Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Γ Λυκείου

Μαθηματικά Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 3 Ολοκληρωτικός Λογισμός

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3+3x^2-\lambda x+1$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $\mathrm{K}(-1,\lambda+3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1,x_2, με $x_1<-1<x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_P στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x=x_1, x=-1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x=x_2, x=-1$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $P(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $P'(x)=3x^2+6x-\lambda$.Η συνάρτηση $P'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $P''(x)=6x+6$.Το πρόσημο της $P''(x)$ φαίνεται παρακάτω.

x	-∞		-1		+∞
P''(x)		-	0	+	
P(x)		↷		↶	

Παρατηρούμε ότι η $P(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$ και κυρτή στο $[-1,+\infty)$ και έχει εφαπτομένη στο σημείο $(-1,P(-1))$ δεδομένου ότι είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, οπότε παρουσιάζει καμπή στο -1 για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Το σημείο καμπής είναι το $K(-1,P(-1))$, δηλαδή το $K(-1,\lambda+3)$.

β) Η $P'(x)=3x^2+6x-\lambda$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=36+12\lambda$ και $\alpha=3>0$.

Αν $\lambda<-3$ τότε $\Delta<0$ και αφού $\alpha=3>0$ είναι $P'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η $P(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Αν $\lambda=-3$ τότε $\Delta=0$ και αφού $\alpha=3>0$ είναι $P'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ και αφού η $P(x)$ είναι συνεχής στο -1 θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Αν $\lambda>-3$ τότε $\Delta>0$ οπότε η $P'(x)$ έχει δύο ρίζες άνισες τις x_1,x_2 (έστω $x_1<x_2$) και αφού $\alpha=3>0$ το πρόσημο της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	-∞		x_1		x_2		+∞
P´(x)		+	0	-	0	+	
P(x)		↗		↘		↗	

Συνεπώς η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

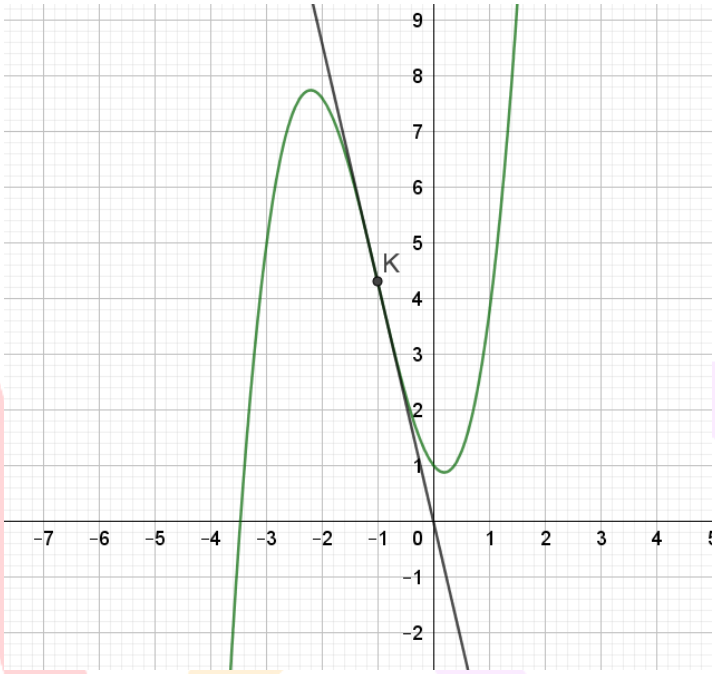
γ)

i. Αφού η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα έχουμε από προηγούμενο ερώτημα ότι $\lambda>-3$.Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y-P(-1)=P'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y-(\lambda+3)=(-3-\lambda)(x+1)\Leftrightarrow y=(-3-\lambda)x$$

η οποία είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει αρνητική κλίση αφού $\lambda > -3 \Leftrightarrow 0 > -\lambda - 3$ και επομένως βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

Παρακάτω δίνουμε ένα ενδεικτικό σχήμα για μια συγκεκριμένη τιμή του λ.



ii. Η (ε) διέρχεται από το σημείο καμπής K και αφού η $P(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$ και κυρτή στο $[-1,+\infty)$, βρίσκεται πάνω από τη C_P στο $(-\infty,-1)$ και κάτω από τη C_P στο $(-1,+\infty)$. Συνεπώς

$$\mathrm{E}_1 = \int_{x_1}^{-1} \left((-3-\lambda)x - (x^3+3x^2-\lambda x+1)\right)dx = \int_{x_1}^{-1} \left(-3x-\lambda x - x^3 - 3x^2 + \lambda x - 1\right)dx =$$

$$\int_{x_1}^{-1} \left(-x^3-3x^2-3x-1\right)dx = \int_{x_1}^{-1} -\left(x^3+3x^2+3x+1\right)dx = \int_{-1}^{x_1} (x+1)^3 dx = \left[\frac{(x+1)^4}{4}\right]_{-1}^{x_1} = \frac{(x_1+1)^4}{4}$$

$$\mathrm{E}_2 = \int_{-1}^{x_2} \left((x^3+3x^2-\lambda x+1) - (-3-\lambda)x\right)dx = \int_{-1}^{x_2} \left(x^3+3x^2-\lambda x+1+3x+\lambda x\right)dx =$$

$$\int_{-1}^{x_2} \left(x^3+3x^2+3x+1\right)dx = \int_{-1}^{x_2} (x+1)^3 dx = \left[\frac{(x+1)^4}{4}\right]_{-1}^{x_2} = \frac{(x_2+1)^4}{4}$$

Οι x_1, x_2 είναι ρίζες της $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - \lambda = 0$ οπότε από το άθροισμα ριζών είναι $x_1 + x_2 = -\frac{6}{3} = -2$. Συνεπώς,

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 \Leftrightarrow \frac{(x_1+1)^4}{4} = \frac{(x_2+1)^4}{4} \overset{x_1 \neq x_2}{\Leftrightarrow} x_1 + 1 = -x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -2 \text{ που ισχύει.}$$

Σημείωση:

Η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha \neq 0$, παρουσιάζει πάντα σημείο καμπής το οποίο είναι και κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης . Επίσης παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα (ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο) αν και μόνο αν $\beta^2>3\alpha\gamma$ και με την προϋπόθεση αυτή, το σημείο καμπής ως κέντρο συμμετρίας είναι το μέσο των σημείων της γραφικής παράσταση της $P(x)$ με τετμημένες τις θέσεις ακροτάτων. Έτσι λόγω συμμετρίας ερμηνεύεται και γραφικά το ότι $E_1=E_2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1)=f'(1)=2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x)dx>1$.

(Μονάδες 6)

ii. $\int_0^1 xf'(x)dx<1$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x$.

Η f είναι κυρτή και επομένως η C_f είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής. Συνεπώς $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ οπότε αφού $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

γ) Αφού $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$ έχουμε :

i. $\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 2xdx = [x^2]_0^1 = 1 - 0 = 1$ οπότε $\int_0^1 f(x)dx > 1$.

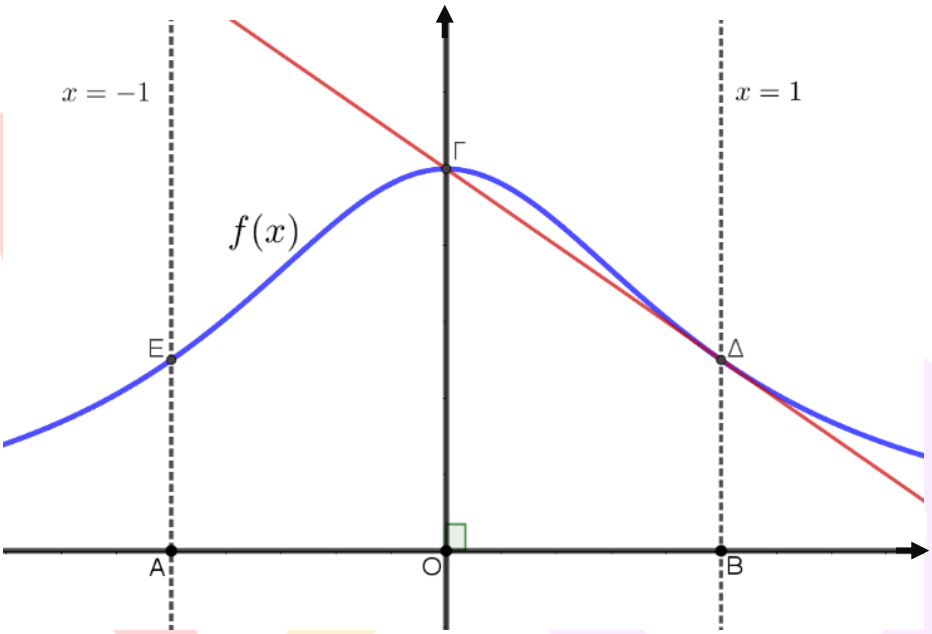
ii. $\int_0^1 xf'(x)dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - 0 - \int_0^1 f(x)dx = 2 - \int_0^1 f(x)dx < 1$ αφού όπως δείξαμε παραπάνω $\int_0^1 f(x)dx > 1$ οπότε $-\int_0^1 f(x)dx < -1$ και τελικά $2 - \int_0^1 f(x)dx < 1$.

Συνεπώς $\int_0^1 xf'(x)dx < 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx > \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αρχικά, θα χρειαστούμε την παράγωγο συνάρτηση:

$f'(x) = \frac{(1)'\cdot(1+x^2)-1\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, οπότε $f'(1) = -\frac{1}{2}$. Η τεταγμένη του σημείου Δ είναι $f(1) = \frac{1}{2}$, οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο Δ έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, ήτοι $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)$, άρα $y = -\frac{1}{2}x + 1$, εξίσωση η οποία επαληθεύεται από το ζεύγος $(x, y) = (0,1)$ δηλαδή από τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(0,1)$, αφού η τεταγμένη του σημείου Γ είναι $f(0) = 1$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $\frac{1}{1+x^2} \geq -\frac{x}{2} + 1$, σχέση που ισοδύναμα γράφεται: $2 \geq -x(1+x^2) + 2(1+x^2) \Leftrightarrow 2 + (x-2)(1+x^2) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 \geq 0$, που ισχύει. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$ και $x = 1$.

γ) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια, αφού για κάθε $x \in R$ είναι και $-x \in R$, ενώ $f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = f(x)$, άρα η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$, αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

Λόγω συμμετρίας μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $I = 2\int_0^1 f(x)dx$.

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι $I = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$.

Έστω $J = \int_{-1}^{0} f(x)dx$. Θέτουμε $u = -x$ με $-du = dx$, οπότε

$J = -\int_1^0 f(-u)du = \int_0^1 f(-u)du = \int_0^1 f(u)du$.

Έτσι, έχουμε $I = 2\int_0^1 f(x)dx$.

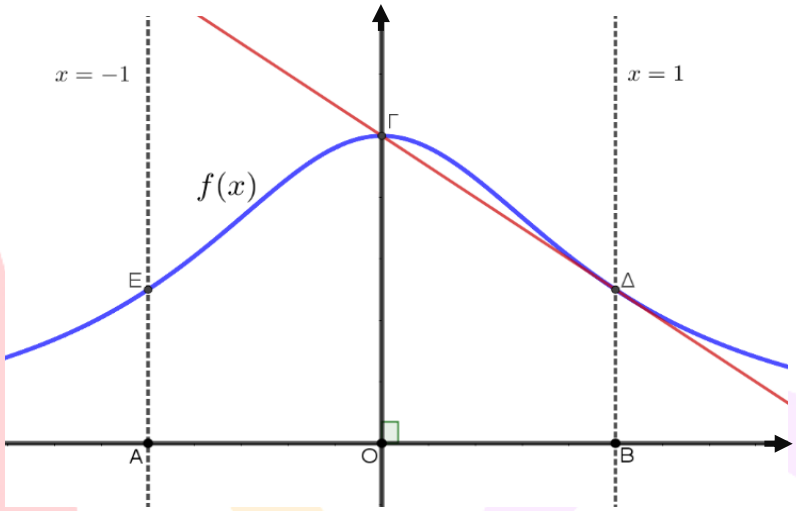
Καθώς οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x) = -\frac{x}{2} + 1$ δεν είναι ίσες στο διάστημα $[0,1]$, αφού π.χ. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5} \neq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, από β) ερώτημα παίρνουμε:

$\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 \left(-\frac{x}{2} + 1\right)dx = \left[-\frac{x^2}{4} + x\right]_0^1 = \frac{3}{4}$.

Άρα $2\int_0^1 f(x)dx > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx > \frac{3}{2}$.

Εναλλακτικά, το $\int_0^1 f(x)dx$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και

$x = 1$, αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τραπεζίου $OB\Delta\Gamma$, για το οποίο ισχύει $(OB\Delta\Gamma) = \frac{(O\Gamma+\Delta B)\cdot OB}{2} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)1}{2} = \frac{3}{4}$.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2\frac{lnx}{x}f(x)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2\cdot lnx\cdot f(x)+xe^x}{x(f(x)+e^x)}dx$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 0$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $g(x) = lnx$, $h(x) = x^2$, $w(x) = e^x$, οπότε $f = w \circ h \circ g$.

Έτσι, $f'(x) = (ln^2x)' \cdot e^{ln^2x} = 2 \cdot lnx \cdot (lnx)' \cdot f(x) = 2\frac{lnx}{x} f(x)$, για κάθε $x > 0$.

β) Έστω $f'(x) > 0 \Leftrightarrow lnx > 0 \Leftrightarrow x > 1$, αφού $x > 0$ και $f(x) > 0$.

Έτσι, παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘	$f(1) = 1$	↗

Ώστε η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$.

Εναλλακτικά, για x>0, έχουμε:

$ln^2x \geq 0 \Leftrightarrow e^{ln^2x} \geq e^0 \Leftrightarrow f(x) \geq 1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1.

γ) Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με x, παίρνουμε:

$$I = \int_1^e \frac{2 \cdot \frac{lnx}{x} f(x) + e^x}{f(x) + e^x} dx = \int_1^e \frac{f'(x) + e^x}{f(x) + e^x} dx = \int_1^e \frac{(f(x) + e^x)'}{f(x) + e^x} dx = [\ln(f(x) + e^x)]_1^e =$$

$$\ln(f(e) + e^e) - \ln(f(1) + e) = ln\left(\frac{e + e^e}{1 + e}\right).$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι $f(x) + e^x > 0$ για κάθε $x > 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=-x+1+\frac{1}{e^x}, x\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ, η οποία είναι μεγαλύτερη του 1.

(Μονάδες 09)

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\rho$ ισούται με $\mathrm{E}(\Omega)=-\frac{(\rho-1)^2}{2}-(\rho-1)+e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 09)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+1+\frac{1}{e^x}+x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

έπεται ότι η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

β) Είναι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\left(-x+1+\frac{1}{e^x}\right)'=(-x)'+(1)'+\left(e^{-x}\right)'=-1+0+e^{-x}(-x)'=-1-e^{-x}.$$

Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι και συνεχής, είναι και γνησίως φθίνουσα.

Για τη συνάρτηση f, έχουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα των συνεχών $y=-x+1$ (πολυωνυμική), $y=e^{-x}$ (εκθετική),
- $f(1)=\frac{1}{e}>0,\ f(2)=-1+\frac{1}{e^2}<-1+\frac{1}{2^2}<0$, οπότε $f(1)\cdot f(2)<0$.

Επομένως, η συνάρτηση f πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1,2]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(1,2)$ ώστε $f(\rho)=0$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα έπεται ότι ο αριθμός ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $\mathbb{R}$. Ακόμη είναι $\rho\in(1,2)$ άρα $\rho>1$.

γ) Το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου Ω ισούται με $\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^{\rho}|f(x)|dx$.

Για κάθε $x\in(-\infty,\rho)$ είναι $x<\rho \underset{\gamma\nu.\ \text{φθίνουσα}}{\overset{f}{\Rightarrow}} f(x)>f(\rho)\Rightarrow f(x)>0$, άρα

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^{\rho}f(x)dx=\int_1^{\rho}\left(-x+1+e^{-x}\right)dx=\left[-\frac{(x-1)^2}{2}-e^{-x}\right]_1^{\rho}=-\frac{(\rho-1)^2}{2}-e^{-\rho}+e^{-1}\ \text{τ.μ.}$$

Όμως ισχύει $f(\rho)=0\Leftrightarrow-\rho+1+\frac{1}{e^{\rho}}=0\Leftrightarrow e^{-\rho}=\rho-1$, οπότε

$$\mathrm{E}(\Omega)=-\frac{(\rho-1)^2}{2}-(\rho-1)+e^{-1}\ \text{τετραγωνικές μονάδες.}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx + e^x, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο Α τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = e + (x_0 - 1)(1 - lnx_0)$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$ παίρνουμε $e^{\alpha} < e^{\beta}$ και $ln\alpha < ln\beta$ καθώς οι συναρτήσεις e^{x} και lnx είναι γνησίως αύξουσες. Έτσι, $e^{\alpha} + ln\alpha < e^{\beta} + ln\beta$, άρα $f(\alpha) < f(\beta)$. Ώστε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Σύμφωνα με το α) ερώτημα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση στο $(0, +\infty)$. Καθώς η f είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, για τιμές $x \in (0,1)$ το αντίστοιχο σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $f\big((0,1)\big) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-\infty, e)$ στο οποίο ανήκει ο αριθμός μηδέν, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = 0$, το οποίο x_0 είναι και μοναδικό λόγω της μονοτονίας της f.

Ώστε η C_f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο $A(x_0, 0)$ τον άξονα $x'x$.

γ) Για κάθε $x \in [x_0, 1]$ έχουμε $f(x_0) \le f(x) \le f(1)$, άρα $0 \le f(x) \le e$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και στο $[x_0, 1]$.

Άρα, $E = \int_{x_0}^{1} f(x)dx = \int_{x_0}^{1} e^{x}dx + \int_{x_0}^{1} lnxdx = [e^{x}]_{x_0}^{1} + \int_{x_0}^{1} (x)'lnxdx =$

$e - e^{x_0} + [xlnx]_{x_0}^{1} - \int_{x_0}^{1} x(lnx)'dx = e - e^{x_0} + 0 - x_0lnx_0 - \int_{x_0}^{1} x\frac{1}{x}dx =$

$e - e^{x_0} - x_0lnx_0 - \int_{x_0}^{1} dx = e + (-e^{x_0}) - x_0lnx_0 - 1 + x_0 =$

$e + lnx_0 - x_0lnx_0 - 1 + x_0 = e + (x_0 - 1) - lnx_0(x_0 - 1)$

$= e + (x_0 - 1)(1 - lnx_0)$.

Χρησιμοποιήσαμε ότι $f(x_0) = 0$, άρα $lnx_0 = -e^{x_0}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x)=(x^2-1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1)=f(-1)=0$.

(Μονάδες 6)

β) $f'(1)\geq 0$ και $f'(-1)\leq 0$.

(Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη.

(Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx\leq 0$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $g(1)=g(-1)=0$ οπότε από τη σχέση $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει και στο 1 και στο -1 ελάχιστο το 0. Η συνάρτηση $g(x)=(x^2-1)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Συνεπώς από το θεώρημα Fermat έχουμε ότι $g'(1)=g'(-1)=0$. Όμως $g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$ οπότε $g'(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$ και $g'(-1)=0\Leftrightarrow f(-1)=0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και στο -1 με $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$

και $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}$.

Για κάθε $x\neq 1$ και κοντά στο 1 έχουμε $\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{g(x)}{(x^2-1)(x-1)}=\dfrac{g(x)}{(x+1)(x-1)^2}\geq 0$

οπότε από τις ιδιότητες ορίου έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}\geq 0$ δηλαδή $f'(1)\geq 0$.

Ομοίως για κάθε $x\neq -1$ και κοντά στο -1 έχουμε

$\dfrac{f(x)}{x+1}=\dfrac{g(x)}{(x^2-1)(x+1)}=\dfrac{g(x)}{(x-1)(x+1)^2}\leq 0$ οπότε από τις ιδιότητες ορίου έχουμε ότι

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}\leq 0$ δηλαδή $f'(-1)\leq 0$.

γ) Αφού $-1<1$ και $f'(-1)\leq 0\leq f'(1)$ συμπεραίνουμε ότι η f' δεν είναι γνησίως φθίνουσα και κατ' επέκταση η f δεν είναι κοίλη.

δ) Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε :

$$\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx=[(x^3-3x)f(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(3x^2-3)f(x)dx=0-0-3\int_{-1}^{1}(x^2-1)f(x)dx\leq 0$$

αφού $(x^2-1)f(x)=g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $\int_{-1}^{1}(x^2-1)f(x)dx\geq 0$ και τελικά

$-3\int_{-1}^{1}(x^2-1)f(x)dx\leq 0$. Συνεπώς $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx\leq 0$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$, $x>-1$ και έστω F αρχική της f με $F(1)=\ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>-1$ ισχύει $f'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.

(Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_o=1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\frac{2F(x)-1}{x}\geq \ln 4-1$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

που είναι το ζητούμενο.

Επειδή $(x+1)^2>0$ για κάθε $x>-1$, το πρόσημο της παραγώγου της $f(x)$ είναι ίδιο με το πρόσημο του x. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

β) Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $F'(x)=f(x)$ και από το ερώτημα (α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε η F είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.

γ) i. Ισχύει $F(1)=\ln 2$ και $F'(1)=f(1)=\ln 2-\frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_o=1$ είναι η:

$$y-\ln 2=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)(x-1)\Leftrightarrow y=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)x-\ln 2+\frac{1}{2}+\ln 2$$

$$\Leftrightarrow y=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{2}.$$

ii. Η F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ οπότε η γραφική της παράσταση είναι από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της και πάνω. Έτσι, για την εφαπτομένη στο $x_o=1$ έχουμε:

$$F(x)\geq\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{2}\Rightarrow 2F(x)\geq(2\ln 2-1)x+1\Rightarrow 2F(x)-1\geq(\ln 4-1)x$$

$$\Rightarrow\frac{2F(x)-1}{x}\geq\ln 4-1.$$

που είναι το ζητούμενο.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{x}-1\right)+x-1,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

(Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_o=\ln 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln\left(e^{x}-1\right)\le 2x-\ln 4$.

(Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}+1=\frac{2e^x-1}{e^x-1}>0$$

αφού για κάθε $x>0$ ισχύει $e^x-1>0$ οπότε $2e^x-1>0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x)=\frac{2e^x(e^x-1)-e^x(2e^x-1)}{(e^x-1)^2}=\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}<0$$

Άρα η f είναι κοίλη.

β) i. Είναι:

$$f(\ln 2)=\ln(2-1)+\ln 2-1=\ln 2-1 \text{ και } f'(\ln 2)=\frac{2\cdot 2-1}{2-1}=3$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_o=\ln 2$ είναι η

$$y-\ln 2+1=3(x-\ln 2)\Rightarrow y=3x-2\ln 2-1$$

ii. Η συνάρτηση είναι κοίλη οπότε η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της C_f είναι από την C_f και πάνω. Άρα,

$$\ln(e^x-1)+x-1\le 3x-2\ln 2-1\Rightarrow \ln(e^x-1)\le 2x-\ln 4$$

που είναι το ζητούμενο.

γ) Είναι:

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^x-1}{1-e^x}dx=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^x-1}{e^x-1}dx=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}f'(x)dx$$

$$=-\left[f(x)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=-f(\ln 3)+f(\ln 2)=-\ln 2-\ln 3+1+\ln 2-1=-\ln 3.$$

νέο φροντιστήριο

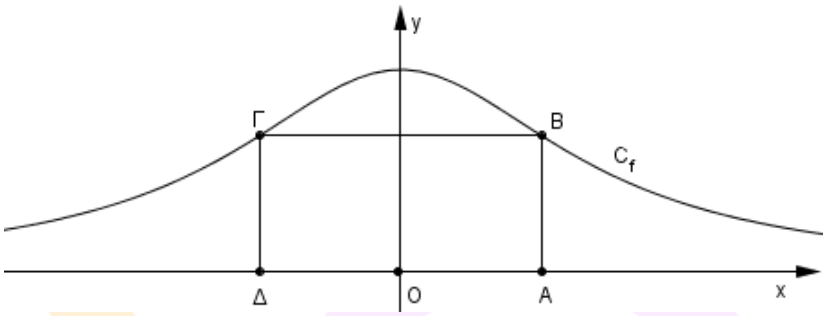
ΘΕΜΑ 4

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $(x^2+1)f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.



β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης α, $\alpha>0$ του σημείου $A(\alpha,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1},\ \alpha>0$$

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1)=\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx=\ln\sqrt{2}$

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$(x^2+1)f'(x)+\frac{2x}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2} \Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'$$

Άρα, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}+c$ και επειδή $f(0)=1$, βρίσκουμε ότι $c=0$, οπότε $f(x)=\frac{1}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

β) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$ και

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=f(x)$$

η συνάρτηση είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Αν $A(\alpha, 0)$, τότε η κορυφή Β είναι το σημείο $B(\alpha, f(\alpha))$ της C_f και οι άλλες κορυφές του ορθογωνίου, λόγω της συμμετρίας που προαναφέραμε, έχουν συντεταγμένες $\Gamma(-\alpha, f(\alpha)), \Delta(-\alpha, 0)$.

γ) Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις με μήκη $(A\Delta)=2\alpha$ και $(AB)=f(\alpha)$, οπότε για το εμβαδόν του $E(\alpha)$ ισχύει

$$E(\alpha)=(A\Delta)(AB)=2\alpha\frac{1}{\alpha^2+1}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}, \alpha>0.$$

Η συνάρτηση του εμβαδού είναι παραγωγίσιμη με

$$E'(\alpha)=\frac{2(\alpha^2+1)-2\alpha\cdot 2\alpha}{(\alpha^2+1)^2}=\frac{2-2\alpha^2}{(\alpha^2+1)^2}=\frac{2(1-\alpha^2)}{(\alpha^2+1)^2}.$$

Το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο του όρου $1-\alpha^2, \alpha>0$ και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μαζί με την μονοτονία της συνάρτησης.

α	0		1		$+\infty$
$E'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$E(\alpha)$		↗		↘	

Από τον πίνακα της μονοτονίας της συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση παίρνει την μέγιστη τιμή της, δηλαδή το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο, όταν $\alpha=1$. Τότε $(AB)=2, (A\Delta)=\frac{1}{2}$ και το μέγιστο εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι ίσο με 1.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

δ) Με την βοήθεια της μεθόδου ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και δεδομένου ότι $F'(x)=f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, έχουμε:

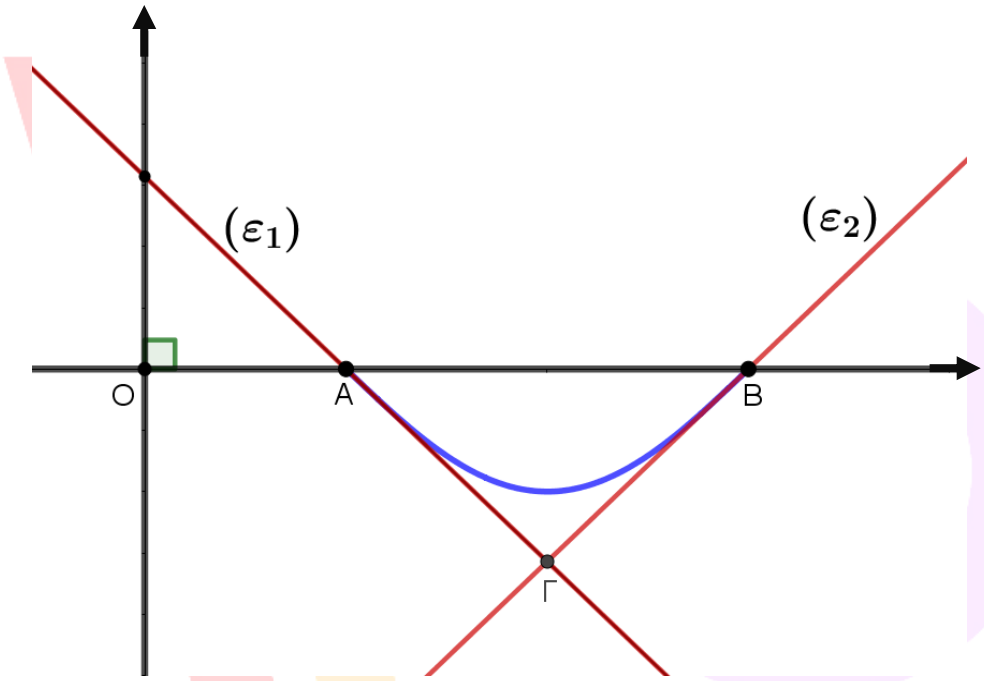
$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x'F(x)dx=[xF(x)]_0^1-\int_0^1 xF'(x)dx=F(1)-\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx=\ln 2-\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = συνx,\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι $(\varepsilon_1)\ y = -x + \frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $f'(x) = -\eta\mu x$, άρα $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ και $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, ενώ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Έτσι, $(\varepsilon_1): y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, άρα $(\varepsilon_1): y = -x + \frac{\pi}{2}$ και ανάλογα

$(\varepsilon_2): y - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$, άρα $(\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2}$.

β) Αρχικά, η τετμημένη του σημείου τομής Γ των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ θα προκύψει από την επίλυση της εξίσωσης $x - \frac{3\pi}{2} = -x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = 2\pi \Leftrightarrow x = \pi$, ενώ η τεταγμένη του είναι

$y = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, έτσι $\Gamma\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Η απόσταση του σημείου Γ από τον άξονα $x'x$, δηλαδή το μήκος του ύψους του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή Γ, είναι $\frac{\pi}{2}$.

Ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.

Καθώς είναι $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ και f συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, έχουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$ και την γραφική παράσταση της f είναι ίσο με $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\sigma\upsilon\nu x)dx = -\left(\eta\mu\frac{3\pi}{2} - \eta\mu\frac{\pi}{2}\right) = -(-1-1) = 2$ τετραγωνικές μονάδες.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}$.

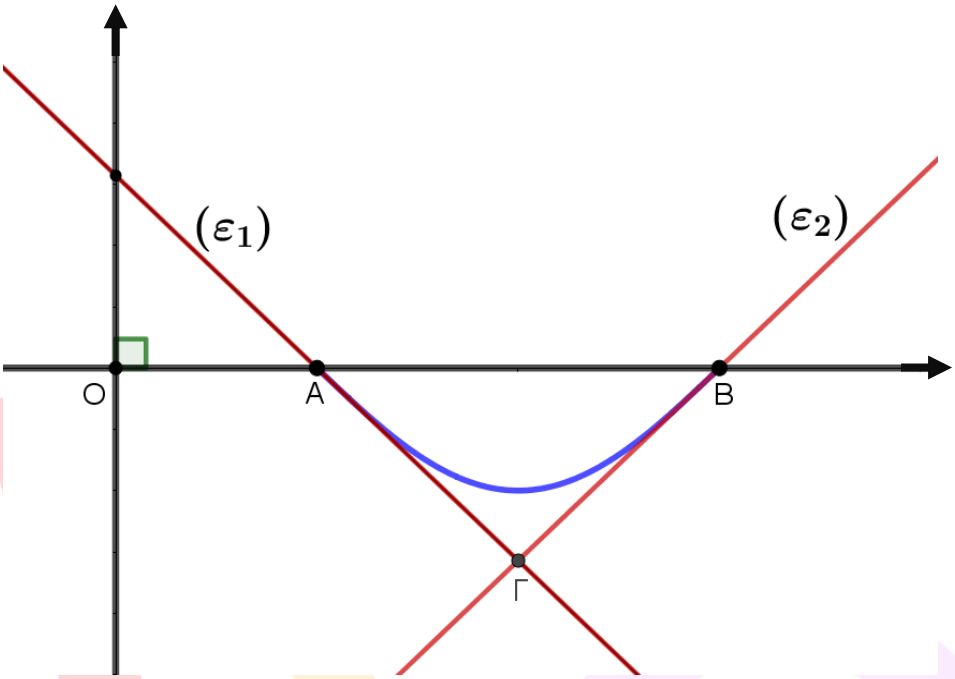
γ) Παρατηρούμε ότι $f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ και καθώς $f'(x)$ συνεχής στο R, άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, άρα η f είναι κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της γραφικής παράστασης με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Επομένως $f(x) > -x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) + x - \frac{\pi}{2} > 0$ για τιμές του x κοντά στο $\frac{\pi}{2}$ από δεξιά, ενώ

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(f(x) + x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, άρα $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}\right) = +\infty$.

νέο φροντιστήριο



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f, να εφάπτεται της $\varepsilon: y=\frac{1}{4}$, στο $x_0=0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1)=1$.

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0)=\frac{1}{4}$ και $f'(0)=0$.

(Μονάδες 06)

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4f(x)-1}{\eta\mu x\cdot f(x)}=0.$

(Μονάδες 07)

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$.

(Μονάδες 06)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f', τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

(Μονάδες 06)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Η γραφική παράσταση της f εφάπτεται της $\varepsilon: y=\frac{1}{4}$ στο $x_0=0$ άρα οι συντεταγμένες του σημείου $(0,f(0))$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε, οπότε $f(0)=\frac{1}{4}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda=0$ ισούται με την παράγωγο στο $x_0=0$, δηλαδή $f'(0)=0$.

ii. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{4f(x)-1}{\eta\mu x\cdot f(x)}=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{1}{4}}{\eta\mu x\cdot f(x)}=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\eta\mu x\cdot f(x)}=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{\eta\mu x\cdot f(x)}{x}}=$$

$$4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{\eta\mu x}{x}\cdot f(x)}\underset{\text{ως παραγωγίσιμη σε αυτό}}{\overset{f\text{ συνεχής στο 0}}{=}}4\cdot\frac{f'(0)}{1\cdot f(0)}=4\cdot\frac{0}{1\cdot\frac{1}{4}}=0.$$

β)

i. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x\in(0,1]$ ισχύει: $x>0\underset{\text{γν. αύξουσα}}{\overset{f'}{\Rightarrow}}f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0$.

Είναι $f'(0)=0$.

Άρα $f'(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$.

ii. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι και συνάρτηση "$1-1$".

$$f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\underset{1-1}{\overset{f}{\Leftrightarrow}}x=0.$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με:

$$\mathrm{E}=\int_0^1|f'(x)|dx\overset{(\beta i)}{=}\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot f'(x)=-x+1$, για κάθε $x\in(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=-x^2+2x$ για κάθε $x\in[0,2]$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$ για κάθε $x\in[0,2]$.

(Μονάδες 6)

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Από τη σχέση $f(x)\cdot f'(x)=-x+1$ στο (0,2) έχουμε

$f(x)\cdot f'(x)=-x+1 \Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=-2x+2 \Leftrightarrow (f^2(x))'=(-x^2+2x)'$ για κάθε $x\in(0,2)$. Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,2], άρα και η f^2 είναι συνεχής στο [0,2], οπότε $f^2(x)=-x^2+2x+c_1$ για κάθε $x\in[0,2]$.

Για $x=1$ έχουμε $f^2(1)=-1^2+2\cdot 1+c_1 \Leftrightarrow 1=1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$.

Συνεπώς $f^2(x)=-x^2+2x$ για κάθε $x\in[0,2]$.

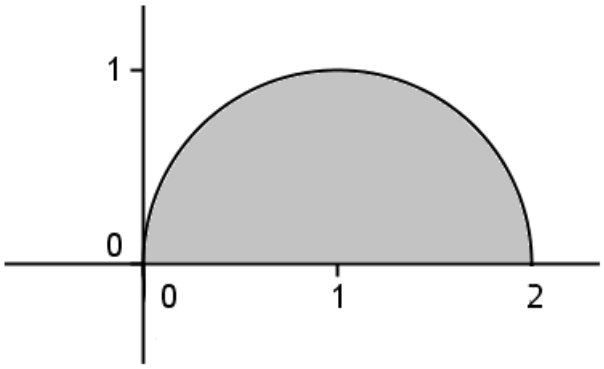
β) Είναι $-x^2+2x\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$ άρα και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$ και αφού η f είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο $(0,2)$. Όμως $f(1)>0$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$ και άρα $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}, x\in(0,2)$.

Επίσης $f^2(0)=-0^2+2\cdot 0=0$ οπότε $f(0)=0$ και $f^2(2)=-2^2+2\cdot 2=0$ οπότε $f(2)=0$. Τελικά $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}, x\in[0,2]$.

γ) Αν θέσουμε $y=f(x)$ με $y\geq 0$ έχουμε

$y=\sqrt{-x^2+2x} \Leftrightarrow y^2=-x^2+2x \Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$

που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία του κύκλου με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα 1 που δεν είναι κάτω από το χχ΄, δηλαδή το ημικύκλιο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



δ) Αφού $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,2]$,το $\int_0^2 f(x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν μεταξύ της C_f, του χχ΄ και των κατακόρυφων ευθειών $x=0$ και $x=2$, δηλαδή το εμβαδόν του

μισού κυκλικού δίσκου με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα 1 (της σκιασμένης επιφάνειας του παραπάνω σχήματος) και άρα $\int_0^2 f(x)dx = \frac{\pi \cdot \rho^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)\eta\mu^2\left(\dfrac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0\le x<1\\ 0 & \text{, αν } x=1\end{cases}$$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

(Μονάδες 09)

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in[0,1]$, ισχύει $0\le f(x)\le 1-x$.

(Μονάδες 07)

γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ ισχύει $\mathrm{E}<\dfrac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 09)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Όταν $x\in[0,1)$, η $f(x)=(1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Ακόμη, είναι $0\le\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\le 1\Rightarrow 0\le(1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\le 1-x$ κοντά στο $x_0=1$ από αριστερά και $\lim\limits_{x\to1^-}0=\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)=0$. Από την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to1^-}\left((1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to1^-}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1).$$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι συνεχής.

β) Για κάθε $x\in[0,1)$, ισχύει:

$$0\le\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\le1\Rightarrow0\le(1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\le1-x\Rightarrow0\le f(x)\le1-x.$$

Επιπλέον το 1 επαληθεύει την ανισότητα $0\le f(x)\le1-x$, αφού ισχύει $0\le f(1)\le1-1$, όπου $f(1)=0$.

Συνεπώς για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $0\le f(x)\le1-x$.

γ) Είναι $\mathrm{E}=\int_0^1|f(x)|dx$ όμως η f είναι μη αρνητική στο διάστημα $[0,1]$, άρα $\mathrm{E}=\int_0^1 f(x)dx$.

Για τις συνεχείς συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)=1-x$ στο διάστημα $[0,1]$, ισχύουν:

- $g(x)\ge f(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$ και
- $f(0)=\eta\mu^2 1\ne1=g(0)$.

Οπότε είναι:

$$\int_0^1 g(x)dx>\int_0^1 f(x)dx\Rightarrow\int_0^1(1-x)dx>\mathrm{E}\Rightarrow\mathrm{E}<\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\Rightarrow$$

$$\mathrm{E}<\left(1-\frac{1^2}{2}\right)-\left(0-\frac{0^2}{2}\right)\Rightarrow\mathrm{E}<\frac{1}{2}\text{ τ.μ.}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x+x,\ x>0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>x$.

(Μονάδες 8)

γ) Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x)=e^{f(|x|)}$ για κάθε $x\neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x)=x^2e^{|x|},\ x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-1,\ x=1$.

(Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{2}{x}+1$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

οπότε το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

β) Η ανίσωση ορίζεται για κάθε x που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f^{-1}, δηλαδή για $x\in\mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f^{-1}(x)\in\mathbb{D}_f=(0,+\infty)$, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $x\le 0$, τότε η ανίσωση αληθεύει (αφού το πρώτο μέλος της είναι θετικό για όλα τα x)
- Αν $x>0$, τότε έχουμε:

$$f^{-1}(x)>x \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)>f(x) \Leftrightarrow x>f(x) \Leftrightarrow x>2\ln x+x \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow x<1$$

Επομένως λύση της ανίσωσης είναι κάθε αριθμός x με $x\in(-\infty,1)$.

γ) i. Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(|x|)=2\ln|x|+|x|=\ln|x|^2+|x|=\ln x^2+|x|$, οπότε

$$g(x)=e^{\ln x^2+|x|}=e^{\ln x^2}e^{|x|}=x^2e^{|x|}$$

Επιπλέον, η g είναι συνεχής στο $x_o=0$, οπότε $g(0)=\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x^2e^{|x|}=0$.

Άρα, $g(x)=x^2e^{|x|},\ x\in\mathbb{R}$.

ii. Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[-1,1]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι

$$E=\int_{-1}^{1} x^2e^{|x|}dx=\int_{-1}^{0} x^2e^{-x}dx+\int_{0}^{1} x^2e^{x}dx=[-e^{-x}x^2]_{-1}^{0}+2\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx+[e^{x}x^2]_{0}^{1}-2\int_{0}^{1} xe^{x}dx$$

$$=e-2[xe^{-x}]_{-1}^{0}+2\int_{-1}^{0} e^{-x}dx+e-2[xe^{x}]_{0}^{1}+2\int_{0}^{1} e^{x}dx$$

$$=e-2e-2(1-e)+e-2e+2(e-1)=2e-4$$

ΘΕΜΑ 4

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad f(0)=1 \qquad \text{και} \qquad f(2)=5$$

τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=|x^2-4|+5$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$.

(Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,-2]$, $\Delta_2=[-2,0]$, $\Delta_3=[0,2]$, $\Delta_4=[2,+\infty)$. Η συνάρτηση είναι συνεχής σε καθένα από αυτά και από το πρόσημο της παραγώγου της συμπεραίνουμε ότι η f είναι:

- γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_3
- γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_2, Δ_4

Σε ότι αφορά στα ακρότατα της f, ισχύει:

- Η συνάρτηση παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $x=-2, x=2$ και είναι ίσο με $f(-2)=f(2)=5$, αφού η f είναι άρτια.
- Η συνάρτηση παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=1$.

β) Ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \text{ και αν θέσουμε } u=-x,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{\text{f άρτια}}{=} \lim_{x\to-\infty} f(-x) \overset{u=-x}{=} \lim_{u\to+\infty} f(u)=-\infty$$

Έτσι, λόγω της συνέχειας της f και σε συνδυασμό με την μονοτονία της, έχουμε:

$$f(\Delta_1)=(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(-2)]=(-\infty,5],\ f(\Delta_2)=[f(0), f(-2)]=[1,5],$$

$$f(\Delta_3)=[f(0), f(2)]=[1,5],\ f(\Delta_4)=(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(2)]=(-\infty,5]$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(\mathbb{R})=f(\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)\cup f(\Delta_4)=(-\infty,5].$$

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι $f(x)\le 5$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=-2$ και $x=2$. Επιπλέον, αν θεωρήσουμε $g(x)=|x^2-4|+5$, τότε $g(x)\ge 5$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=-2$ και $x=2$.

Επομένως οι αριθμοί $-2, 2$ είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ και είναι οι μοναδικές, αφού για οποιαδήποτε άλλη τιμή του x ισχύει $f(x)<g(x)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=g(x)$ είναι αδύνατη.

δ) Αν θέσουμε $u=-x$, τότε έχουμε $du=-dx$ και τα νέα όρια ολοκλήρωσης είναι $u_1=1$ για $x=-1$ και $u_2=-1$ για $x=1$, οπότε το ολοκλήρωμα I γράφεται:

$$I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx \overset{\text{f άρτια}}{=} \int_{-1}^{1} xf(-x)dx \overset{u=-x}{=} \int_{1}^{-1} uf(u)du=-\int_{-1}^{1} uf(u)du=-I$$

οπότε $2I=0$, άρα $I=0$.

ΘΕΜΑ 4

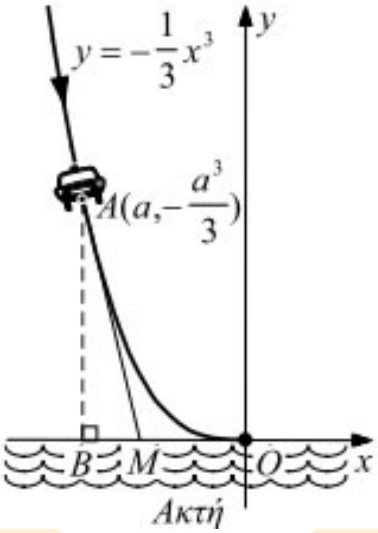
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$ της γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A.

(Μονάδες 06)

β)

i. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).



Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\alpha(t),$$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

(Μονάδες 08)

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M.

(Μονάδες 02)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3.

(Μονάδες 09)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -x^2,\ x \leq 0$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$, είναι η

$$y - \left(-\frac{\alpha^3}{3}\right) = -a^2(x-a) \Leftrightarrow y + \frac{\alpha^3}{3} = -a^2x + \alpha^3 \Leftrightarrow y = -a^2x + \alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3}$$

και τελικά

$$\varepsilon: y = -a^2x + \frac{2\alpha^3}{3} \quad (1)$$

β)

i. Ο προβολέας του περιπολικού φωτίζει κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης της C_f, καθώς αυτό κινείται κατά μήκος της καμπύλης. Επομένως, η εφαπτομένη ε είναι η ευθεία AM.

Για την εύρεση της τετμημένης του σημείου M, από την (1) για $y = 0$ έχουμε:

$$0 = -a^2x + \frac{2\alpha^3}{3} \Leftrightarrow a^2x = \frac{2\alpha^3}{3} \overset{\alpha \neq 0}{\Longleftrightarrow} x = \frac{2}{3}a$$

Άρα, το σημείο M έχει τετμημένη $x(t) = \frac{2}{3}a(t)$.

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι

$$x'(t) = \frac{2}{3}a'(t) = -\frac{2}{3}\alpha(t)$$

και τη χρονική στιγμή t_0, που είναι $\alpha(t_0) = -3$, έχουμε

$$x'(t_0) = -\frac{2}{3} \cdot (-3) = 2\ \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδες χρόνου}}.$$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής έχει θετικό πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι η τετμημένη του σημείου M, τη χρονική στιγμή t_0, αυξάνει.

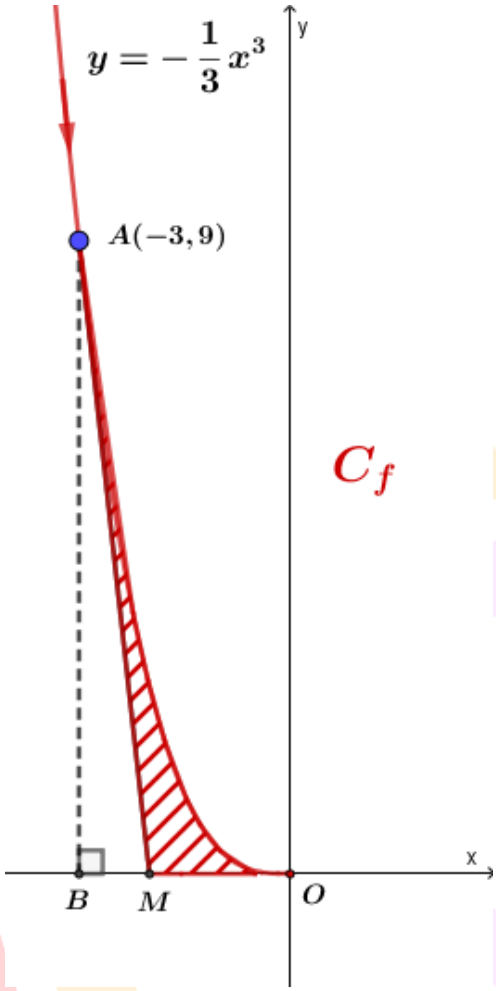
<u>Σχόλιο</u>: Αυτό είναι λογικό και δικαιολογείται από την κίνηση του περιπολικού πάνω στην καμπύλη. Η κίνηση αυτή, αναγκάζει το σημείο M να κινείται πάνω στον αρνητικό ημιάξονα Ox' προς τα δεξιά.

γ) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω προκύπτει ως εξής:

$$E(\Omega) = E_1 - E_2, \text{ όπου}$$

$E_1 = E_{ABO}$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και την κατακόρυφη ευθεία $x = -3$, και

$E_2 = E_{ABM}$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ABM.



Είτε από την γραφική παράσταση της f (βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x), είτε αλγεβρικά προκύπτει ότι $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 \geq 0$, για $x \leq 0$. Επομένως,

$$E_1 = \int_{-3}^{0} |f(x)|\, dx = \int_{-3}^{0} \left(-\frac{1}{3}x^3\right) dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot [x^4]_{-3}^{0} = -\frac{1}{12}[0 - (-3)^4] = \frac{3^4}{12} =$$

$= \frac{27}{4}$ τετραγωνικές μονάδες (τ.μ.).

Οι κορυφές του ορθογώνιου τριγώνου ABM είναι $A(-3,9)$, $B(-3,0)$ και $M(-2,0)$, διότι αφενός το σημείο B είναι η προβολή του σημείου A επάνω στον άξονα x΄x, αφετέρου δε $x_M = x(t_0) = \frac{2}{3} \cdot \alpha(t_0) = \frac{2}{3} \cdot (-3) = -2$. Επομένως,

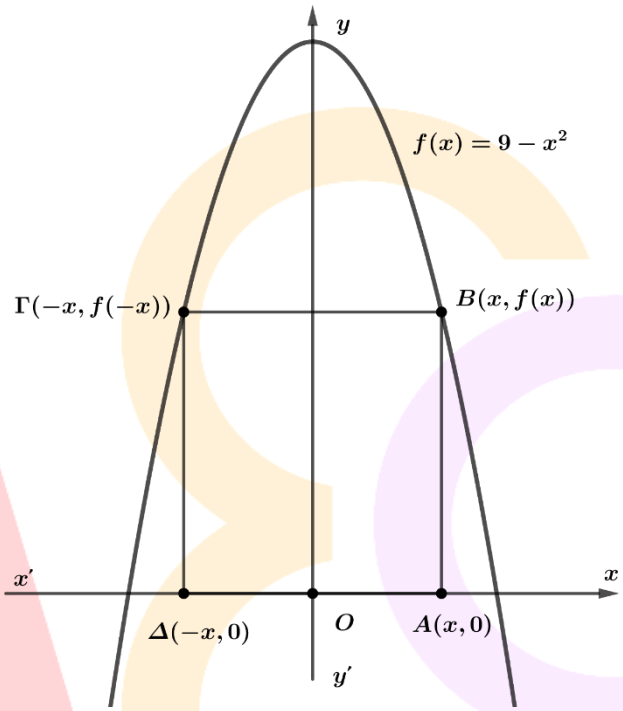
$$E_2 = E_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot (BM) \cdot (AB) = \frac{1}{2} \cdot |x_M - x_B| \cdot y_A = \frac{1}{2} \cdot |-2 - (-3)| \cdot 9 = \frac{9}{2} \text{ τ.μ.}$$

Τελικά, είναι

$$E(\Omega) = E_1 - E_2 = \frac{27}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Οι κορυφές Α(x,0) και Δ(-x,0) είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές $B(x, f(x))$ και $\Gamma(-x, f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x \in [0,3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = 18x - 2x^3$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Οι διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι:

$$ΑΔ = 2x \text{ και } ΑΒ = f(x) = 9 - x^2 \quad \text{με } x \in [0,3]$$

Επομένως το εμβαδό του δίνεται από την συνάρτηση

$$E(x) = ΑΒ \cdot ΓΔ = 2x \cdot (9 - x^2) = 18x - 2x^3, \ x \in [0,3]$$

β) Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,3]$ με

$$E'(x) = (8x - 2x^3)' = 18 - 6x^2, \ x \in [0,3]$$

και μηδενίζεται για $x = \sqrt{3}$, αφού

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 18 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{3}$$

το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης $E(x)$ φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0		$\sqrt{3}$		3	$+\infty$
$E'(x)$			$+$	0	$-$		
$E(x)$			$\nearrow$		$\searrow$		

επειδή η συνάρτηση $E(x)$ είναι συνεχής στο $[0,3]$ από τον πίνακα έχουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\sqrt{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{3},3]$

γ) Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει μέγιστο εμβαδό στην θέση στην οποία η συνάρτηση του εμβαδού $E(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο, δηλαδή για $x = \sqrt{3}$. Τότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι:

$$ΑΔ = 2x = 2\sqrt{3} \quad \text{και} \quad ΑΒ = f(\sqrt{3}) = 9 - \sqrt{3}^2 = 6$$

οπότε η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με $ΑΒ \cdot ΓΔ = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Εναλλακτικά: $E\left(\sqrt{3}\right) = 18\sqrt{3} - 2\sqrt{3}^3 = 12\sqrt{3}$.

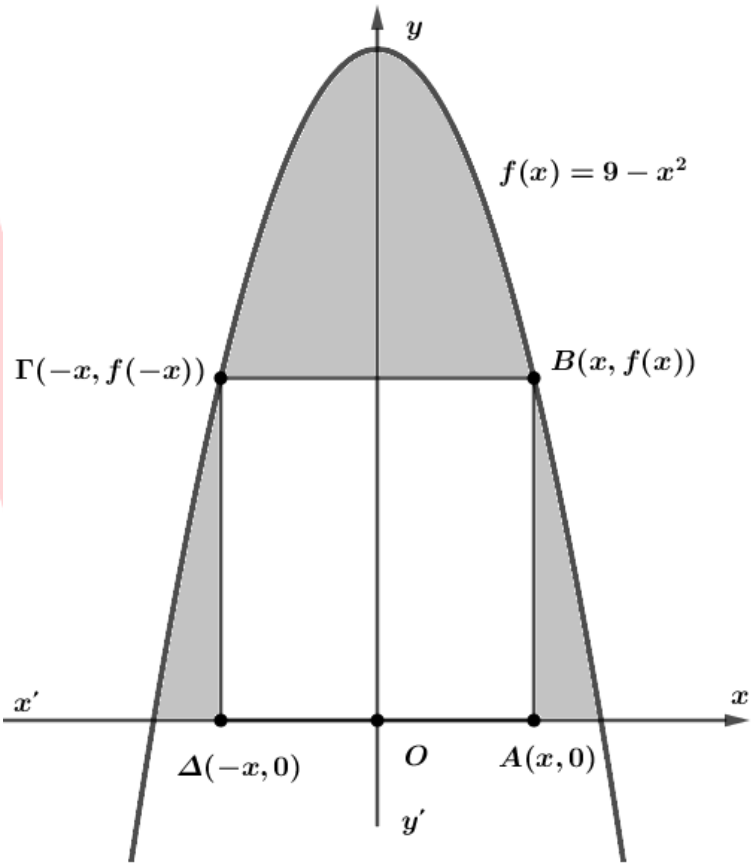
δ) Η συνάρτηση $f(x)$ τέμνει τους άξονες στα σημεία (3,0) και (-3,0) αφού είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Επιπλέον είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-3,3]$, επομένως το ζητούμενο εμβαδό $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι λόγω και του ερωτήματος (γ):

$$E(\Omega)=\int_{-3}^{3}|f(x)|dx-(AB\Gamma\Delta)=\int_{-3}^{3}f(x)dx-(AB\Gamma\Delta)=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx-12\sqrt{3}=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}-12\sqrt{3}=$$

$$=\left(9\cdot 3-\frac{3^3}{3}\right)-\left(9\cdot(-3)-\frac{(-3)^3}{3}\right)-12\sqrt{3}=27-9+27-9-12\sqrt{3}=36-12\sqrt{3}=12(3-\sqrt{3})\ \text{τετρ. μον.}$$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο