Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Β Λυκείου

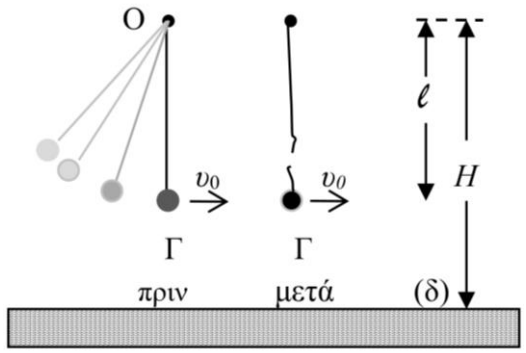
Φυσική Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 1 Καμπυλόγραμμες κινήσεις

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Μικρή σφαίρα μάζας $m = 200\ g$ κρέμεται δεμένη στο κάτω άκρο αβαρούς μη ελαστικού νήματος, μήκους l. Το πάνω άκρο του νήματος είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο Ο, το οποίο απέχει από οριζόντιο δάπεδο (δ), ύψος $H = 1{,}25\ m$. Θέτουμε το σύστημα σε αιώρηση με τέτοιο τρόπο ώστε τελικά το σώμα να κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο με το νήμα τεντωμένο.



Τη στιγμή που η σφαίρα περνάει από την κατώτερη θέση Γ της κυκλικής τροχιάς της, με το νήμα τεντωμένο και κατακόρυφο, η κεντρομόλος επιτάχυνσή της έχει μέτρο $20\ \frac{m}{s^2}$. Ακριβώς τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση Γ, το νήμα κόβεται και η σφαίρα με την ταχύτητα που είχε, πραγματοποιεί οριζόντια βολή μέχρι να χτυπήσει στο οριζόντιο δάπεδο. Η σφαίρα φτάνει στο δάπεδο μετά από χρόνο $0{,}3\ s$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα. Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\ \frac{m}{s^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

4.1. Το μήκος l του νήματος.

Μονάδες 6

4.2. Την οριζόντια απόσταση από το σημείο Γ, του σημείου στο οποίο θα χτυπήσει η σφαίρα στο δάπεδο.

Μονάδες 6

4.3. Τη βαρυτική δυναμική ενέργεια της σφαίρας ως προς το οριζόντιο δάπεδο (δ) μετά από χρόνο $0{,}2\ s$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Μονάδες 6

4.4. Το μέτρο της ταχύτητας καθώς και την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με το οριζόντιο δάπεδο, ελάχιστα πριν η σφαίρα προσκρούσει στο δάπεδο.

Μονάδες 7

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η μάζα m φτάνει στο οριζόντιο δάπεδο μετά από χρόνο $0{,}3\ s$. Εκτελεί οριζόντια βολή άρα στον κατακόρυφο άξονα σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων η κίνηση της μάζας περιγράφεται από τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης.

$$H - l = \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}09\ m = 0{,}45\ m$$

$$\text{Άρα } l = 1{,}25 - 0{,}45 = 0{,}8\ m$$

Μονάδες 6

4.2. Η μάζα m μετά το κόψιμο του νήματος πραγματοποιεί οριζόντια βολή και οριζοντίως σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων πραγματοποιεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και φτάνει στο έδαφος μετά από $t = 0{,}3\ s$. Διανύει συνεπώς απόσταση $S = t \cdot \upsilon_x$. Η ταχύτητα με την οποία το σώμα βάλλεται οριζόντια θα προκύψει από την κεντρομόλο επιτάχυνση που είχε το σώμα κατά την κυκλική του κίνηση στη θέση Γ.

$$\alpha_\kappa = \frac{{\upsilon_x}^2}{l}$$

$$\upsilon_x = \sqrt{\alpha_\kappa \cdot l} = \sqrt{20 \cdot 0{,}8}\,\frac{m}{s} = 4\,\frac{m}{s}$$

