η θέση του σημείου $M(x, 0)$ μπορεί να βρεθεί λύνοντας την εξίσωση:

$$(MA) = (MB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + 16} = |x + 4| \Leftrightarrow (x-4)^2 + 16 = (x+4)^2 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα έχουμε $M(1,0)$.

Επομένως το ζητούμενο σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής $E(1,0)$. Άρα η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα διέρχεται από την εστία της παραβολής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4,4), M_1(4,0), M_2(0,4)$. Αν Ο η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y = 8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η πλευρά του τετραγώνου είναι $(MM_1) = 4$. Η διαγώνιος OM είναι η διάμετρος του ζητούμενου κύκλου.

Έχουμε $(OM) = \sqrt{(OM_1)^2+(MM_1)^2} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, δηλαδή $\rho = 2\sqrt{2}$

Το μέσον της OM έχει συντεταγμένες $K(2,2)$.

Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου (περιγεγραμμένος κύκλος) έχει εξίσωση $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

β) Για να είναι η ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου θα πρέπει η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία να είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

Έχουμε:

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2+2-8|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \rho.$$

Άρα η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου.

γ) Έστω $N(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Τότε οι συντεταγμένες του σημείου θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας και του κύκλου.

Έχουμε:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 8 \\ (x_1-2)^2 + (y_1-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (8-y_1-2)^2 + (y_1-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (6-y_1)^2 + (y_1-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ 36 - 12y_1 + {y_1}^2 + {y_1}^2 - 4y_1 + 4 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

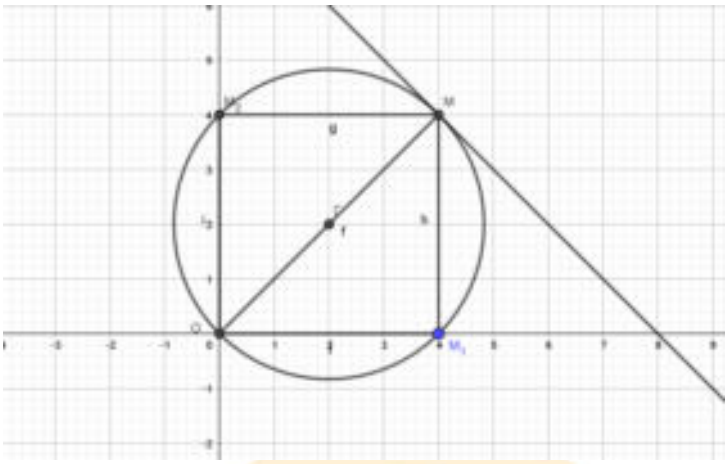
$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ 2{y_1}^2 - 16y_1 + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ {y_1}^2 - 8y_1 + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (y_1-4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 4 \end{cases}.$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $M(4,4)$.

νέο φροντιστήριο

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(3,0)$ και $\mathrm{E}'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E'. Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη C όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).

α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C.

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της.

(Μονάδες 5)

γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο E. Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα

2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα

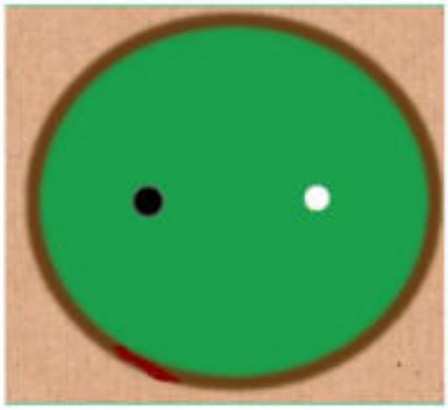
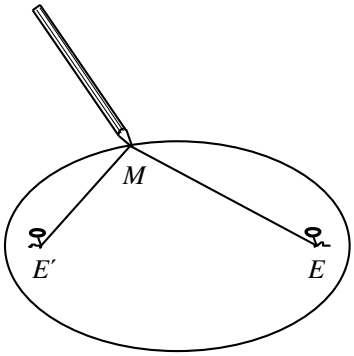
3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα

4) σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

 Σχήμα 1	 Σχήμα 2

νέο φροντιστήριο

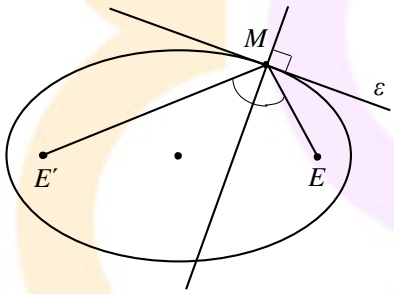
ΛΥΣΗ

α) Το μήκος του σχοινιού εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες. Συνεπώς το άθροισμα αυτό είναι 10 μονάδες μήκους, που είναι και το μήκος του μεγάλου άξονα. Είναι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\gamma = 3$, οπότε $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$. Συνεπώς το μήκος του μικρού άξονα είναι 8 μονάδες μήκους.

β) Η έλλειψη έχει εστίες στον άξονα xx' και η εξίσωσή της είναι $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

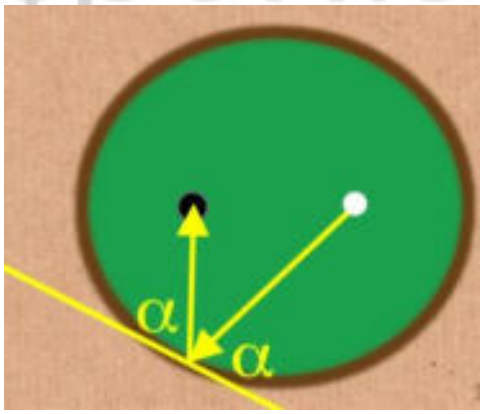
Η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{5}$.

γ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι : Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E, E' οι εστίες της έλλειψης (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).



Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ένα ηχητικό κύμα ή μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινούν από τη μία εστία μιας έλλειψης, ανακλώμενα σε αυτήν, διέρχονται από την άλλη εστία. Συνεπώς σε οποιοδήποτε σημείο της C και αν σημαδέψει θα πετύχει το στόχο του, εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα, αφού τότε η μπάλα θα πέσει στην τρύπα χωρίς να χτυπήσει πρώτα στο περίγραμμα του μπιλιάρδου.

Σωστή απάντηση η 4).



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(Μονάδες 07)

β) Αν K είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ζ), να βρείτε την εξίσωση (c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο K και διέρχονται από τα σημεία A και B, συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1,\ \lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος β), τότε:

i. Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε οτι η ευθεία $(\varepsilon): x+\lambda y-1=0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c) στο σημείο $A(1,0)$.

(Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$, δηλαδή το $M(2,0)$. Επιπλέον, το ευθύγραμμο τμήμα AB βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x. Επομένως, η μεσοκάθετη ευθεία του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι η κατακόρυφη ευθεία (ζ) που διέρχεται από το σημείο M και έχει εξίσωση $x = 2$.

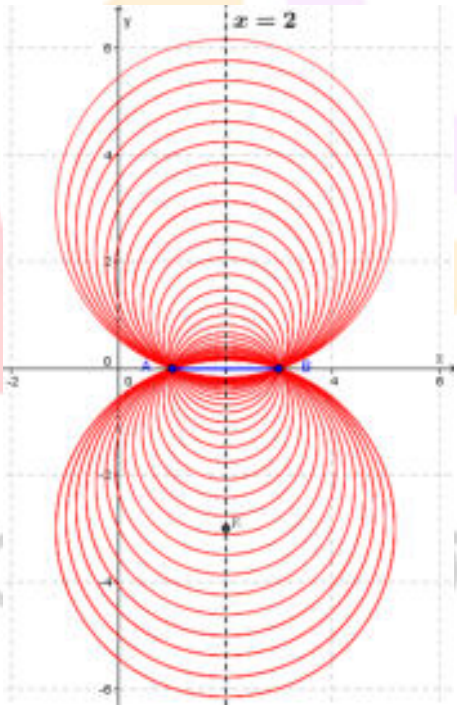
β) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ είναι η $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

Αφού το σημείο K ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x = 2$, τότε θα είναι της μορφής $K(2, \lambda)$, με $\lambda \epsilon \mathbb{R}$. Το κέντρο των κύκλων λοιπόν είναι το σημείο $K(2, \lambda)$.

Αφού οι κύκλοι διέρχονται από τα σημεία A και B, τότε η ακτίνα τους είναι:

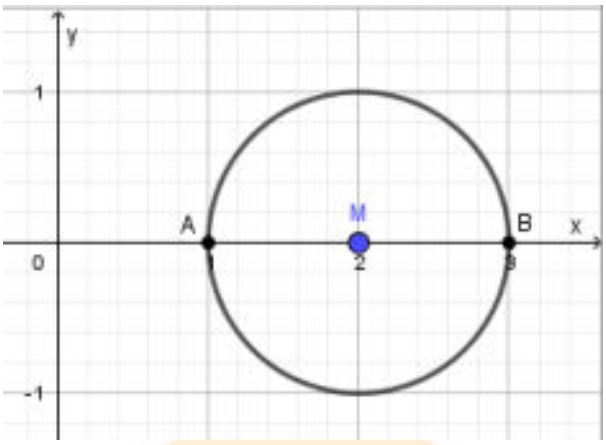
$$\rho = (KB) = (KA) = \sqrt{(2-1)^2 + (\lambda - 0)^2} = \sqrt{1 + \lambda^2}.$$

Επομένως, η εξίσωσή τους είναι η $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (1).



γ)

i. Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το μέσον $M(2,0)$ της διαμέτρου AB, επομένως το $\lambda = 0$. Έτσι η εξίσωσή του είναι η $(x-2)^2 + y^2 = 1$.



ii. Το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στην ευθεία (ε) και σε όλους τους κύκλους.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $d(K,\varepsilon) = \rho$. Πραγματικά είναι

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|1\cdot 2 + \lambda\cdot\lambda - 1|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{|1+\lambda^2|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{(1+\lambda^2)\sqrt{1+\lambda^2}}{(1+\lambda^2)} = \sqrt{1+\lambda^2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(α, 0) και Β(0, β) με α, β > 0 και α + β =10 .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ, για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την ΑΒ, για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή Ο των αξόνων και ένα σημείο Ρ του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ για τις διάφορες τιμές των α και β. (Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το κέντρο των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ, είναι το μέσο της Μ, επομένως

$$M\left(\frac{\alpha+0}{2},\frac{\beta+0}{2}\right) \text{ ή } M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$$

και η ακτίνα τους είναι

$$\rho=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(0-\alpha)^2+(\beta-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}.$$

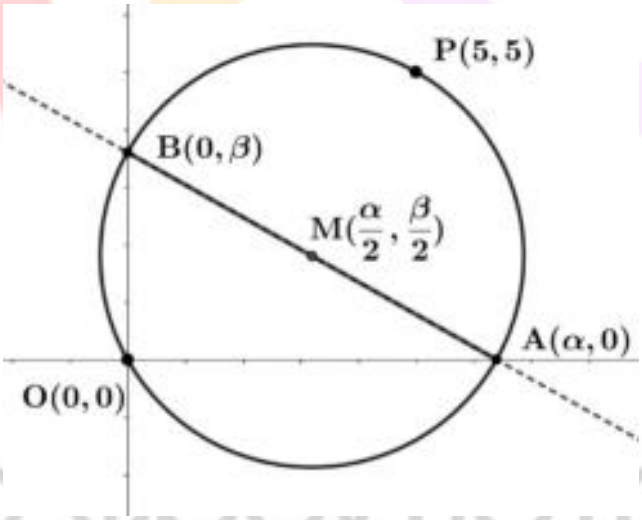
επομένως η εξίσωση των κύκλων είναι:

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2-2\cdot x\cdot\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{4}+y^2-2y\frac{\beta}{2}+\frac{\beta^2}{4}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-\alpha x-\beta y+\cancel{\frac{\alpha^2}{4}}+\cancel{\frac{\beta^2}{4}}=\cancel{\frac{\alpha^2}{4}}+\cancel{\frac{\beta^2}{4}} \Leftrightarrow x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0. \quad (1)$$

Είναι όμως $\alpha+\beta=10$, τότε $\beta=10-\alpha$ και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2+y^2-\alpha x-(10-\alpha)y=0.$$



β) Για α = 1 έχουμε τον κύκλο C_1 : $x^2+y^2-x-9y=0$. (1)

Για α = 9 έχουμε τον κύκλο C_2: $x^2+y^2-9x-y=0$. (2)

Θα βρούμε τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω κύκλων, αν υπάρχουν.

Η αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις των παραπάνω κύκλων έχουμε:

$$8x-8y=0 \Rightarrow x=y$$

τότε από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$x^2 + x^2 - 9x - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 5$$

Για x = 0 έχουμε y = 0 και για x = 5 έχουμε y = 5, άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Ο (0,0) και Ρ(5,5).

Όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το σημείο Ρ(5,5) αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση των κύκλων $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$.
Πράγματι αντικαθιστώντας τις τιμές $x = 5$ και $y = 5$ έχουμε:

$$0^2 + 0^2 - \alpha \cdot 0 - (10 - \alpha) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Ομοίως, όλοι οι κύκλοι διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

γ) Έστω τυχαίο σημείο Μ(x, y) είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν

$$\left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\alpha}{2} \\ y = \dfrac{\beta}{2} \\ \alpha + \beta = 10,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = 2x \\ \beta = 2y \\ \alpha + \beta = 10,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2x + 2y = 10 \Leftrightarrow x + y = 5\ .\ (\varepsilon)$$

Η παραπάνω ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (5,0) και (0,5). Επειδή α, β > 0 έχουμε:

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$\beta > 0 \Leftrightarrow y > 0.$$

Συνεπώς ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που ορίζεται από την ευθεία $x + y = 5$ με x > 0 και y > 0 εκτός από τα άκρα του Α(5,0) και Β(0,5).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $C: x^2=4y$ και η ευθεία $\varepsilon: y=x-2$.

α) Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ε. (Μονάδες 8)

γ) Αν Mx,y) είναι σημείο της παραβολής , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από την ευθεία ε είναι $d(M,\varepsilon) = \dfrac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}}$

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία ε καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία . (Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

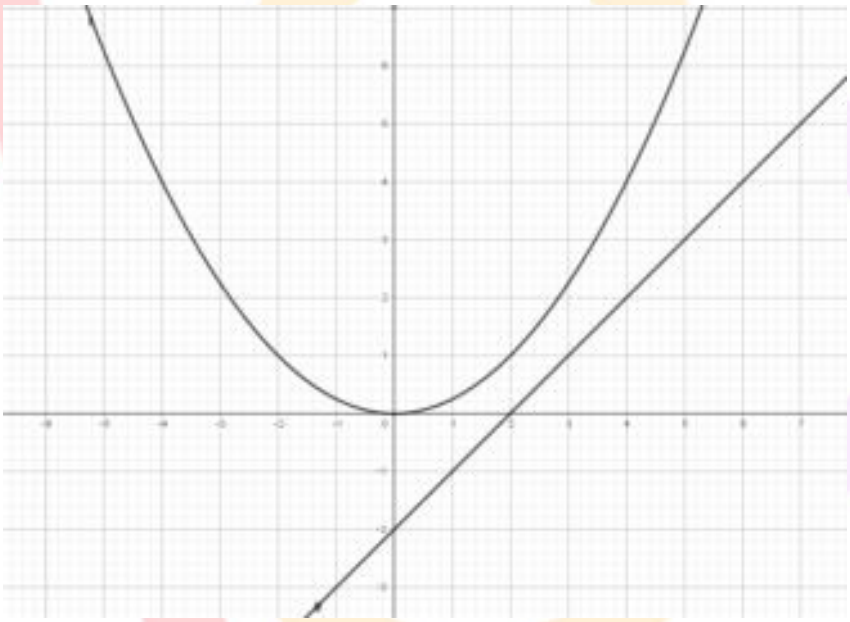
ΛΥΣΗ

α) Η παράμετρος της παραβολής είναι p=2, άρα η εστία είναι το $E(0,\frac{p}{2}) = (0,1)$ και η εξίσωση της διευθετούσας δ: y= -1

β) Τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} x^2=4y \\ y=x-2 \end{cases}$$

Άρα $x^2=4(x-2)$ άρα $x^2-4x+8=0$ η οποία είναι αδύνατη εφόσον Δ<0 . Άρα η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία.



γ)

i. Έστω σημείο M(x,y) σημείο της παραβολής , οπότε $M(x,\frac{1}{4}x^2)$. Η απόστασή του από την ευθεία ε: x-y-2=0 είναι $d(M,\varepsilon) = \frac{|x-\frac{1}{4}x^2-2|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{1}{4}x^2-x+2|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}}$, διότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $\frac{1}{4}x^2-x+2$ είναι $\Delta=1-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 2 = -1<0$ και άρα $\frac{1}{4}x^2-x+2>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ii. $d(M,\varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Η απόσταση του M από την ευθεία γίνεται ελάχιστη όταν $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-1=0 \Leftrightarrow x=2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Άρα η ελάχιστη απόσταση $d(M,\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ όταν x=2. Επομένως το ζητούμενο σημείο της παραβολής που απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε είναι το M(2,1).

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης Ε(γ,0), ενώ η άλλη εστία είναι στο Ε΄(-γ,0). Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

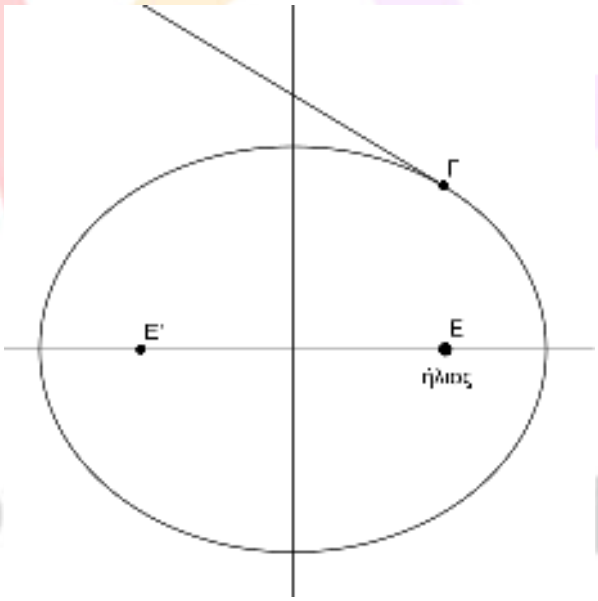
α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 09)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

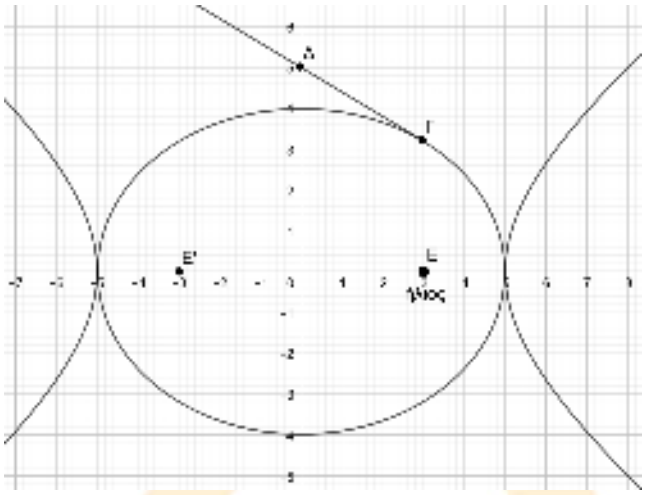
i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο Γ$\left(3,\frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Οy. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο Δ(0,5). (Μονάδες 09)

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ με x > 0. Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

(Μονάδες 07)



ΛΥΣΗ



α) Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι 2α, οπότε 2α =10, άρα α = 5.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ε = $\frac{\gamma}{\alpha}$, οπότε $\frac{\gamma}{\alpha} = 0,6$ ή $\frac{\gamma}{5} = 0,6$ ή γ = 3.

Όμως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.

Η εξίσωση της έλλειψης δίνεται από τον τύπο $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, άρα $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

β)

i. Η εφαπτομένη της έλλειψης σε σημείο (x_1, y_1) δίνεται από τον τύπο $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$.

Εφόσον το σημείο επαφής είναι το $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$ η εξίσωση της εφαπτομένης θα γίνει

$\frac{x3}{25} + \frac{y\frac{16}{5}}{16} = 1$ ή $\frac{3x}{25} + \frac{y}{5} = 1$. Για να διέρχεται από το σημείο Δ(0,5) θα πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου να την επαληθεύουν. Πράγματι $\frac{3 \cdot 0}{25} + \frac{5}{5} = 1$ ή 1 = 1 που σημαίνει ότι η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Δ.

ii. Σημεία συνάντησης των τροχιών είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους εφόσον υπάρχουν. Οι εξισώσεις είναι $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Προσθέτοντας κατά μέλη $2\frac{x^2}{25} = 2$ ή $x^2 = 25$ ή x = 5 επειδή x > 0. Η $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ για x = 5 μας δίνει

$\frac{5^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ή $1 + \frac{y^2}{16} = 1$ ή $\frac{y^2}{16} = 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ή y = 0. Σημείο συνάντησης είναι το (5,0).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x,y), A(-1,0), B(1,0) για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 9|\overrightarrow{AB}|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 8$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $ΓΔ^2 = 32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία. (Μονάδες 08)

ii. Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{MΓ} \cdot \overrightarrow{MΔ}$ (Μονάδες 07)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) $\vec{AM}=(x_M-x_A,y_M-y_A)=(x-(-1),y-0)=(x+1,y)$. $\left|\vec{AM}\right|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\vec{BM}=(x_M-x_B,y_M-y_B)=(x-1,y-0)=(x-1,y)$. $\left|\vec{BM}\right|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(0-0)^2}=\sqrt{2^2+0}=2$.

$\vec{AM}^2+\vec{BM}^2=9\left|\vec{AB}\right|$, άρα $\left|\vec{AM}\right|^2+\left|\vec{BM}\right|^2=9\cdot 2$ ή $\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2=18$ ή

$x^2+2x+1+y^2+x^2-2x+1+y^2=18$ ή $2x^2+2y^2+2=18$ ή $x^2+y^2=8$

β)

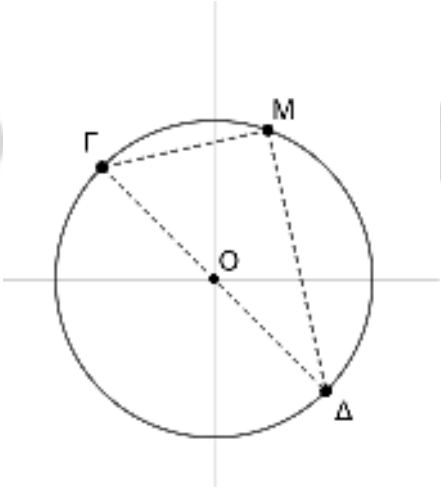
i. Για τα σημεία Γ και Δ του κύκλου ισχύει $\Gamma\Delta^2=32$

δηλαδή ΓΔ = $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$.

Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+y^2=8$, οπότε η ακτίνα του ρ είναι ρ = $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ και το κέντρο του το Ο(0,0).

Παρατηρούμε ότι ΓΔ = 2ρ, οπότε τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά και επομένως η διάμετρος ΓΔ θα διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.

ii. Αφού η ΓΔ είναι διάμετρος και το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου, τότε η γωνία $\Gamma\widehat{M}\Delta=90^\circ$ γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Επειδή τα διανύσματα $\vec{M\Gamma}$ και $\vec{M\Delta}$ είναι κάθετα, το εσωτερικό τους γινόμενο θα ισούται με μηδέν.



ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$ και το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ με $\lambda \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$ (Μονάδες 08)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$.

i. Να υπολογίσετε το λ. (Μονάδες 08)

ii. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $A(2, \frac{3}{2})$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 09)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το διάνυσμα της διαμέσου $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=\dfrac{(\lambda,\lambda+1)+(3\lambda,\lambda-1)}{2}=$

$=\dfrac{(\lambda+3\lambda,\lambda+1+\lambda-1)}{2}=\dfrac{(4\lambda,2\lambda)}{2}=(2\lambda,\lambda)$.

β)

i. Αφού $B\hat{A}\Gamma=90^{o}$ θα είναι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$ ή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$ ή $(\lambda,\lambda+1)\cdot(3\lambda,\lambda-1)=0$

ή $3\lambda^2+(\lambda-1)(\lambda+1)=0$ ή $3\lambda^2+\lambda^2-1=0$ ή $4\lambda^2=1$ ή $\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$.

ii. Ο ζητούμενος κύκλος διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου Α,Β,Γ. Επειδή όμως η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma=90^{o}$ η απέναντί πλευρά ΒΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου. Το κέντρο του θα βρίσκεται στο μέσο Μ(x,y) της διαμέτρου ΒΓ.

Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)=\left(2\cdot\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ και $A\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$.

Όμως $\overrightarrow{AM}=(x_M-x_A,y_M-y_A)$ ή $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=\left(x_M-2,y_M-\dfrac{3}{2}\right)$ ή $\begin{cases}x_M-2=1\\ y_M-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

ή $\begin{cases}x_M=3\\ y_M=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=2\end{cases}$. Επομένως το κέντρο Μ είναι το (3,2).

Η ακτίνα θα είναι η απόσταση (ΑΜ)=$\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=$

$\sqrt{(3-2)^2+\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο (x_o,y_o) και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$. Για κέντρο το (3,2) και ακτίνα $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ έχουμε

$(x-3)^2+(y-2)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ ή $(x-3)^2+(y-2)^2=\dfrac{5}{4}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση $3x + 4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το O(0,0) και ακτίνα 2.

α)

i. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;

(Μονάδες 04)

ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (Μονάδες 05)

iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή;

(Μονάδες 08)

β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (Μονάδες 08)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Ο κύκλος έχει κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 2. Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το Ο(0,0) είναι της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$. Επομένως η εξίσωση γίνεται $x^2 + y^2 = 4$.

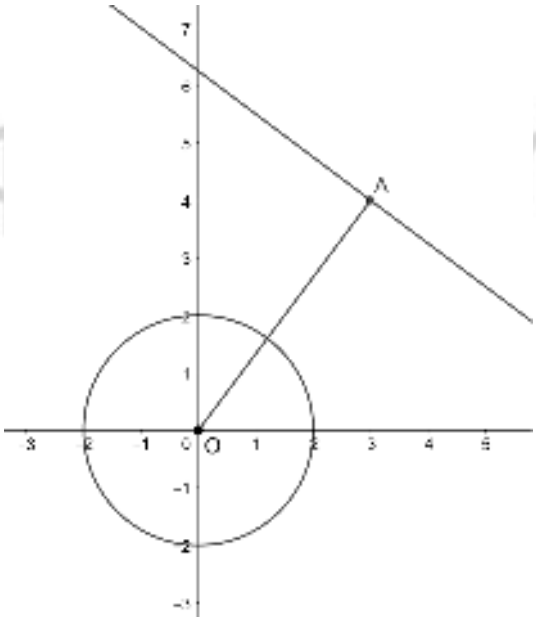
ii. Για να διέρχεται ο αγωγός από το κέντρο Ο θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση 3x+4y = 25, δηλαδή $3\cdot 0+4\cdot 0=0$, που δεν είναι ίσο με 25. Επομένως, ο αγωγός δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού.

iii. Για να έχουμε την ελάχιστη δυνατή απόσταση θα πρέπει να φέρουμε την κάθετη ΟΑ από το κέντρο Ο προς την ευθεία του αγωγού. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας του αγωγού είναι $\lambda_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{4}$. Για να είναι η ΑΟ κάθετη στον αγωγό πρέπει $\lambda_1\lambda_{AO} = -1$ ή $-\frac{3}{4}\lambda_{AO} = -1$ ή $\lambda_{AO} = \frac{4}{3}$. Η εξίσωση της ΑΟ θα είναι:

$y - y_O = \lambda_{AO}(x - x_O)$ ή $y - 0 = \frac{4}{3}(x - 0)$ ή $y = \frac{4}{3}x$. Το σημείο Α είναι το σημείο τομής της ΑΟ και της ευθείας του αγωγού. Για να βρεθεί λύνουμε το σύστημά τους.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 & (1) \\ y = \frac{4}{3}x & (2) \end{cases}$$

Η (1) γίνεται $3x + 4\frac{4}{3}x = 25$ ή 9x + 16x = 75 ή 25x = 75, δηλαδή x = 3. Η (2) γίνεται $y = \frac{4}{3}3 = 4$. Επομένως το σημείο Α είναι το (3,4).



β) Για να εφάπτεται ο δρόμος του κυκλικού σιντριβανιού πρέπει η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία του δρόμου να ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή d(O,ε) = ρ.

d(O,ρ) = $\frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|\lambda \cdot 0 + 0 + \lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 2$ ή $\frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 2$ ή $|\lambda - 2| = 2\sqrt{\lambda^2+1}$

$|\lambda - 2|^2 = \left(2\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2$ ή $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 4\left(\lambda^2+1\right)$ ή $3\lambda^2 + 4\lambda = 0$ ή λ(3λ+4) = 0.

Έχουμε λ = 0 που απορρίπτεται λόγω της υπόθεσης (λ ≠ 0) ή λ = - $\frac{4}{3}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Για $\lambda = 1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. (Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in R$, για την οποία:

$A = \lambda$, $B = \lambda$ και $\Gamma = \lambda - 1$, οπότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + \lambda^2 - 4(\lambda - 1) = 2\lambda^2 - 4\lambda + 4 =$

$2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) > 0$ για κάθε $\lambda \in R$, εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = -4 < 0$.

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$.

β) Το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων που ορίζονται από την (1), συναρτήσει του $\lambda \in R$

είναι το $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2})$ και η

$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$ αντίστοιχα.

Για να εφάπτεται ο κύκλος που ορίζεται από την (1), της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$, θα πρέπει $d(K, \varepsilon) = \rho$ (2).

Είναι: $d(K, \varepsilon) = \frac{|-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-\lambda + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2 - \lambda|}{\sqrt{2}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \Leftrightarrow |2 - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$|2 - \lambda|^2 = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}^{\,2} \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Leftrightarrow$

$2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$ η λύση, που επαληθεύει την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτή.

Για $\lambda = 1$, το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου στην ε είναι το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

και ακτίνα η $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Για $\lambda = 1$, από την εξίσωση (1) παίρνουμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 + x + y = 0$, που λόγω

του ερωτήματος (β) έχει κέντρο το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ διέρχονται οι ευθείες ζ: $y - y_M = \kappa(x - x_M)$ με $\kappa \in R$ ή

ζ: $y + \frac{1}{2} = \kappa(x + \frac{3}{2})$ ή ζ: $2\kappa x - 2y + 3\kappa - 1 = 0$ με $\kappa \in R$.

Η ευθεία ζ εφάπτεται του κύκλου C $\Leftrightarrow d(K, \zeta) = \rho \Leftrightarrow d(K, \zeta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3).

Όμως d(K, ζ) = $\frac{|2\kappa(-\frac{1}{2})-2(-\frac{1}{2})+3\kappa-1|}{\sqrt{(2\kappa)^2+(-2)^2}}$ = $\frac{|-\kappa+1+3\kappa-1|}{\sqrt{2}}$ = $\frac{|2\kappa|}{\sqrt{4\kappa^2+4}}$ = $\frac{2|\kappa|}{2\sqrt{\kappa^2+1}}$ = $\frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$\frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\kappa^2 = \kappa^2 + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 = 1 \Leftrightarrow \kappa = -1$ ή $\kappa = 1$ οι λύσεις, που επαληθεύουν την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτές.

Για κ = 1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η $ζ_1$: 2x – 2y +2 = 0 ή $ζ_1$: x – y +1 = 0.

Για κ = -1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η $ζ_2$: -2x – 2y - 4 = 0

ή $ζ_2$: x + y +2 = 0. Οι $ζ_1$, $ζ_2$ είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου C από το σημείο Μ. Παρατηρούμε ότι η $ζ_2$ είναι η ευθεία ε που δόθηκε στο ερώτημα (β), κάτι που ήταν αναμενόμενο εφόσον το σημείο Μ ανήκει στην ε (οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x'x και y'y.

ii. Των εστιών Ε και Ε' της έλλειψης.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

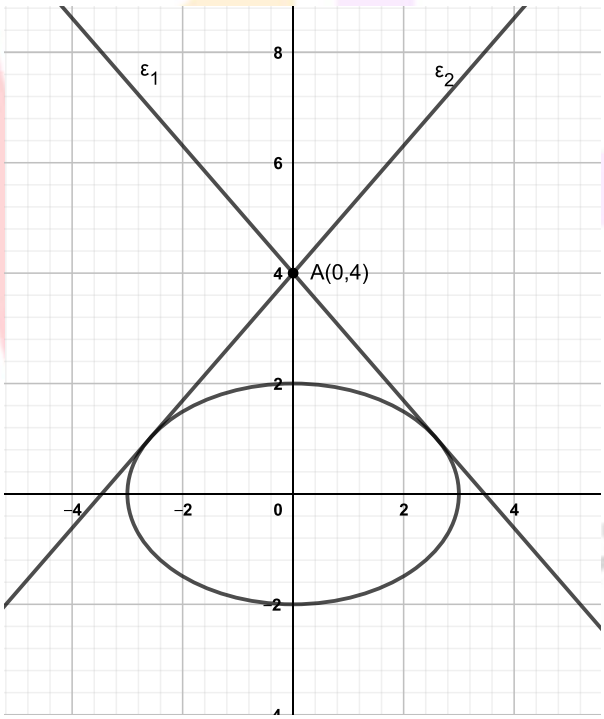
α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$.

i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα x'x θέτουμε στην εξίσωση (1) y=0. Έτσι έχουμε $\frac{\chi^2}{9} = 1$ ή $x^2 = 9$, οπότε x =3 ή x= -3. Τα σημεία τομής με τον άξονα x'x είναι τα σημεία A(3,0) και A'(-3,0).

Αντίστοιχα, για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα y'y θέτουμε στην εξίσωση (1) x=0. Έτσι έχουμε $\frac{y^2}{4} = 1$ ή $y^2 = 4$, οπότε y =2 ή y= -2. Τα σημεία τομής με τον άξονα y'y είναι τα σημεία B(0,2) και B'(0,-2).

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οπότε οι εστίες έχουν συντεταγμένες E(γ, 0) , και E'(-γ, 0), όπου γ = $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{5}$. Άρα οι εστίες της E, και E' έχουν συντεταγμένες E($\sqrt{5}$, 0) και E'(-$\sqrt{5}$, 0).

β)



Το σημείο A(0, 4) είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης, αφού είναι σημείο στον άξονα y'y και η έλλειψη που μας δόθηκε τέμνει τον άξονα y'y στα σημεία B(0, 2) και B'(0,-2). Θεωρούμε M(x_1, y_1) το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο M θα είναι της μορφής ε: $\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\,xx_1 + 9\,yy_1 = 36$. Η ευθεία ε διέρχεται από το

σημείο Α(0 , 4), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $4\cdot 0\ x_1 + 9\cdot 4y_1 = 36 \Leftrightarrow y_1 = 1$ (2).

Επιπλέον το σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της έλλειψης, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση(1). Άρα ισχύει $\frac{{x_1}^2}{9} + \frac{{y_1}^2}{4} = 1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει

$$\frac{{x_1}^2}{9} + \frac{1^2}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{{x_1}^2}{9} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Για $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και λόγω της (2) έχουμε $y_1 = 1$, έχουμε την εφαπτόμενη ε με εξίσωση

$$\varepsilon: \ 4\frac{3\sqrt{3}}{2}x + 9\ y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Για $x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 1$, οπότε η εφαπτόμενη ε έχει εξίσωση

$$\varepsilon: \ 4\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x + 9\ y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο Α(0, 4) είναι οι ε_1 :

$$2\sqrt{3}\,x + 3y = 12 \text{ και } \varepsilon_2 : -2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση y^2 = 4x (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της Ε και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ.

(Μονάδες 12)

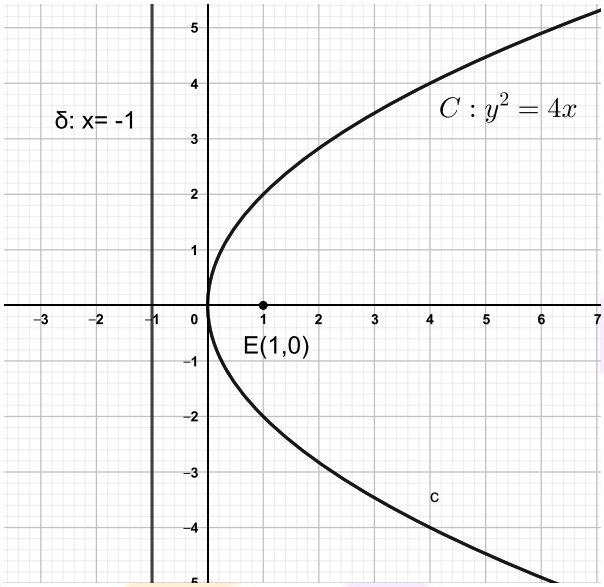
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

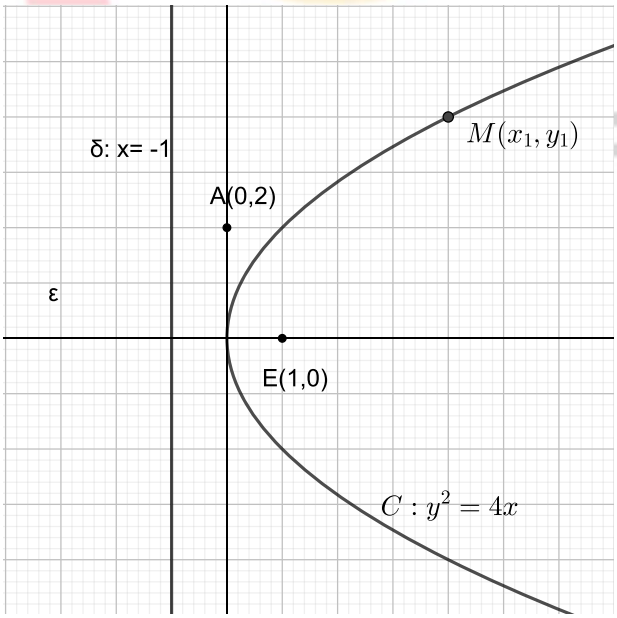
Η εξίσωση (1) της παραβολής είναι της μορφής y^2 = 2px, όπου 2p= 4, άρα p=2. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε παραβολή με εστία στον άξονα x'x.

α)



Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια παραβολή. Η εστία Ε της παραβολής (C) έχει συντεταγμένες Ε($\frac{p}{2}$, 0) και η διευθετούσα της δ έχει εξίσωση x = - $\frac{p}{2}$. Επειδή p =2 η εστία έχει συντεταγμένες Ε(1, 0) και η διευθετούσα δ έχει εξίσωση δ : x = -1.

β)



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

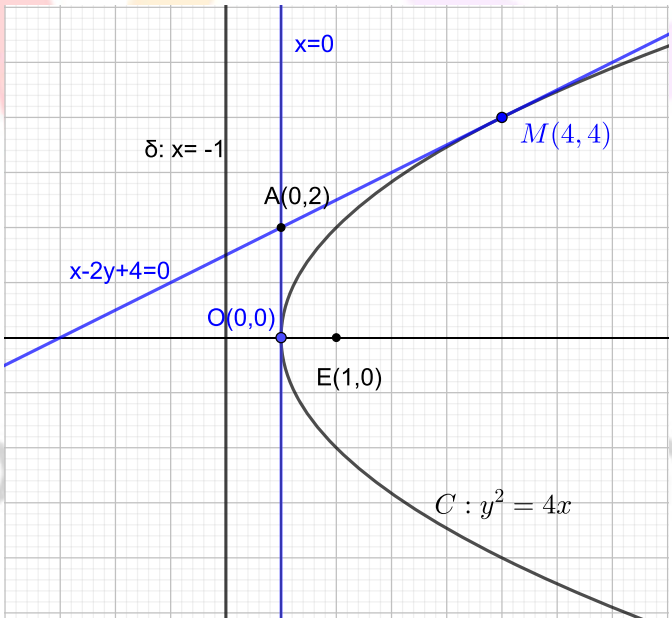
Το σημείο Α(0, 2) είναι εξωτερικό σημείο της παραβολής, αφού είναι σημείο στον άξονα y'y και η παραβολή που μας δόθηκε έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα x'x και μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα y'y την κορυφή της Ο(0, 0). Θεωρούμε $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο Μ θα είναι της μορφής $y\, y_1 = p\,(x + x_1)$, και επειδή p =2 η εφαπτόμενη θα είναι ε: $y\, y_1 = 2\,(x + x_1)$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(0 , 2), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $2\, y_1 = 2(0 + x_1) \Leftrightarrow y_1 = x_1$ (2).

Επιπλέον το σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση (1). Άρα $y_1^2 = 4 \cdot x_1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει $x_1^2 = 4\, x_1 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ή $x_1 = 4$.

Για $x_1 = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 0$, οπότε η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $0 = 2\,(x + 0) \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή ο άξονας y'y.

Για $x_1 = 4$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 4$, οπότε η εφαπτόμενη έχει εξίσωση ε: $4y = 2\,(x + 4) \Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της παραβολής που διέρχονται από το σημείο Α(0, 2) είναι οι: x = 0 (άξονας y'y) και η ευθεία ε με εξίσωση $x - 2y + 4 = 0$.



ΘΕΜΑ 4

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο(0,0) θεωρούμε τους κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \quad (2)$$

αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

(Μονάδες 08)

γ) Έστω Μ, Ν τυχαία σημεία των κύκλων (Κ, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων Μ και Ν.

(Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + Γ = 0$, με $A = -6$, $B = -8$, $Γ = 21$ και $A^2 + B^2 - 4Γ = 36 + 64 - 84 = 16 > 0$.

Επομένως, το κέντρο Κ του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (3,4)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4Γ}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

Η εξίσωση (2) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + Γ = 0$, με $A = 2$, $B = -2$, $Γ = 1$ και $A^2 + B^2 - 4Γ = 4 + 4 - 4 = 4 > 0$.

Επομένως, το κέντρο Λ του κύκλου είναι

$$Λ\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (-1,1)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$ρ = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4Γ}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

β) Η απόσταση των κέντρων των δύο κύκλων είναι

$$(KΛ) = \sqrt{(x_Λ - x_K)^2 + (y_Λ - y_K)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Επίσης, $R + ρ = 3$.

Αφού $(KΛ) > R + ρ$, συμπεραίνουμε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

γ) Φέρουμε τη διακεντρική ευθεία ΚΛ, η οποία τέμνει τον κύκλο (Κ, R) στα σημεία Ε και Ζ και τον κύκλο (Λ, ρ) στα σημεία Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

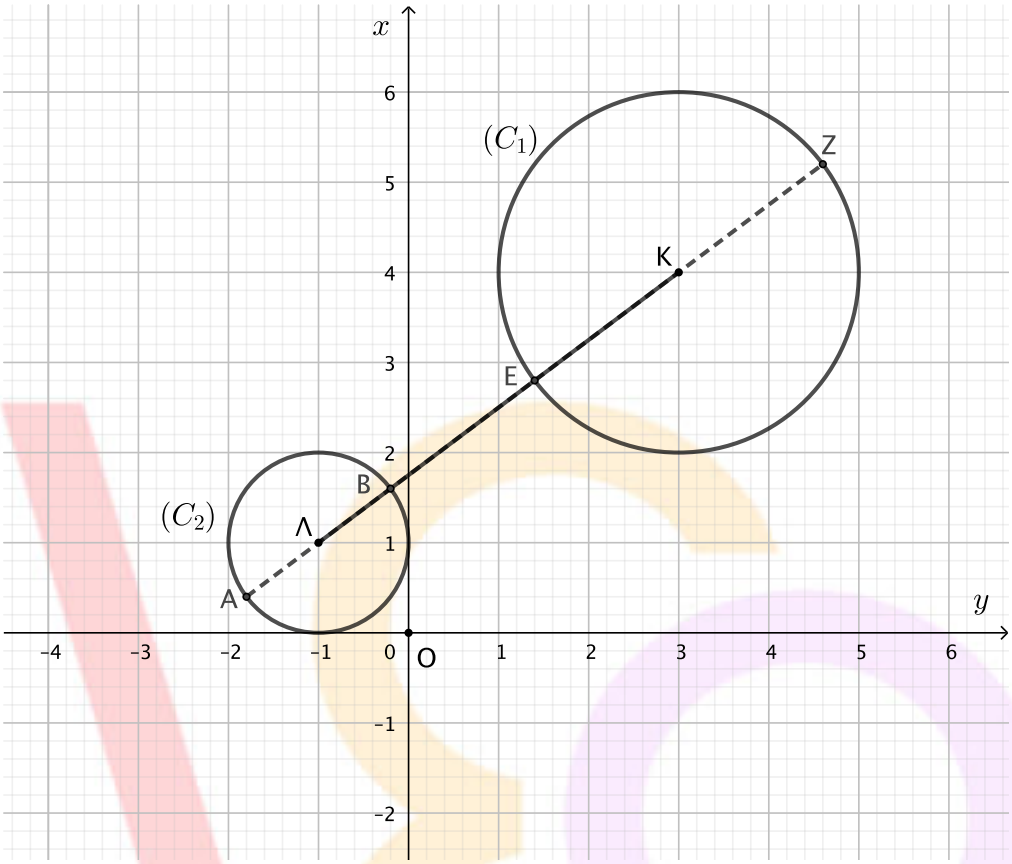
Η ελάχιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΒΕ), οπότε:

$$(BE) = (KΛ) - (EK) - (ΛB) = (KΛ) - R - ρ = 5 - 2 - 1 = 2$$

Η μέγιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΑΖ), οπότε:

$$(AZ) = (KΛ) + (AΛ) + (KZ) = (KΛ) + R + ρ = 5 + 2 + 1 = 8$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



νέο φροντιστήριο

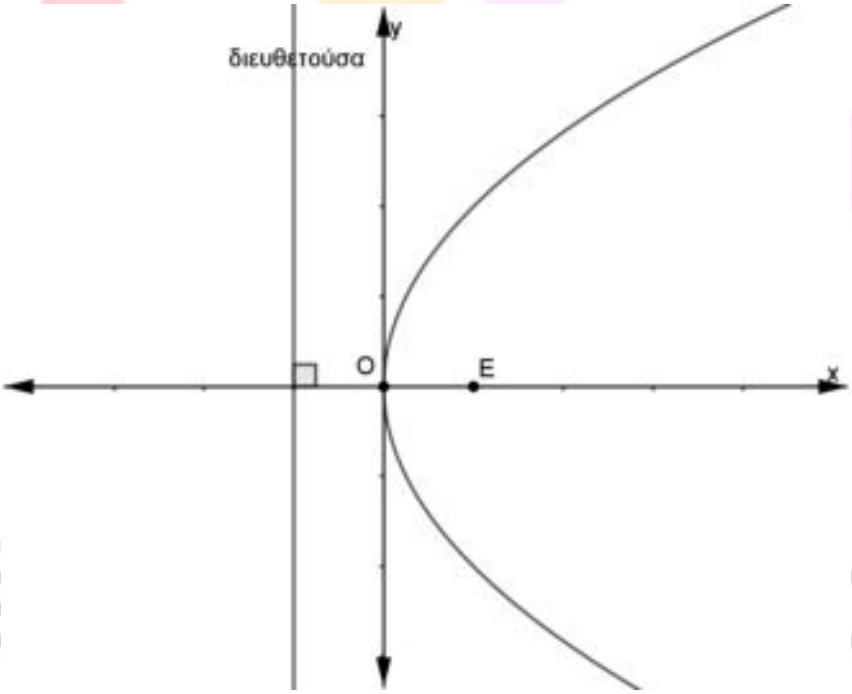
ΘΕΜΑ 4

Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον x'x. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η E(2,0), η διευθετούσα της είναι η δ : x=-2 και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$. Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της A(2,4) είναι η ε: y=x+2 . (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο της A(2,4). (Μονάδες 7)

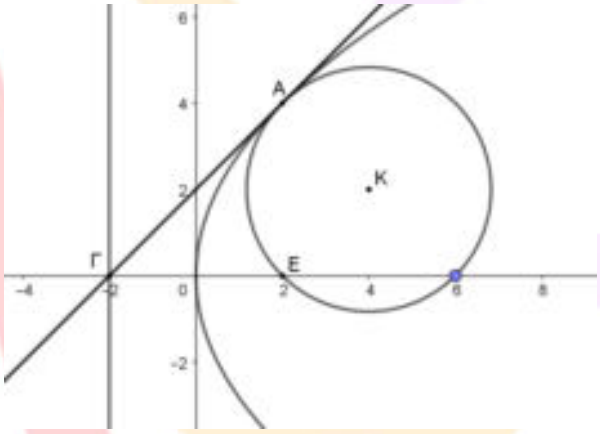


ΛΥΣΗ

α) Αν p η παράμετρος της παραβολής τότε η |p| παριστάνει την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα και εφόσον η εστία της παραβολής μας είναι στο θετικό ημιάξονα x'x είναι p>0, άρα p=4. Οι συντεταγμένες της είναι $E(\frac{p}{2},0)$ άρα E(2,0). Η διευθετούσα της έχει εξίσωση $x= -\frac{p}{2} = -2$ και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=2px$ =8x.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $y_1y=p(x+x_1)$, άρα η εφαπτομένη της παραβολής μας στο σημείο της A(2,4) είναι 4y=4(x+2) ή y=x+2

γ)



Αν K το κέντρο του ζητούμενου κύκλου η ευθεία KA είναι κάθετη στην ευθεία ε, επομένως το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των είναι -1 , και αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι 1 άρα $\lambda_{AK}=-1$. Η ευθεία AK διέρχεται από το σημείο A(2,4) και έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 , επομένως η εξίσωσή της είναι y-4 = -(x-2) ή y = -x+6 . Το κέντρο K του κύκλου ισαπέχει από το σημείο A(2,4) και την εστία E(2,0), άρα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του τμήματος AE. Εφόσον τα σημεία A και E έχουν την ίδια τετμημένη, η ευθεία AE είναι κάθετη στον άξονα x'x, x'x. Το μέσον του τμήματος AE είναι το σημείο (2,2). Έτσι η μεσοκάθετη του τμήματος AE είναι η ευθεία y=2 και επομένως η τεταγμένη του κέντρου K είναι y=2 . Θέτοντας y=2 στην εξίσωση της ευθείας AK έχουμε 2 = - x+6 άρα x=4 . Άρα το κέντρο του

νεο φροντιστηριο

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ζητούμενου κύκλου είναι το Κ(4,2). Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι $\rho=(KE)=\sqrt{((4-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$.

‘Αρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $(x-4)^2+(y-2)^2=8$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Οι κορυφές A , Γ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι τα σημεία $(1,4)$ και $(3,0)$ αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $y-2=\frac{1}{2}(x-2)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $(x-2)^2+(y-2)^2=5$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών B,Δ του τετραγώνου. (Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ 2

α) Το μέσο K του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ έχει συντεταγμένες

$x_K = \frac{x_A+x_\Gamma}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$ και $y_k = \frac{y_A+y_\Gamma}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$ είναι ίσος με $\lambda_1 = \frac{4-0}{1-3} = -2$, κατά συνέπεια η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΓ είναι $y - 2 = \frac{1}{2}(x-2)$.

β) Το κέντρο του κύκλου διαμέτρου $A\Gamma$ είναι το σημείο $K(2,2)$ και η ακτίνα είναι ίση με $\rho = (AK) = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου διαμέτρου ΑΓ είναι $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$.

γ) Οι ζητούμενες κορυφές B, Δ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ ισαπέχουν από τα σημεία Α, Γ και βλέπουν το ΑΓ υπό ορθή γωνία, άρα είναι τα σημεία τομής της μεσοκαθέτου του τμήματος $A\Gamma$ και του κύκλου διαμέτρου $A\Gamma$.

Λύνουμε το σύστημα :

$y - 2 = \frac{1}{2}(x-2)$ (1)

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ (2)

Η εξίσωση (2) με τη βοήθεια της (1) γράφεται

$(x-2)^2 + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 5 \Leftrightarrow 4(x-2)^2 + (x-2)^2 = 20 \Leftrightarrow 5(x-2)^2 = 20 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x-2 = 2$ ή $x-2 = -2 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = 0$.

Για $x = 4$ βρίσκουμε $y = 3$ και για $x = 0$ βρίσκουμε $y = 1$.

Επομένως οι ζητούμενες κορυφές είναι τα σημεία $(4,3)$ και $(0,1)$.

νέο φροντιστήριο