Συνεπώς η οριζόντια απόσταση που θα διανύσει το σώμα θα είναι: $S = t \cdot \upsilon_x = 0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2\ m$

Μονάδες 6

4.3. Η μάζα m μετά από χρόνο $t_2 = 0{,}2\ s$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα θα βρίσκεται σε ύψος:

$$h' = 0{,}45 - \frac{1}{2}\, g \cdot {t_2}^2 = (0{,}45 - 0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}04)m = 0{,}25\ m$$

Άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος ως προς το δάπεδο θα είναι:

$$U = mgh' = 0{,}2 \cdot 10 \cdot 0{,}25 = 0{,}5\ J$$

Μονάδες 6

4.4. Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα πραγματοποιεί οριζόντια βολή και φτάνει στο έδαφος μετά από $0{,}3\ s$. Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας είναι $\upsilon_x = 4\frac{m}{s}$. Η κατακόρυφη θα προκύψει από την εξίσωση ταχύτητας στην ελεύθερη πτώση για χρονική διάρκεια κίνησης $0{,}3\ s$.

$$\upsilon_y = g \cdot t = 3\frac{m}{s}$$

Συνεπώς η συνολική ταχύτητα της μάζας m θα προκύψει από το διανυσματικό άθροισμα των δύο ταχυτήτων, με μέτρο:

$$\upsilon^2 = {\upsilon_x}^2 + {\upsilon_y}^2$$

$$\upsilon^2 = (4^2 + 3^2)\,(\frac{m}{s})^2$$

$$\upsilon = 5\frac{m}{s}$$

Για τη κατεύθυνση έχουμε:

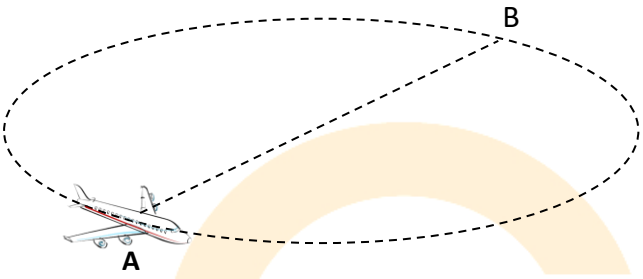
Η ταχύτητα πρόσκρουσης σχηματίζει γωνία $\hat{\varphi}$ με τον οριζόντιο άξονα με: $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{3}{4}$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Αεροπλάνο μάζας $20.000\ kg$ πετάει σε οριζόντιο κύκλο περιμένοντας άδεια να προσγειωθεί. Το μέτρο της ταχύτητάς του παραμένει σταθερό και ίσο με $100\ m/s$. Τα αεροπλάνα στρίβουν πάντα με κατάλληλο τρόπο ώστε να μειώσουν την αίσθηση της επιτάχυνσης στους επιβάτες, η οποία μπορεί να προκαλέσει δυσφορία στους τελευταίους.



4.1. Υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου ώστε οι επιβάτες να μην αισθανθούν οριζόντια (κεντρομόλο) επιτάχυνση πάνω από $0{,}1g$.

Μονάδες 6

4.2. Υπολογίστε το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του αεροπλάνου ανάμεσα στα σημεία Α και Β (όπου Β το σημείο αντιδιαμετρικά του Α).

Μονάδες 6

Ενώ το αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος $1280\ m$ και στο σημείο Β του παραπάνω σχήματος, **αφήνει** ένα πακέτο μάζας $5\ kg$ να πέσει προς το έδαφος, χωρίς αλεξίπτωτο. Οι διαστάσεις του πακέτου είναι πολύ μικρές, ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδραση της αντίστασης του αέρα.

4.3. Υπολογίστε την οριζόντια απόσταση ανάμεσα στο σημείο Β και στο σημείο όπου το πακέτο θα χτυπήσει στο έδαφος (βεληνεκές).

Μονάδες 6

4.4. 4. Υπολογίστε την εφαπτομένη της γωνίας που θα σχηματίζει η ταχύτητα του πακέτου με το οριζόντιο επίπεδο όταν το πακέτο θα χτυπήσει στο έδαφος.

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η κεντρομόλος επιτάχυνση πρέπει να είναι ίση με $0{,}1g = 0{,}1\left(10\frac{m}{s^2}\right) = 1\ m/s^2$ (2 μονάδες)
Από τον τύπο της κεντρομόλου επιτάχυνσης (4 μονάδες):

$$a_K = \frac{v^2}{R}$$

$$1\ m/s^2 = \frac{(100\frac{m}{s})^2}{R}$$

$$R = 10.000\ m$$

Μονάδες 6

4.2. Στο σημείο Β η ταχύτητα θα έχει ίσο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση (3 μονάδες), επομένως (3 μονάδες)

$$\Delta v = v_B - v_A = \left(100\ \frac{m}{s}\right) - \left(-100\ \frac{m}{s}\right) = 200\ m/s$$

Μονάδες 6

4.3. Το πακέτο θα εκτελέσει οριζόντια βολή, οπότε για τη στιγμή που θα φτάσει στο έδαφος θα ισχύουν:
Στον κατακόρυφο άξονα (3 μονάδες): $y = \frac{1}{2}gt^2$ ή $(1280\ m) = \frac{1}{2}\left(10\frac{m}{s^2}\right)t^2$ ή $t = 16\ s$
Στον οριζόντιο άξονα (3 μονάδες): $x = vt = \left(100\frac{m}{s}\right)(16\ s) = 1600\ m$

Μονάδες 6

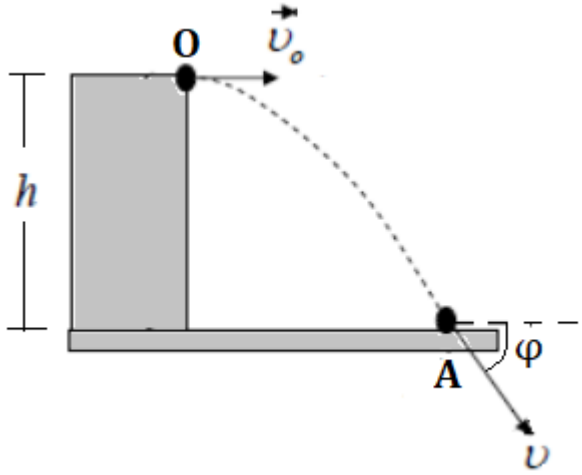
4.4. Το πακέτο θα εκτελέσει οριζόντια βολή, οπότε για τη στιγμή που θα φτάσει στο έδαφος θα ισχύουν:
Στον κατακόρυφο άξονα (2 μονάδες): $v_y = gt = \left(10\frac{m}{s^2}\right)(16\ s) = 160\ m/s$
Στον οριζόντιο άξονα (2 μονάδες): $v_x = v = 100\ m/s$
Για τη γωνία θ που σχηματίζει η ταχύτητα με το οριζόντιο επίπεδο ισχύει (3 μονάδες):

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{160\ m/s}{100\ m/s} = 1{,}6$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4



Σφαίρα μάζας $m = 0{,}1\text{Kg}$ βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o = 20\text{m/s}$ από την ταράτσα ενός κτιρίου ύψους h από το έδαφος. Όταν πέφτει στο έδαφος η σφαίρα η ταχύτητά της σχηματίζει με αυτό γωνία $\varphi = 45^o$ (όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα).

4.1. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της σφαίρας όταν φτάνει στο έδαφος.

Μονάδες 6

4.2. Να βρεθεί το ύψος h του κτιρίου.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια της σφαίρας τη χρονική στιγμή $t_1 = 1s$. Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας να θεωρήσετε το έδαφος.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_2, όπου η οριζόντια μετατόπιση της σφαίρας είναι οκταπλάσια της κατακόρυφης μετατόπισής της.

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g_o = 10\ \text{m/s}^2$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η σφαίρα εκτελεί οριζόντια βολή. Συνεπώς στον οριζόντιο άξονα Ox εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, οπότε: $\upsilon_x = \upsilon_o$ (1) $x = \upsilon_o t$ (2)

Στον κατακόρυφο άξονα Oy εκτελεί ελεύθερη πτώση, οπότε: $\upsilon_y = gt$ (3) $y = \frac{1}{2}gt^2$ (4)

Όταν φτάσει στο έδαφος, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\upsilon_x = \upsilon_o \Rightarrow \upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi = \upsilon_o \Rightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_o}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \upsilon = 20\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}.$$

Άρα: $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 40\ \mathrm{J}$.

Μονάδες 6

4.2. Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\upsilon_y = gt \Rightarrow \upsilon\eta\mu\varphi = gt \Rightarrow t = \frac{\upsilon\eta\mu\varphi}{g} \Rightarrow t = 2\ \mathrm{s}$$

οπότε σύμφωνα με τη σχέση (4) έχουμε:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = 20\ \mathrm{m}$$

Μονάδες 6

4.3. Από τη σχέση (4) έχουμε: $y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow y_1 = 5\mathrm{m}$. Άρα η δυναμική ενέργεια της σφαίρας είναι:

$$U = mg(h - y_1) = 15\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 6

4.4. Από τις σχέσεις (2) και (4) έχουμε:

$$x = 8y \rightarrow \upsilon_o t_2 = 8 \cdot \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = 0{,}5\ \mathrm{s}$$

Άρα η ταχύτητα της σφαίρας είναι: $\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_{2x}^2 + \upsilon_{2y}^2} = \sqrt{\upsilon_o^2 + (gt_2)^2} = \sqrt{425}\ \mathrm{m/s}$, οπότε:

$$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = 21{,}25\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 7

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σημειακό αντικείμενο μάζας $m = 1\,kg$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ολισθαίνοντας στην οριζόντια και λεία επιφάνεια τραπεζιού. Το σημειακό αντικείμενο συγκρατείται στην κυκλική του τροχιά, δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου, τεντωμένου, αβαρούς και μη ελαστικού νήματος, μήκους $\ell = 0{,}5\,m$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Η συχνότητα της κυκλικής κίνησης του σημειακού αντικειμένου είναι $f = \frac{10}{\pi}\,Hz$.

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος.

Μονάδες 6

Κάποια χρονική στιγμή $(t_0 = 0)$ το νήμα κόβεται και το σημειακό αντικείμενο εκτελεί οριζόντια βολή με αρχική, οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_o, ίσου με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της ομαλής κυκλικής κίνησης του αντικειμένου. Η επιφάνεια του τραπεζιού απέχει ύψος $h = 0{,}8\,m$ από το οριζόντιο δάπεδο, στο οποίο στηρίζεται το τραπέζι.

4.2. Ποια χρονική στιγμή t_1 το σημειακό αντικείμενο προσκρούει στο δάπεδο που στηρίζεται το τραπέζι;

Μονάδες 6

4.3. Σε πόση οριζόντια απόσταση από το σημείο που εγκατέλειψε την επιφάνεια του τραπεζιού το σημειακό αντικείμενο προσέκρουσε στο δάπεδο;

Μονάδες 6

4.4. Προσδιορίστε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ του σημειακού αντικειμένου τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία προσκρούει στο δάπεδο

Μονάδες 7

Να θεωρήσετε τη βαρυτική επιτάχυνση σταθερή, με μέτρο $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ και να αγνοήσετε τις δυνάμεις που ασκεί ο ατμοσφαιρικός αέρας στο αντικείμενο.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Ισχύει: $\upsilon_0 = 2 \cdot \pi \cdot \ell \cdot f$, $\upsilon_0 = 10\,\frac{m}{s}$ και

$F_{\kappa\varepsilon\nu} = \frac{m \cdot \upsilon_0^2}{\ell} = 200\,N$, αλλά $F_{\kappa\varepsilon\nu} = T$, οπότε $T = 200\,N$.

Μονάδες 6

4.2. Ισχύει: $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$, $t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$, $t_1 = 0{,}4\,s$.

Μονάδες 6

4.3. Ισχύει: $S = \upsilon_0 \cdot t_1$, $R = 4\,m$.

Μονάδες 6

4.4. Ισχύει: $\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_{y1}^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 \cdot t_1^2} = \sqrt{116}\,\frac{m}{s} = 2 \cdot \sqrt{29}\,\frac{m}{s}$. Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ με τον ορίζοντα, τότε: $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_{y1}}{\upsilon_0} = \frac{g \cdot t_1}{\upsilon_0} = 0{,}4$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σώμα βρίσκεται στην οριζόντια ταράτσα ουρανοξύστη και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $r = \frac{5}{\pi}$ m με περίοδο $T = \frac{1}{2}$ s. Το επίπεδο της κυκλικής τροχιάς είναι οριζόντιο. Να βρείτε:

4.1. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος.

Μονάδες 6

Κάποια χρονική στιγμή το σχοινί, το οποίο συγκρατεί το σώμα στην κυκλική τροχιά, κόβεται με αποτέλεσμα το σώμα να διαφύγει από την ταράτσα εκτελώντας οριζόντια βολή. Να βρείτε:

4.2. Την ταχύτητα του σώματος κατά μέτρο και κατεύθυνση $2\ s$ αφότου διέφυγε από την ταράτσα της πολυκατοικίας.

Μονάδες 6

4.3. Την απόσταση μεταξύ του σημείου από το οποίο διέφυγε από την ταράτσα και του σημείου στο οποίο βρίσκεται τη χρονική στιγμή που περιγράφεται στο ερώτημα 4.2

Μονάδες 6

4.4. Γνωρίζουμε ότι όταν το σώμα φτάνει στο οριζόντιο έδαφος, η διεύθυνση της ταχύτητας σχηματίζει γωνία ω ως προς αυτό, όπου: εφ$\omega = 2$. Να συγκρίνετε: α) την κατακόρυφη απόσταση του σημείου πτώσης του σώματος στο έδαφος, από το σημείο βολής με β) την οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) που διένυσε το σώμα κατά τη διάρκεια της βολής.

Μονάδες 7

Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στη επιφάνειας της γης $g = 10\ \frac{m}{s^2}$, και ότι κάθε είδους τριβή όπως και η αντίσταση από τον αέρα θεωρούνται αμελητέες.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1 $\upsilon_0 = \frac{2\pi r}{T} = 20\,\frac{m}{s}$.

Μονάδες 6

4.2 Η οριζόντια βολή είναι σύνθετη κίνηση που αποτελείται από δύο απλές κινήσεις, μια κατακόρυφη που είναι ελεύθερη πτώση και μια οριζόντια που είναι ευθύγραμμη ομαλή. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων για να υπολογίσουμε την ταχύτητα μετά από χρόνο t γράφουμε το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων.

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_\chi + \vec{\upsilon}_\psi$ ή $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + (gt)^2} = 20\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$, η οποία σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, όπου: εφ$\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = 1 \Rightarrow \theta = 45^0$.

Μονάδες 6

4.3 Η ζητούμενη απόσταση των δύο σημείων αποτελεί την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές την κατακόρυφη και την οριζόντια απόσταση που διανύει το σώμα σε χρόνο $2s$:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\upsilon_0 t)^2 + \left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2} = 20\sqrt{5}\text{ m}.$$

Μονάδες 6

4.4 Η γωνία ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα με το οριζόντιο έδαφος. Για τη γωνία αυτή ισχύει: εφ$\omega = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{gt}{\upsilon_0} = \frac{gt^2}{\upsilon_0 t}$ ή εφ$\omega = \frac{2H}{S}$ ή $2 = \frac{2H}{S}$

Άρα: $\frac{H}{S} = 1$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα εκτοξεύεται οριζόντια από ύψος $H = 125m$, σε σχέση με το έδαφος, με αρχική ταχύτητα υ_o. Αν γνωρίζετε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10\frac{m}{s^2}$, να προσδιορίσετε:

4.1. το χρόνο που χρειάστηκε για να φθάσει στο έδαφος.

Μονάδες 5

4.2. Αν η οριζόντια απόσταση, που διήνυσε μέχρι να φτάσει στο έδαφος, είναι $S = 50\ m$, να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας υ_o με την οποία εκτοξεύτηκε.

Μονάδες 5

4.3. Να προσδιορίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φτάνει στο έδαφος.

Μονάδες 7

4.4. Ποια χρονική στιγμή t_1 το σώμα περνάει από ένα σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος $h_1 = 25m$ από το έδαφος;

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος του.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το σώμα εκτελεί οριζόντια βολή.

Στον κατακόρυφο άξονα εκτελεί ελεύθερη πτώση.

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{o\lambda}^2, \qquad t_{o\lambda} = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}, \qquad t_{o\lambda} = \sqrt{\frac{2 \cdot 125}{10}} s, \qquad t_{o\lambda} = 5s$$

Μονάδες 5

4.2. Στον οριζόντιο άξονα, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

$$x = \upsilon_o \cdot t, \qquad S = \upsilon_o \cdot t_{o\lambda}, \qquad \upsilon_o = \frac{S}{t_{o\lambda}}, \quad \upsilon_o = \frac{50}{5} \frac{m}{s}, \upsilon_o = 10 \frac{m}{s}$$

Μονάδες 5

4.3.
Η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}, \qquad \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_o^2 + m \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 + 0,$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2 \cdot g \cdot H, \qquad \upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2 \cdot g \cdot H},$$

$$\upsilon = \sqrt{10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 125} \frac{m}{s}, \upsilon = \sqrt{2600} \frac{m}{s} = 10 \cdot \sqrt{26} \frac{m}{s}$$

Μονάδες 7

4.4. Αν y_1 η κατακόρυφη απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1, τότε

$$H = h + y_1, \qquad y_1 = H - h, \qquad y_1 = 125m - 25m, \qquad y_1 = 100m,$$

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = y_1, \; t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot y_1}{g}} = \sqrt{20} s = 2 \cdot \sqrt{5} s$$

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σώμα βρίσκεται στην άκρη της οριζόντιας επιφάνειας ενός τραπεζιού σε ύψος h. Την χρονική στιγμή $t = 0$ δίνουμε στο σώμα οριζόντια ταχύτητα u_0 και αυτό εκτελεί οριζόντια βολή. Το σώμα φτάνει στο έδαφος την χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}4s$ έχοντας μετατοπιστεί οριζόντια κατά $s_{max} = 4m$. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{m^2}{s}$ και η αντίσταση από τον αέρα θεωρείται αμελητέα.

4.1. Να υπολογίσετε το ύψος h του τραπεζιού.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα u_0 με την οποία εκτοξεύτηκε το σώμα.

Μονάδες 6

4.3. Εξετάστε αν σε κάποιο σημείο της τροχιάς της κίνησης του σώματος, εκτός από το σημείο εκτόξευσης, η οριζόντια και η κατακόρυφη θέση του σώματος έχουν το ίδιο μέτρο.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σώμα, τη χρονική στιγμή που η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του έχει πενταπλάσιο μέτρο από την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας.

Μονάδες 7

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το ύψος του τραπεζιού είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος από το σημείο εκτόξευσης μέχρι να φτάσει στο έδαφος. Άρα

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot(0{,}4s)^2 = 0{,}8\ m$$

Μονάδες 6

4.2. Η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση του σώματος είναι το βεληνεκές της οριζόντιας βολής και εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα u_0. Ισχύει

$$s_{max} = u_0 t_1 \Leftrightarrow u_0 = \frac{s_{max}}{t_1} = \frac{4m}{0{,}4s} = 10\frac{m}{s}$$

Μονάδες 6

4.3. Η οριζόντια θέση του σώματος στην οριζόντια βολή είναι $x = u_0 t$ ενώ η κατακόρυφη είναι $y = \frac{1}{2}gt^2$. Αναζητάμε ποια χρονική στιγμή ισχύει

$$x = y \Leftrightarrow u_0 t = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t(2u_0 - gt) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ή } t = \frac{2u_0}{g}$$

Η χρονική στιγμή $t = 0$ αντιστοιχεί στο σημείο εκτόξευσης. Η δεύτερη λύση αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή

$$t = \frac{2u_0}{g} = \frac{2\cdot 10}{10}s = 2s > t_1$$

Η λύση αυτή δεν είναι δεκτή γιατί το σώμα έχει φτάσει στο έδαφος σε μικρότερο χρόνο. Επομένως, δεν υπάρχει χρονική στιγμή στην οποία ισχύει $x = y$.

Μονάδες 6

4.4. Το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητας είναι $u_x = u_0$ και της κατακόρυφης είναι $u_y = gt$. Έστω ότι την χρονική στιγμή t_2 ισχύει

$$u_x = 5u_y \Leftrightarrow u_0 = 5gt_2 \Leftrightarrow t_2 = \frac{u_0}{5g} = \frac{10}{5\cdot 10}s = \frac{1}{5}s$$

Την χρονική στιγμή t_2 η κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος είναι

$$y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 = \frac{1}{2}10\left(\frac{1}{5}\right)^2 m = \frac{10}{50}m = \frac{1}{5}m = 0{,}2m$$

Στο σημείο αυτό της τροχιάς, το σώμα απέχει από το έδαφος

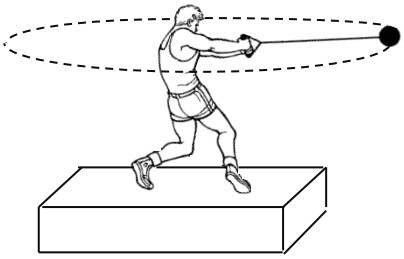
$$h - y_2 = 0{,}8m - 0{,}2m = 0{,}6m$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Η σφυροβολία είναι από τα παλαιότερα αθλήματα των σύγχρονων Ολυμπιακών Αγώνων. Η σφύρα αποτελείται από μία σφαίρα μάζας $4\ kg$ η οποία είναι δεμένη σε σύρμα, το οποίο έχει πολύ μικρότερη (αμελητέα) μάζα σε σχέση με τη σφαίρα. Αθλήτρια της σφυροβολίας, καθώς προπονείται, περιστρέφει τη σφύρα σε οριζόντιο επίπεδο ώστε η σφαίρα να κάνει κυκλική κίνηση ακτίνας $1{,}5\ m$, με ταχύτητα σταθερού μέτρου $15\ m/s$.



4.1. Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται η σφαίρα για να εκτελέσει μία πλήρη περιστροφή καθώς και την γωνιακή της ταχύτητα.

Μονάδες 6

4.2. Υπολογίστε την κεντρομόλο επιτάχυνση της σφαίρας και την κεντρομόλο δύναμη η οποία την αναγκάζει να εκτελεί την περιστροφή και εξηγήστε ποια (ή ποιες) από τις δυνάμεις που ασκούνται στην σφύρα παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης.

Μονάδες 7

Κατά λάθος, η αθλήτρια αφήνει ελεύθερη τη σφύρα, ενώ αυτή περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, το οποίο βρίσκεται σε ύψος $1{,}8\ m$ από το έδαφος. Μπορούμε να θεωρήσουμε πως η σφαίρα εκτελεί οριζόντια βολή, θεωρώντας αμελητέα την επίδραση του σύρματος στην κίνησή της και θεωρώντας επίσης αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

4.3. Υπολογίστε πόσο χρόνο θα χρειαστεί η σφαίρα για να φτάσει στο έδαφος, και ποια είναι η οριζόντια απόσταση από το σημείο που αφέθηκε ελεύθερη του σημείου που θα φτάσει.

Μονάδες 6

4.4 Υπολογίστε την εφαπτομένη της γωνίας που θα σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας της σφαίρας με το οριζόντιο επίπεδο όταν η σφαίρα θα φτάσει στο έδαφος.

Μονάδες 6

Υπενθυμίζεται η προσεγγιστική τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Εφόσον η κίνηση είναι ομαλή κυκλική, ισχύει:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Longrightarrow 15\frac{m}{s} = \frac{2\pi(1{,}5\ m)}{T} \Leftrightarrow T = \frac{\pi}{5}\ s \text{ (3 μονάδες)}$$

Για τη γωνιακή ταχύτητα ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}s} = 10\ rad/s \text{ (3 μονάδες)}$$

Μονάδες 6

4.2. Η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς της σφαίρας (1 μονάδα) και μέτρο:

$$a_\kappa = \frac{v^2}{R} = \frac{(15\ m/s)^2}{1{,}5\ m} = 150\ m/s^2 \text{ (2 μονάδες)}$$

Η κεντρομόλος δύναμη έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς της σφαίρας (1 μονάδα) και μέτρο:

$$F_\kappa = ma_\kappa = (4\ kg)\left(150\frac{m}{s^2}\right) = 600\ N \text{ (2 μονάδες)}$$

Η δύναμη που παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης είναι η τάση του σύρματος της σφύρας (ακριβέστερα, είναι η συνισταμένη της τάσης, του βάρους της σφαίρας, αλλά και της αντίστασης του αέρα) (1 μονάδα)

Μονάδες 7

4.3. Με βάση την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, η κατακόρυφη κίνηση της σφαίρας είναι ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $a = g$. Σε χρόνο t από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερη η σφαίρα θα έχει κατέβει κατά y από την αρχική της θέση. Θέτοντας $y = 1{,}8\ m$ βρίσκουμε τον χρόνο t_1 (χρονικό διάστημα από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερη) για να φτάσει στο έδαφος:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 1{,}8\ m = \frac{1}{2}\left(10\frac{m}{s^2}\right){t_1}^2 \Leftrightarrow t_1 = 0{,}6\ s \text{ (3 μονάδες)}$$

Σε αυτόν τον χρόνο, με βάση το γεγονός πως η οριζόντια κίνηση της σφαίρας είναι ομαλή με $v_x = v_0 = 15\ m/s$ (λόγω ανεξαρτησίας των κινήσεων), η σφαίρα θα έχει μετατοπιστεί οριζόντια κατά

$$x = v_0 t = \left(15\frac{m}{s}\right)(0{,}6\ s) = 9\ m \text{ (3 μονάδες)}$$

Μονάδες 6

4.4. Με βάση την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, η κατακόρυφη κίνηση της σφαίρας είναι ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $a = g$. Σε χρόνο t_1 από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερη η σφαίρα θα έχει αποκτήσει κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας μέτρου:

$$v_y = gt_1 = \left(10\frac{m}{s^2}\right)(0{,}6\ s) = 6\ m/s \text{ (2 μονάδες)}$$

Το μέτρο της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας παραμένει $v_x = v_0 = 15\ m/s$ (1 μονάδα)

Η εφαπτομένη της γωνίας που θα σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας της σφαίρας με το οριζόντιο επίπεδο όταν η σφαίρα θα φτάσει στο έδαφος είναι:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{6\ m/s}{15\ m/s} = 0{,}4 \text{ (3 μονάδες)}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο