Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Γ Λυκείου

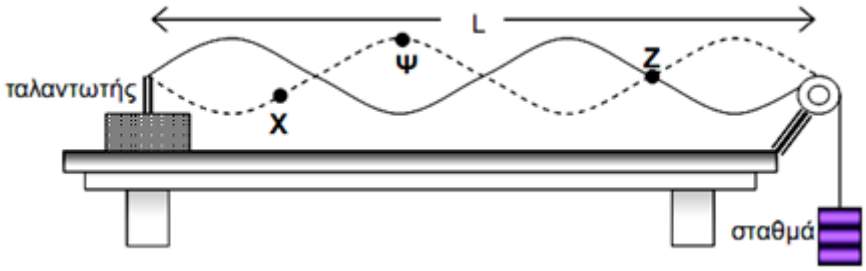
Φυσική Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 2 Κύματα

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Για τη μελέτη των στάσιμων κυμάτων κατά μήκος τεντωμένης χορδής δημιουργήθηκε στο εργαστήριο η πειραματική διάταξη του παρακάτω σχήματος. Αποτελείται από έναν ταλαντωτή, μία τροχαλία, μία αβαρή ελαστική χορδή και διάφορα σταθμά. Ο ταλαντωτής συνδέεται με μία γεννήτρια συχνοτήτων. Όταν η χορδή ηρεμεί έχει μήκος $L = 1{,}6\ m$. Η γεννήτρια τίθεται σε λειτουργία και ρυθμίζουμε την συχνότητά της ώστε να σχηματιστεί το στάσιμο κύμα του παρακάτω σχήματος.



Τα σημεία που συνδέεται η χορδή με τον ταλαντωτή και την τροχαλία, μετά τον σχηματισμό του στάσιμου κύματος θεωρούνται ακίνητα, δηλαδή συμπεριφέρονται όπως το σημείο Z. Η μέγιστη απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας των σημείων που βρίσκονται στις κοιλίες π.χ. το Ψ, είναι $4cm$. Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σημείο Χ για να κινηθεί από την μία ακραία θέση ταλάντωσης στην άλλη είναι $\Delta t = 0{,}1s$.

4.1. Να βρεθεί το μήκος κύματος των αρμονικών κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στην χορδή καθώς και η ταχύτητα διάδοσης του αρμονικού κύματος στην χορδή.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε πόσο πρέπει να μεταβληθεί η συχνότητα της γεννήτριας ώστε να σχηματιστεί στην χορδή ένα ακόμη σημείο δεσμού.

Μονάδες 6

4.3. Για την αρχική συχνότητα του ταλαντωτή να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος του παραπάνω σχήματος, καθώς και η εξίσωση που δίνει την επιτάχυνση ταλάντωσης των μορίων της χορδής σε συνάρτηση με τον χρόνο. Θεωρούμε ως $t = 0$ τη στιγμή που όλα τα μόρια της χορδής διέρχονται από την θέση ισορροπίας τους και η ταχύτητα του σημείου στην θέση Ψ είναι $\upsilon > 0$. Ορίζουμε την θέση του σημείου Ψ ως την αρχή του οριζόντιου άξονα με $x = 0$. Να θεωρήσετε ότι $\pi^2 = 10$.

Μονάδες 6

4.4. Για την αρχική συχνότητα του ταλαντωτή να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης των μορίων της χορδής του παραπάνω σχήματος τα οποία βρίσκονται στις θέσεις των κοιλιών, όταν βρεθούν σε απομάκρυνση $y = \sqrt{7}\ cm$ από την θέση ισορροπίας.

Μονάδες 7

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Όπως παρατηρούμε από το σχήμα, το μήκος της χορδής αντιστοιχεί σε δύο μήκη κύματος, οπότε

$$L = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{L}{2} = \frac{1,6}{2}m = 0,8m$$

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σημείο Χ για να μεταβεί από την μία ακραία θέση ταλάντωσης στην άλλη είναι μισή περίοδος, οπότε $\Delta t = \frac{T}{2} \Leftrightarrow T = 2 \cdot \Delta t = 2 \cdot 0,1s = 0,2s$.

Με χρήση της θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής βρίσκουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης των αρμονικών κυμάτων στην χορδή είναι:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,8}{0,2}\frac{m}{s} = 4\frac{m}{s}$$

Μονάδες 6

4.2. Η συχνότητα της γεννήτριας που δημιουργεί το στάσιμο κύμα του σχήματος (συνολικά 5 δεσμοί με τα άκρα της χορδής) είναι $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2}Hz = 5Hz$.

Όταν μεταβάλουμε την συχνότητα της γεννήτριας και σχηματιστεί ένας ακόμη δεσμός (συνολικά 6 δεσμοί με τα άκρα της χορδής), τότε το μήκος της χορδής θα είναι 2,5 μήκη κύματος, δηλαδή

$$L = 2,5\lambda' \Leftrightarrow \lambda' = \frac{L}{2,5} = \frac{1,6}{2,5}m = 0,64m$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος δεν αλλάζει, οπότε η νέα συχνότητα της γεννήτριας θα γίνει

$$f' = \frac{\upsilon}{\lambda'} = \frac{4}{0,64}Hz = 6,25Hz$$

Συνεπώς, η συχνότητα πρέπει να αυξηθεί κατά $\Delta f = f' - f = 6,25Hz - 5Hz = 1,25Hz$

Μονάδες 6

4.3. Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων που βρίσκονται στις κοιλίες του στάσιμου κύματος είναι διπλάσιο από το πλάτος των αρμονικών κυμάτων. Επομένως, τα αρμονικά κύματα έχουν πλάτος

$$|A'| = 2A \Leftrightarrow A = \frac{|A'|}{2} = \frac{4cm}{2} = 2cm$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος στην χορδή (στην θέση Ψ με $x = 0$ υπάρχει κοιλία) στο διάστημα $-0,6m \leq x \leq +1m$ είναι

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = 0,04\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{0,8}\right)\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{0,2}\right) = 0,04\sigma\upsilon\nu(2,5\pi x)\eta\mu(10\pi t)\ (S.I.)$$

Η εξίσωση επιτάχυνσης ταλάντωσης για τα μόρια της χορδής είναι

$$\alpha = -\omega^2 y = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y = -\frac{4\pi^2}{0,2^2}0,04\sigma\upsilon\nu(2,5\pi x)\eta\mu(10\pi t) = -40\sigma\upsilon\nu(2,5\pi x)\eta\mu(10\pi t)\ (S.I.)$$

Μονάδες 6

4.4. Τα σημεία που βρίσκονται στις κοιλίες εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση, οπότε για την κίνησή τους εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

$$K + U = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_\tau^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(2A)^2 \Leftrightarrow \upsilon_\tau = \omega\sqrt{4A^2 - y^2} = \frac{2\pi}{0,2}\sqrt{16-7}\cdot 10^{-2}\frac{m}{s} = 0,3\pi\frac{m}{s}$$

Μονάδες 7

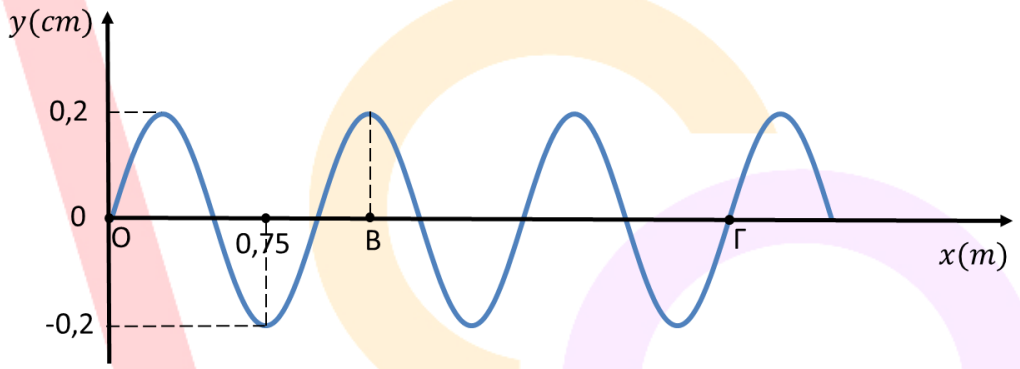
ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Το σημείο Ο ενός γραμμικού ελαστικού μέσου αποτελεί πηγή αρμονικής διαταραχής και αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ σύμφωνα με την εξίσωση:

$$y = A \cdot \eta\mu 10\pi t \ \ (SI)$$

Το στιγμιότυπο του κύματος που διαδίδεται στο γραμμικό ελαστικό μέσο, τη χρονική στιγμή t_1 φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



4.1. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης του κύματος.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των σημείων Β και Γ τη χρονική στιγμή t_1. Να εξηγήσετε αν η διαφορά φάσης των σημείων Β και Γ εξαρτάται από τη χρονική στιγμή υπολογισμού της.

Μονάδες 6

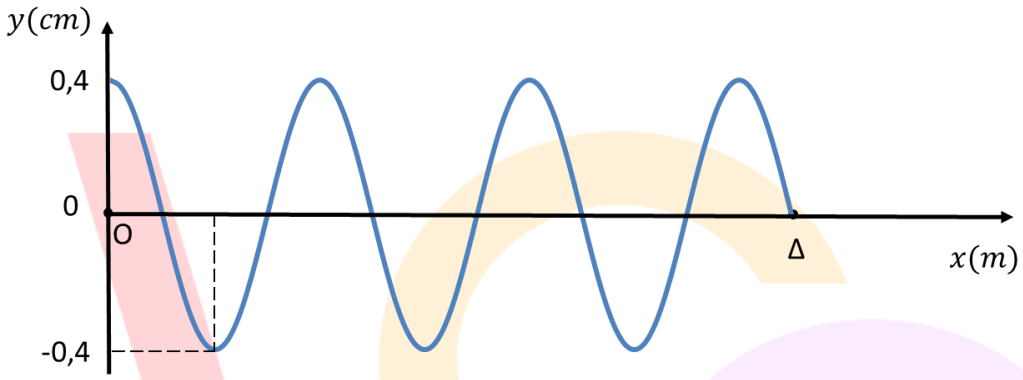
4.3. Να παραστήσετε γραφικά σε σύστημα ορθογώνιων βαθμολογημένων αξόνων την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του σημείου Β συναρτήσει του χρόνου μέχρι τη χρονική στιγμή $t = \frac{10}{20} s$.

Μονάδες 6

νέο φροντιστήριο

Σε ένα όμοιο γραμμικό ελαστικό μέσο μήκους L, ένα αρμονικό κύμα πλάτους A και συχνότητας $f = 5Hz$ που διαδίδεται κατά τη θετική φορά, συμβάλει με ένα αρμονικό κύμα ίδιου πλάτους και συχνότητας που διαδίδεται κατά την αντίθετη φορά. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αποκαθίσταται στάσιμο κύμα στο γραμμικό ελαστικό μέσο. Το στιγμιότυπο του στάσιμου

κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 0{,}85s$, κατά την οποία όλα τα σημεία του γραμμικού ελαστικού μέσου έχουν μηδενική ταχύτητα φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



4.4. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος και να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του σε σύστημα ορθογώνιων βαθμολογημένων αξόνων τη χρονική στιγμή $t_3 = 0{,}95s$.

Μονάδες 7

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η γενική μορφή της εξίσωσης ταλάντωσης της πηγής είναι: $y = A \cdot \eta\mu\omega t$, άρα $\omega = 10\pi \frac{rad}{s}$.

Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι το πλάτος του κύματος είναι ίσο με: $A = 0{,}2cm$

Επίσης, $\Delta x = \frac{3\lambda}{4} = 0{,}75m \Rightarrow \lambda = 1m$.

Η περίοδος της ταλάντωσης της πηγής και του κύματος είναι ίση με: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{1}{5}s$.

Το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης του κύματος είναι ίσο με: $\upsilon_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \upsilon_\delta = 5\frac{m}{s}$.

Μονάδες 6

4.2. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι: $x_B = \frac{5\lambda}{4}$ και $x_\Gamma = \frac{12\lambda}{4}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x_1 = 3{,}5\lambda$, επομένως:

$$x_1 = 3{,}5\lambda \Rightarrow \upsilon_\delta \cdot t_1 = 3{,}5\lambda \Rightarrow t_1 = 0{,}7s$$

Το σημείο Γ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_Γ.

$$x_\Gamma = \upsilon_\delta \cdot t_\Gamma \Rightarrow t_\Gamma = \frac{3\lambda}{\upsilon_\delta} \Rightarrow t_\Gamma = 0{,}6s < t_1$$

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_\Gamma \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Gamma}{\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{x_\Gamma - x_B}{\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{7\pi}{2}rad.$$

Μετά τη χρονική στιγμή t_Γ, κατά την οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Γ, η διαφορά φάσης των σημείων Β και Γ δεν εξαρτάται από τη χρονική στιγμή υπολογισμού της.

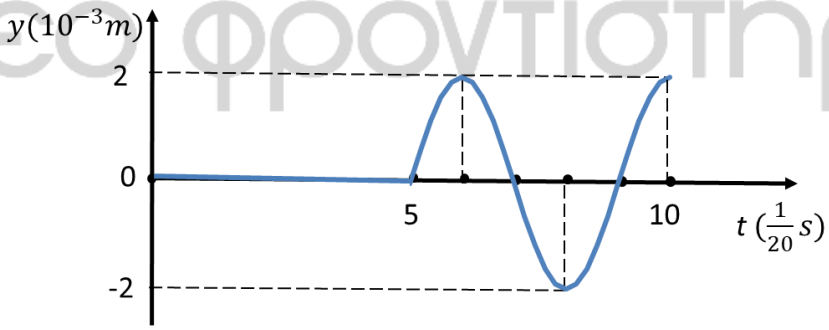
Μονάδες 6

4.3. Το σημείο Β αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_B.

$$x_B = \upsilon_\delta \cdot t_B \Rightarrow t_B = \frac{\frac{5\lambda}{4}}{\upsilon_\delta} \Rightarrow t_B = \frac{5}{20}s$$

Εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Β:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 2 \cdot 10^{-3}\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{5}{4}\right)\ (SI), \qquad t \geq \frac{5}{20}s$$



Μονάδες 6

4.4. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει ότι $2A = 0{,}4\ cm \Rightarrow A = 0{,}2\ cm$. Επίσης, το σημείο Ο του γραμμικού ελαστικού μέσου είναι κοιλία, το σημείο Δ είναι δεσμός και το μήκος του γραμμικού ελαστικού μέσου είναι ίσο με $L = \frac{13\lambda}{4}$.

Επειδή το γραμμικό ελαστικό μέσο είναι όμοιο με το προηγούμενο, η ταχύτητα διάδοσης των αρμονικών κυμάτων θα είναι ίδια, επομένως:

$$\upsilon_\delta = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon_\delta}{f} \Rightarrow \lambda = 1m$$

$$L = \frac{13}{4} m$$

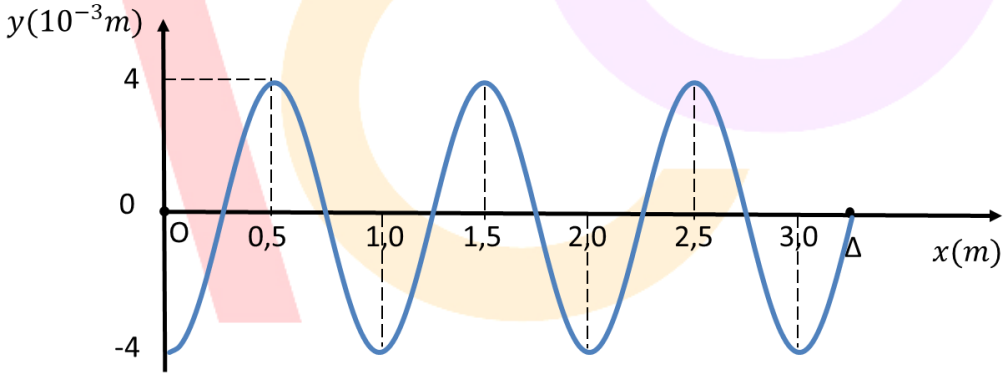
$$T = \frac{1}{f} = 0{,}2s$$

Εξίσωση στάσιμου κύματος:

$$y = 2A \cdot συν\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot ημ2\pi\frac{t}{T} \Rightarrow y = 4 \cdot 10^{-3} \cdot συν(2\pi x) \cdot ημ(10\pi t)\ \ (SI)\ \ \ 0 \le x \le \frac{13}{4} m$$

Το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_3 - t_2$ είναι ίσο με: $\Delta t = 0{,}1s \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$.

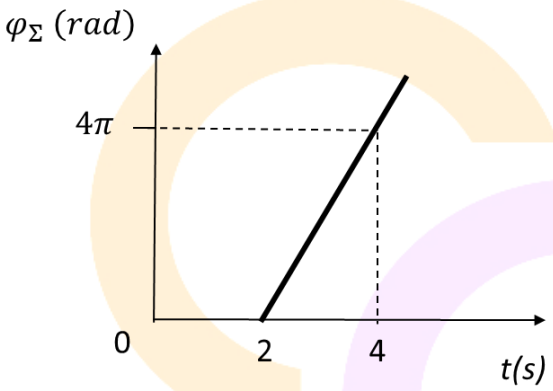
Τη χρονική στιγμή t_3 κάθε σημείο που ταλαντώνεται θα βρεθεί σε ακραία θέση αντίθετη εκείνης που βρισκόταν τη χρονική στιγμή t_2.



Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Κατά μήκος ενός γραμμικού, ομογενούς, ελαστικού μέσου διαδίδεται στη θετική κατεύθυνση του άξονα x'Ox ένα αρμονικό κύμα. Το σημείο Ο της θέσης $x_O = 0$ εκτελεί αρμονική ταλάντωση που περιγράφεται από την εξίσωση $y = 0{,}5\eta\mu\omega t\ (SI)$. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης φ_Σ του σημείου Σ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση $x_\Sigma = 8m$, συναρτήσει του χρόνου.



4.1. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος, την περίοδο και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Μονάδες 8

4.2. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος και να παραστήσετε γραφικά σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπό του τη χρονική στιγμή $t_1 = 2{,}5s$.

Μονάδες 8

4.3. Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Σ τη χρονική στιγμή t_1.

Μονάδες 4

4.4. Να γράψετε την εξίσωση ενός άλλου αρμονικού κύματος που πρέπει να συμβάλει με αυτό το αρμονικό κύμα για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στο γραμμικό ελαστικό μέσο.

Μονάδες 5

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το αρμονικό κύμα που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο έχει εξίσωση $y = A \cdot ημ2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

Όταν το σημείο Σ διεγερθεί από το κύμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση:

$$y_\Sigma = A \cdot ημφ_\Sigma$$

όπου $\varphi_\Sigma = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Sigma}{\lambda}\right)$ είναι η φάση του σημείου Σ.

Έστω t_Σ η χρονική στιγμή διέγερσης του σημείου Σ από το κύμα. Από $t_0 = 0$ έως t_Σ η φάση του σημείου Σ είναι μηδέν γιατί παραμένει ακίνητο στη θέση ισορροπίας του. Σύμφωνα με το διάγραμμα $\varphi_\Sigma - t$, το σημείο Σ διεγείρεται τη χρονική στιγμή $t_\Sigma = 2s$.

Το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα στο γραμμικό ελαστικό μέσο επομένως

$$x_\Sigma = \upsilon_\kappa \cdot t_\Sigma \Rightarrow \upsilon_\kappa = 4\frac{m}{s}$$

Η κλίση της γραφικής παράστασης $\varphi_\Sigma - t$ είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σημείου Σ και του αρμονικού κύματος.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi_\Sigma}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{4\pi}{2}\frac{rad}{s} \Rightarrow \omega = 2\pi\frac{rad}{s}$$

Όμως, $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 1s$

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $\upsilon_\kappa = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = 4m$

Μονάδες 8

4.2. Η γενική μορφή της εξίσωσης ταλάντωσης της πηγής είναι $y = A \cdot ημωt$, επομένως το πλάτος του κύματος είναι ίσο με $A = 0{,}5m$.

Σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς, η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι:

$$y = 0{,}5 \cdot ημ2\pi\left(t - \frac{x}{4}\right)\ (SI)$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2{,}5\ s$ το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x_1 = \upsilon_\kappa \cdot t_1 \Rightarrow x_1 = 10\ m$.

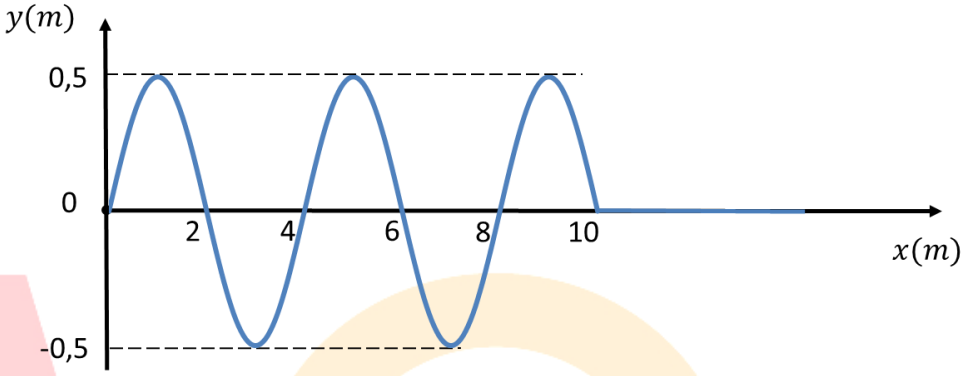
Εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική t_1:

$$y = 0{,}5 \cdot ημ2\pi\left(2{,}5 - \frac{x}{4}\right)\ (SI), \qquad 0 \le x \le 10\ m$$

Καταγράφουμε τις τιμές των x, y στον παρακάτω πίνακα

$x(m)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(m)$	0	+0,5	0	- 0,5	0	+0,5	0	-0,5	0	+0,5	0

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2{,}5\ s$.



Μονάδες 8

4.3. Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Σ δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_\Sigma = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Sigma}{\lambda}\right)$$

Τη χρονική στιγμή t_1, έχουμε:

$$\upsilon_\Sigma = 2\pi \cdot 0{,}5 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{2{,}5}{1} - \frac{8}{4}\right)\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_\Sigma = -\pi\frac{m}{s}$$

Μονάδες 4

4.4. Τα κύματα που συμβάλουν για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα έχουν ίδιο πλάτος, ίδια συχνότητα και διαδίδονται με αντίθετη φορά στο ίδιο ελαστικό μέσο. Το ένα αρμονικό κύμα έχει εξίσωση:

$$y = 0{,}5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{4}\right)\ (SI)$$

Επομένως, το άλλο αρμονικό κύμα θα έχει εξίσωση:

$$y = 0{,}5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t + \frac{x}{4}\right)\ (SI)$$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Κατά μήκος μιας χορδής μεγάλου μήκους, η οποία ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$, διαδίδονται ταυτόχρονα δύο αρμονικά κύματα που έχουν εξισώσεις

$$y_1 = 0{,}2\eta\mu 2\pi(10t - 5x)\ \ (S.I.) \ \text{ και } \ y_2 = 0{,}2\eta\mu 2\pi(10t + 5x)\ \ (S.I.)$$

Τα δύο κύματα συμβάλλουν δημιουργώντας στο ελαστικό μέσο στάσιμο κύμα.

4.1. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στη χορδή.

Μονάδες 6

4.2. Να αποδείξετε ότι στην αρχή $O(x = 0)$ του άξονα δημιουργείται κοιλία.

Μονάδες 6

4.3. Να διερευνήσετε αν στο σημείο $B(x_B = 0{,}25\ m)$ σχηματίζεται δεσμός ή κοιλία.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης καθώς και τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ της χορδής που έχει τετμημένη $x_M = 0{,}025\ m$.

Μονάδες 7

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Από τις εξισώσεις των δύο κυμάτων προκύπτει:

$$T = \frac{1}{10}\ s \Rightarrow T = 0{,}1\ s,\ \ \lambda = \frac{1}{5}\ m \Rightarrow \lambda = 0{,}2\ m,\ \ A = 0{,}2\ m$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι της μορφής:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{T}t \Rightarrow y = 0{,}4\sigma\upsilon\nu(10\pi x) \cdot \eta\mu(20\pi t) \qquad (S.I.)$$

Μονάδες 6

4.2. Όλα τα σημεία που είναι κοιλίες ταλαντώνονται με πλάτος $A' = 2A = 0{,}4\ m$. Επομένως για την αρχή $O(x = 0)$ έχουμε:

$$A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 0{,}4|\sigma\upsilon\nu(10\pi x)| \Rightarrow A'_O = 0{,}4\ m$$

Επομένως στο σημείο $O(x = 0)$δημιουργείται κοιλία.

Μονάδες 6

4.3. Βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Β που έχει τετμημένη $x_B = 0{,}25\ m$. Έχουμε:

$$A'_B = 0{,}4|\sigma\upsilon\nu(10\pi \cdot 0{,}25)| \Rightarrow A'_B = 0$$

Συνεπώς στο σημείο Β σχηματίζεται δεσμός.

Μονάδες 6

4.4. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ της χορδής υπολογίζεται από τον τύπο:

$$A'_M = 0{,}4|\sigma\upsilon\nu(10\pi \cdot 0{,}025)| \Rightarrow A'_B = 0{,}2\sqrt{2}\ m$$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου αυτού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{max} = \omega A'_B = \frac{2\pi}{T} \cdot A'_B \Rightarrow \upsilon_{max} = 4\pi\sqrt{2}\ m/s$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Υλικό σημείο Ο ομογενούς ελαστικής χορδής, που έχει επιλεγεί ως αρχή των αξόνων ($x = 0$), αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση $y = A\eta\mu(\omega t)$ και κάθετα στη διεύθυνση της χορδής. Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο μηδενίζεται 20 φορές σε κάθε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5\ s$. Το κύμα που παράγεται διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα $x'Ox$ κατά μήκος της χορδής που διέρχεται από το σημείο Ο με ταχύτητα $\upsilon = 2\ m/s$. Στη διάρκεια μιας περιόδου της ταλάντωσής του το υλικό σημείο Ο διανύει διάστημα $s = 0{,}2\ m$.

4.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος που παράγεται.

Μονάδες 7

4.2. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που αρχίζει να κινείται ένα σημείο Μ, που βρίσκεται στη θέση $x_M = -1\ m$ της χορδής όπως επίσης και την απομάκρυνση y_M, από τη θέση ισορροπίας του σημείου Μ, τη χρονική στιγμή $t = \frac{13}{24} s$.

Μονάδες 6

4.3. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη της θέσης ($\varphi - x$), τη χρονική στιγμή $t = 2\ s$.

Μονάδες 6

4.4. Να βρείτε τις συντεταγμένες θέσης των σημείων της χορδής, τα οποία βρίσκονται στον αρνητικό ημιάξονα, σε απόσταση μικρότερη από $2\ m$ από την αρχή των αξόνων Ο και τη χρονική στιγμή $t = 1\ s$, έχουν απομάκρυνση $y = -5\ cm$.

Μονάδες 6

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε περίοδο T, η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης μηδενίζεται *2* φορές. Άρα το υλικό σημείο εκτελεί $N = \frac{20}{2} = 10$ ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα Δt. Επομένως, με βάση τον ορισμό της συχνότητας:

$$f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{10}{5} = 2\ Hz$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = \frac{1}{f} = 0{,}5\ s$ ενώ η κυκλική συχνότητα $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi\ rad/s$.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = 1\ m$$

Το διάστημα που διανύει το υλικό σημείο Ο στη διάρκεια μιας περιόδου είναι ίσο με $s = 4A$, οπότε:

$$s = 4A \ \Rightarrow 0{,}2 = 4A \ \Rightarrow A = 5 \cdot 10^{-2}\ m$$

Το εγκάρσιο κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 5 \cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi(2t + x) \qquad (S.I.)$$

Μονάδες 7

4.2. Το εγκάρσιο κύμα φτάνει στο σημείο Μ μετά από χρόνο:

$$t = \frac{|x_M|}{v} = 0{,}5\ s$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη εξίσωση του κύματος που βρήκαμε, για $t = \frac{13}{24} s$ και $x_M = -1\ m$ έχουμε:

$$y_M = 5 \cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(2 \cdot \frac{13}{24} - 1\right) = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ m$$

Μονάδες 6

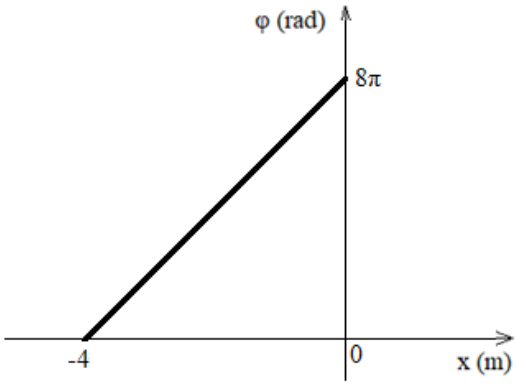
4.3. Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 5 \cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi(2t + x) \qquad (S.I.)$$

Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 2\ s$ είναι:

$$\varphi = 2\pi(4 + x) \qquad (S.I.)$$

Το διάγραμμα της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη της θέσης $(\varphi - x)$ φαίνεται στο παραπλεύρως σχήμα.



Μονάδες 6

4.4. Για τα σημεία τα οποία τη χρονική στιγμή $t = 1\ s$, έχουν απομάκρυνση $y = -5\ cm$ έχουμε:

$$-5 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-2}\ \eta\mu 2\pi(2 + x) \Rightarrow \eta\mu 2\pi(2 + x) = -1 \Rightarrow$$

$$2\pi(2+x) = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = k - \frac{5}{4}$$

Για $k = 0$, $x = -1{,}25\ m$ (δεκτή), για $k = 1$, $x = -0{,}25\ m$ (δεκτή), για $k = 2$, $x = 0{,}75\ m$ (απορρίπτεται), για $k = 3$, $x = 1{,}75\ m$ (απορρίπτεται), για $k = -1$, $x = -2{,}25\ m$ (απορρίπτεται), όπως απορρίπτονται και όλες οι υπόλοιπες. Συνεπώς, οι συντεταγμένες θέσης των σημείων της χορδής, τα οποία βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από 2 m από την αρχή των αξόνων Ο και στον αρνητικό ημιάξονα, είναι:

$$x_1 = -1{,}25\ m, \qquad x_2 = -0{,}25\ m$$

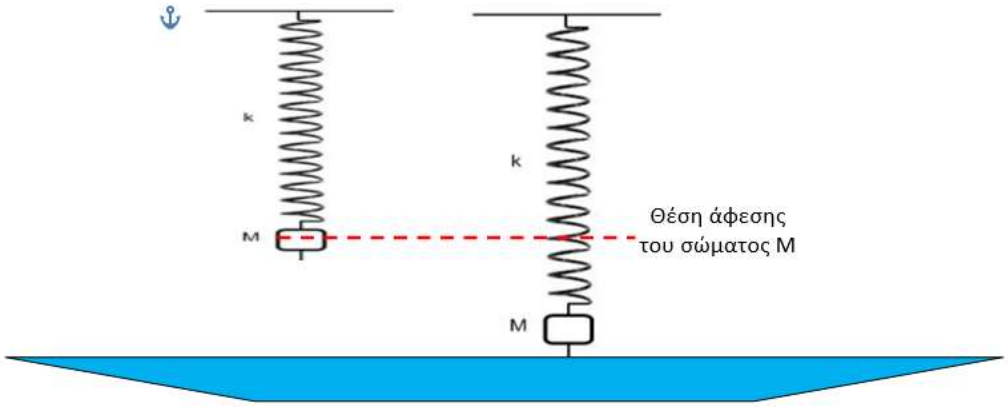
Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100\ \frac{N}{m}$ και φυσικού μήκους (Φ.Μ.) $l_0 = 1{,}2m$, κρέμεται από οροφή. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, κρεμάμε σώμα αμελητέων διαστάσεων, μάζας $M = 2{,}5\ kg$ και την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω.



4.1. Να προσδιορίσετε την χρονική εξίσωση της ταχύτητας του ταλαντωτή και την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται ο ταλαντωτής σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή του.

Μονάδες 7

4.2. Στο κάτω μέρος του σώματος που ταλαντώνεται, υπάρχει πολύ μικρή ακίδα, αμελητέας μάζας, ενώ χαμηλότερα υπάρχει δοχείο με υγρό που ηρεμεί. Πόση πρέπει να είναι η απόσταση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού από την οροφή, ώστε η ακίδα μόλις να την αγγίζει και να δημιουργεί κύματα στην επιφάνεια του υγρού.

Μονάδες 4

4.3. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ του κύματος που διαδίδεται στην επιφάνεια του υγρού, αν γνωρίζουμε ότι από την στιγμή που αφήσαμε ελεύθερο το σύστημα να ταλαντωθεί, το κύμα έφτασε σε ένα σημείο Λ στην επιφάνεια του υγρού που απέχει από την πηγή του $x_\Lambda = 1{,}5m$ σε χρόνο $t_\Lambda = 5{,}5s$.

Μονάδες 7

4.4. Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή της διαφοράς φάσης δύο σημείων της επιφάνειας του υγρού που απέχουν απόσταση $|\Delta x_{AB}| = 1{,}2m$ και είναι συνευθειακά με την πηγή του κύματος.

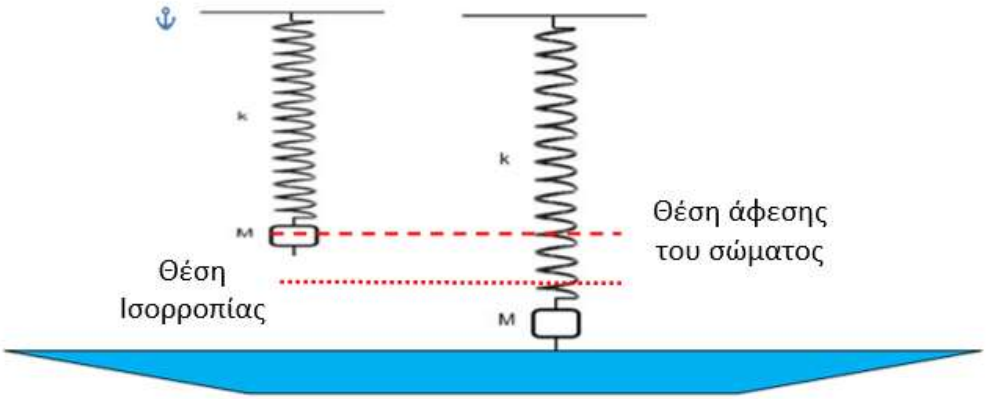
Μονάδες 7

Δίνονται $\pi^2 \simeq 10 \rightarrow \sqrt{10} \simeq \pi$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το σώμα που κρεμάσαμε στο ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση που ξεκινά από την θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης (πλάτος), αφού όταν το αφήνουμε ελεύθερο είναι στιγμιαία ακίνητο.



Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή απέχει από την θέση που αφήνουμε ελεύθερο το σώμα, απόσταση:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{W} = \vec{0}$$

$$k\Delta l = Mg \Leftrightarrow 100\frac{N}{m}\cdot\Delta l = 2{,}5kg\cdot 10\frac{m}{s^2} \Leftrightarrow \Delta l = \frac{1}{4}m = A$$

Η περίοδος T της ταλάντωσης είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\sqrt{\frac{M\pi^2}{k}} = 2\sqrt{\frac{2{,}5kg\cdot 10}{100\frac{N}{m}}} = 2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}s^2} \Leftrightarrow T = 1\,s$$

άρα η γωνιακή συχνότητα ω, είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ rad/s$$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης προκύπτει για $t = 0$ και $x = A$:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Leftrightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

και άρα $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

Άρα, η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος είναι:

$$x = 0{,}25\cdot\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad S.I.$$

Η ζητούμενη χρονική εξίσωση της ταχύτητας θα είναι:

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \upsilon = 2\pi\cdot 0{,}25\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\upsilon = \frac{\pi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad S.I.$$

και η εξάρτηση της συνισταμένης δύναμης, δηλαδή της δύναμης επαναφοράς, από την απομάκρυνση:

$$\Sigma F = -Dx = -kx = -100x \quad \text{για} \quad -0{,}25 \le x \le 0{,}25 \qquad S.I.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

Μονάδες 7

4.2. Η απόσταση από την οροφή θα είναι:

$$d = l_0 + 2A = 1{,}2m + 2 \cdot 0{,}25m \Leftrightarrow d = 1{,}7m$$

Μονάδες 4

4.3. Ο χρόνος για να φτάσει το κύμα στο σημείο που απέχει x από την πηγή, είναι το άθροισμα του χρόνου t_1 μέχρι να χτυπήσει η ακίδα για πρώτη φορά την επιφάνεια του υγρού συν τον χρόνο διάδοσης του κύματος t_2:

$$t_\Lambda = t_1 + t_2 \Leftrightarrow t_\Lambda = \frac{T}{2} + t_2 \Leftrightarrow t_2 = t_\Lambda - \frac{T}{2} = 5{,}5s - 0{,}5s \Leftrightarrow t_2 = 5s$$

Οπότε, το μήκος κύματος θα είναι:

$$\upsilon = \frac{x_\Lambda}{t_2} = \lambda f \Leftrightarrow \lambda = \frac{x_\Lambda}{f \cdot t_2} = \frac{1{,}5\ m}{1s^{-1} \cdot 5s} \Leftrightarrow \lambda = 0{,}3m$$

αφού η συχνότητα της ταλάντωσης της ακίδας-πηγής είναι ίδια με την συχνότητα διάδοσης του κύματος.

Μονάδες 7

4.4. Οι φάσεις δύο σημείων Α και Β είναι:

$$\varphi_A = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right)$$

$$\varphi_B = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right)$$

Άρα, η διαφορά φάσης τους προκύπτει:

$$|\Delta\varphi_{AB}| = |\varphi_A - \varphi_B| = \left|2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right)\right| = \left|2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_A}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{x_B}{\lambda}\right| = 2\pi\frac{|x_B - x_A|}{\lambda}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα του προβλήματος:

$$|\Delta\varphi_{AB}| = 2\pi\frac{|\Delta x_{AB}|}{\lambda} = 2\pi\ rad\frac{1{,}2m}{0{,}3m} = 8\pi\ rad$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Πηγή παραγωγής αρμονικών κυμάτων αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ στη θέση $x = 0$, με ταχύτητα προς τη θετική φορά του ημιάξονα Oy . Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής δίνεται από την σχέση $y = 10\eta\mu 2\pi t$ (t σε s και y σε cm). Το παραγόμενο κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του ημιάξονα Ox με ταχύτητα $\upsilon_1 = 0{,}5\,\frac{m}{s}$.

4.1. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που θα αρχίσει να ταλαντώνεται ένα σημείο Σ του ελαστικού μέσου το οποίο βρίσκεται στη θέση $x_\Sigma = 2{,}3\ m$.

Μονάδες 4

4.2. Ποια είναι η φάση της πηγής όταν το σημείο Σ φτάσει για πρώτη φορά σε ακραία θέση ταλάντωσης;

Μονάδες 6

4.3. Να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Σ από την θέση ισορροπίας στο χρονικό διάστημα $t \geq 0$.

Μονάδες 7

4.4. Να απεικονίσετε γραφικά την φάση του σημείου Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο t.

Μονάδες 8

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Για να αρχίσει η ταλάντωση του σημείου Σ θα πρέπει να φτάσει σε αυτό η ενέργεια που μεταφέρει το κύμα. Επειδή το κύμα διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο με σταθερή ταχύτητα, το χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί για να διανύσει απόσταση 2,3m είναι

$$\Delta t_1 = \frac{x_\Sigma}{\upsilon_1} = \frac{2{,}3\text{m}}{0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4{,}6\text{s}$$

Μονάδες 4

4.2. Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής των αρμονικών κυμάτων $y = 10\eta\mu 2\pi t$ (t σε s και y σε cm) αντιστοιχεί στην μορφή $y = A\eta\mu\omega t$. Συνεπώς η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης των μορίων του μέσου είναι $\omega = 2\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ και το πλάτος ταλάντωσης είναι $A = 10\text{cm}$. Το κύμα έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi}\text{s} = 1\text{s}$ και μήκος κύματος $\lambda_1 = \upsilon \cdot T = 0{,}5\text{ m}$. Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να φτάσει το σημείο Σ για πρώτη φορά σε ακραία θέση ταλάντωσης είναι το ¼ της περιόδου, οπότε μέχρι εκείνη την στιγμή η πηγή θα έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα $t_2 = \Delta t_1 + \frac{T}{4} = 4{,}6\text{s} + \frac{1}{4}\text{s} = 4{,}85\text{s}$. Εκείνη την στιγμή, η φάση της πηγής θα είναι

$$\varphi = 2\pi t_2 = 2\pi \cdot 4{,}85\text{ rad} = 9{,}7\pi\text{ rad}$$

Μονάδες 6

4.3. Στο χρονικό διάστημα $0\text{s} \le t \le 4{,}6\text{s}$ το σημείο Σ είναι ακίνητο, οπότε $y_\Sigma = 0$.

Για $t \ge 4{,}6\text{s}$ η απομάκρυνση του σημείου Σ από την θέση ισορροπίας δίνεται από την σχέση

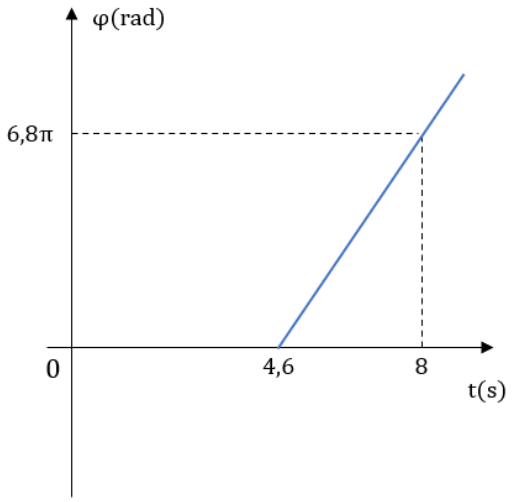
$$y_\Sigma = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Sigma}{\lambda}\right) = 0{,}1\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{1} - \frac{2{,}3}{0{,}5}\right) = 0{,}1\eta\mu 2\pi(t - 4{,}6) \quad \text{(S.I.)}$$

Μονάδες 7

4.4. Το σημείο Σ στο χρονικό διάστημα $t \le 4{,}6\text{s}$ είναι ακίνητο, επομένως δεν έχει φάση ταλάντωσης. Για $t \ge 4{,}6\text{s}$ το σημείο Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η φάση του δίνεται από την σχέση

$$\varphi_\Sigma = 2\pi(t - 4{,}6) \quad \text{(S.I.)}$$

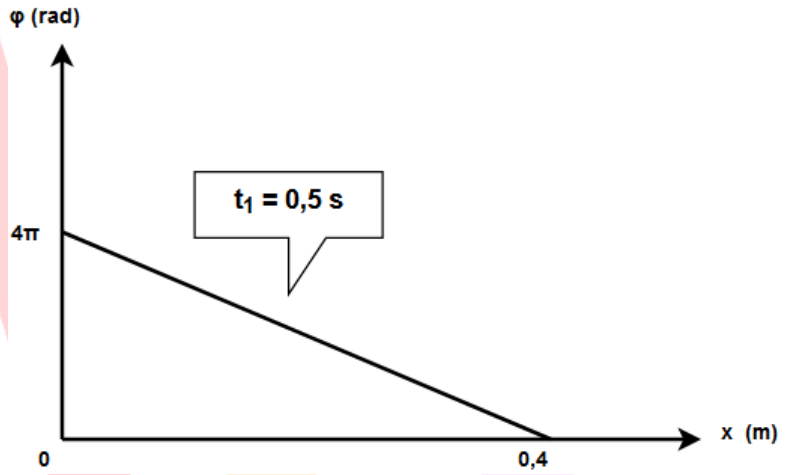
Η φάση μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο και αν θέσουμε $t = 8\text{s}$ βρίσκουμε ότι $\varphi_\Sigma = 6{,}8\pi\text{ rad}$. Η γραφική παράσταση απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4

Η πηγή κύματος Ο αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, που περιγράφεται από την εξίσωση $\psi = A\eta\mu\omega t$. Το εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους $A = 0{,}05\ m$ διαδίδεται κατά τη θετική φορά σε οριζόντια ελαστική χορδή που εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$. Θεωρούμε ότι το σημείο της χορδής στη θέση $x = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει μηδενική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του και θετική ταχύτητα. Η γραφική παράσταση της φάσης του κύματος φ, την χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}5\ s$, σε σχέση με την απόσταση x από την αρχή του άξονα $(x = 0)$ παριστάνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



4.1. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος $(S.I)$ που δημιουργείται.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του ενός σημείου του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στη θέση $x = 0{,}4\ m$ τη χρονική στιγμή $0{,}5625s$.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης και την επιτάχυνση ενός υλικού σημείου της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = 0{,}2\ m$ τη χρονική στιγμή $0{,}5\ s$.

Μονάδες 6

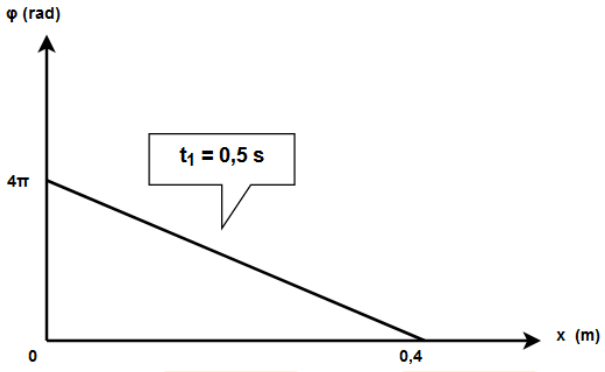
4.4. Να απεικονίσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $T + \frac{T}{4} = 0{,}3125\ s$

Μονάδες 7

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1.



Με τη βοήθεια των πληροφοριών της γραφικής παράστασης της σχέσης:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

εάν θέσουμε $x = 0\ m$, $t_1 = 0{,}5\ s$, $\varphi = 4\pi\ rad$ προκύπτει ότι:

$$4\pi = 2\pi\left(\frac{0{,}5}{T} - \frac{0}{\lambda}\right) \text{ ή } 4\pi = 2\pi\left(\frac{0{,}5}{T}\right) \text{ ή } 4 = \frac{1}{T} \text{ ή } T = \frac{1}{4}\ s$$

Επίσης αν θέσουμε $x = 0{,}4\ m$, $t_1 = 0{,}5\ s$, $\varphi = 0$ προκύπτει ότι:

$$0 = 2\pi\left(\frac{0{,}5}{\frac{1}{4}} - \frac{0{,}4}{\lambda}\right) \text{ ή } 0 = 2\pi\left(2 - \frac{0{,}4}{\lambda}\right) \text{ ή } 2 = \frac{0{,}4}{\lambda} \text{ ή } \lambda = \frac{0{,}4}{2} \text{ ή } \lambda = 0{,}2\ m$$

Τελικά η εξίσωση του κύματος είναι:

$$\psi = 0{,}05\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{4}} - \frac{x}{0{,}2}\right) \text{ ή } \psi = 0{,}05\eta\mu 2\pi(4t - 5x) \quad (S.I)$$

Μονάδες 6

4.2. Επίσης αν θέσουμε $x = 0{,}4\ m$ και $t = 0{,}5625\ s$ στην παραπάνω εξίσωση του κύματος προκύπτει ότι η απομάκρυνση του εν λόγω σημείου του ελαστικού μέσου από τη θέση ισορροπίας του είναι:

$$\psi = 0{,}05\eta\mu 2\pi(4t - 5x)m \text{ ή } \psi = 0{,}05\eta\mu 2\pi(4 \cdot 0{,}5625 - 5 \cdot 0{,}4)m \text{ ή}$$

$$\psi = 0{,}05\eta\mu 2\pi(2{,}25 - 2)m \text{ ή } \psi = 0{,}05\eta\mu 2\pi\left(\frac{1}{4}\right)m \text{ ή } \psi = 0{,}05\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)m$$

$$\text{ή } \psi = 0{,}05\ m$$

Μονάδες 6

4.3. Από τις εξισώσεις που περιγράφεται η ταχύτητα και η επιτάχυνση του υλικού σημείου στη θέση $x = 0{,}2\ m$ τη χρονική στιγμή $0{,}5\ s$ έχουμε:

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\mu\varepsilon\ \upsilon_{max} = \omega \cdot A = \frac{2\pi}{T} \cdot A = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} \cdot 0{,}05\frac{m}{s} = 8 \cdot \pi \cdot 0{,}05\frac{m}{s} = 0{,}4 \cdot \pi\ \frac{m}{s}$$

Εάν αντικαταστήσουμε:

$$\upsilon = 0{,}4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{0{,}5}{\frac{1}{4}} - \frac{0{,}2}{0{,}2}\right)\frac{m}{s}\ \text{ή}\ \ \upsilon = 0{,}4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(2-1)\ \frac{m}{s}\ \text{ή}\ \ \upsilon = 0{,}4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi\ \frac{m}{s}$$

$$\text{ή}\ \ \upsilon = 0{,}4\pi\ \frac{m}{s}$$

Έχοντας ήδη υπολογίσει την φάση, για την επιτάχυνση έχουμε:

$$\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\ \text{ή}\ \ \alpha = -\alpha_{max}\eta\mu 2\pi\ \text{ή}\ \ \ \alpha = 0\ \frac{m}{s^2}$$

Μονάδες 6

4.4. Υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος:

$$\lambda = \upsilon \cdot T\ \text{ή}\ \ 0{,}2 = \upsilon \cdot \frac{1}{4}\ \text{ή}\ \ \upsilon = 0{,}8\ \frac{m}{s}$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε την απόσταση x_1 που έχει διαδοθεί το κύμα:

$$x_1 = \upsilon \cdot t_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}3125m = 0{,}25\ m\ \text{ή}\ \ x_1 = 0{,}25\ m$$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στην θέση x_1 ξεκινά να ταλαντώνεται την στιγμή $T + \frac{T}{4}$. Άρα όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου με $x > x_1$ είναι ακίνητα.

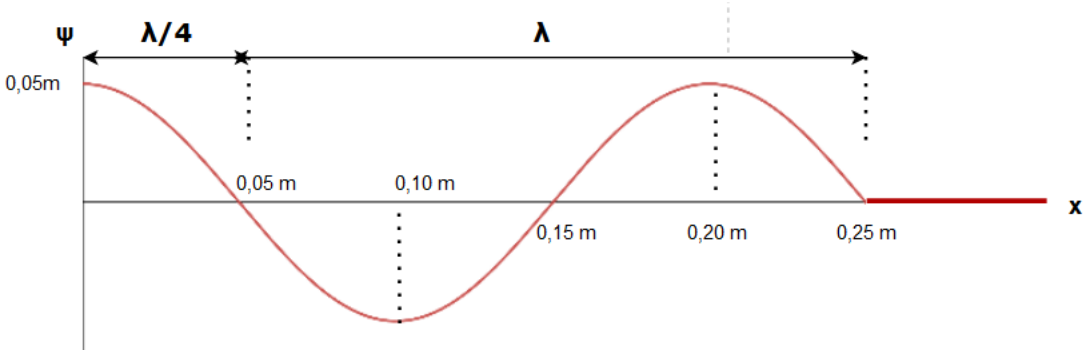
Μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε τις απομακρύνσεις των σημείων με $x < x_1$ (που είναι ήδη σε ταλάντωση) εκφράζοντας το x_1 ως (υπο)πολλαπλάσιο του μήκους κύματος.

Διαιρούμε το x_1 διά λ και βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{x_1}{\lambda} = \frac{0{,}25\ m}{0{,}2\ m} = 1{,}25\ \text{ή}\ \ x_1 = 1{,}25 \cdot \lambda\ \text{ή}\ \ x_1 = \lambda + \frac{\lambda}{4}$$

Δηλαδή το κύμα έχει προλάβει να διαδοθεί σε απόσταση $\lambda + \frac{\lambda}{4} = \frac{5\lambda}{4}$. Για την κατασκευή του στιγμιότυπου θα ξεκινήσουμε από την θέση x_1 και θα κινηθούμε προς την αρχή (θέση της πηγής) για απόσταση $\lambda + \frac{\lambda}{4}$.

νέο φροντιστήριο



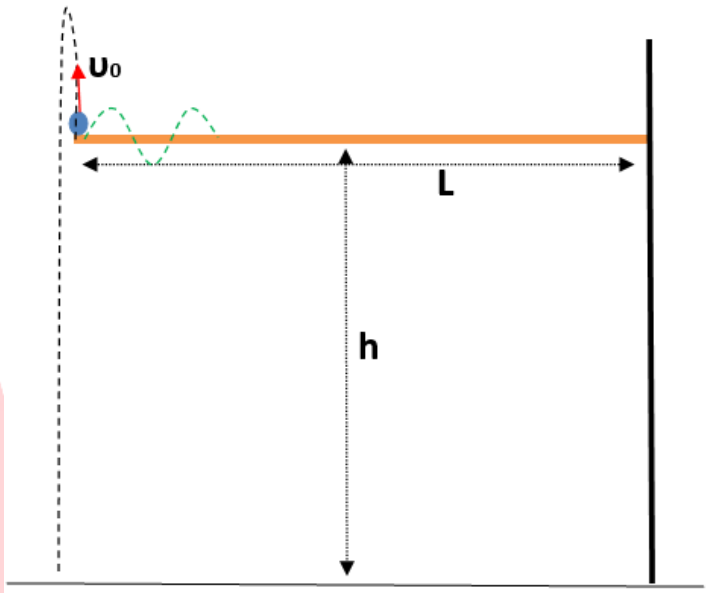
Μονάδες 7

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παρατηρούμε ότι με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε πως η πηγή διέρχεται από την θέση $\psi = A$, αποτέλεσμα που είναι συμβατό με το γεγονός ότι η ταλάντωσή της έχει διάρκεια $T + \frac{T}{4}$. Αυτή είναι μια μέθοδος γρήγορου ελέγχου της ορθότητας της γραφικής παράστασης στην οποία καταλήξαμε.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σημειακό σώμα πέφτει στο ακραίο σημείο οριζόντιου γραμμικού ελαστικού μέσου, μήκους $L = 6{,}125m$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο, σε ύψος $h = 15m$ από το έδαφος.



Το σώμα μετά την κρούση, αναγκάζει το άκρο του ελαστικού μέσου να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 0{,}4m$. Το χρονικό διάστημα για να ξαναπεράσει το άκρο του ελαστικού μέσου για πρώτη φορά από την θέση ισορροπίας του είναι $t = \frac{1}{50}s$. Εκείνη τη στιγμή το σώμα αποχωρίζεται από το ελαστικό μέσο και εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $\upsilon_0 = 20m/s$. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $(g = 10\frac{m}{s^2})$ και θεωρούμε ότι δεν ασκούνται δυνάμεις αντίστασης σε κανένα σώμα.

4.1. Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο το σώμα θα φθάσει στο έδαφος.

Μονάδες 8

4.2. Από το ταλαντούμενο άκρο του ελαστικού μέσου ξεκινά να διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με νέα συχνότητα διπλάσια από εκείνη που ταλαντώνονταν πριν εκτοξευτεί το σώμα. Αν η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon_\delta = 25m/s$, να γράψετε:

(i) την εξίσωση του τρέχοντος κύματος (πριν συμβεί ανάκλαση του κύματος στο ακλόνητο άκρο) και

(ii) την εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος την χρονική στιγμή $t' = 0{,}2s$

Μονάδες 8

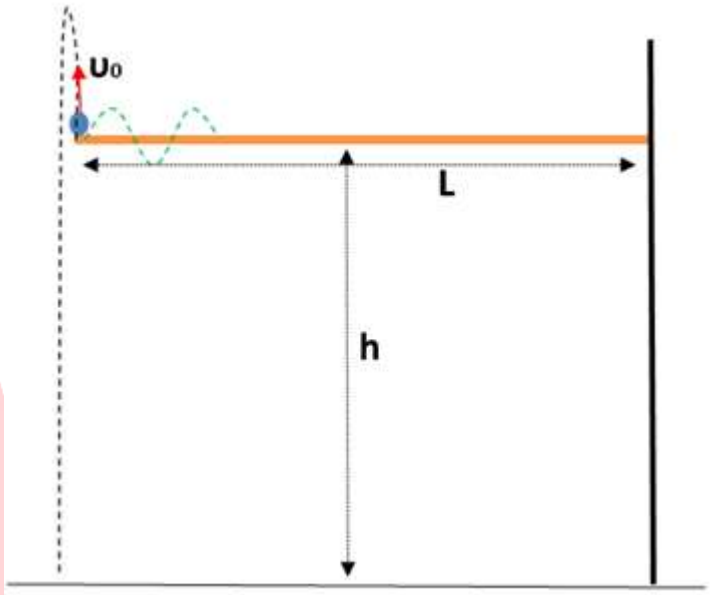
4.3. Για το μήκος του ελαστικού μέσου $(L = 6{,}125m)$ που δόθηκε, να εξετάσετε αν θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα και εφόσον δημιουργηθεί να προσδιορίσετε τον αριθμό των δεσμών και των κοιλιών του πάνω στο μέσο.

Μονάδες 9

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το σώμα με την πτώση του αναγκάζει το άκρο του μέσου να ταλαντωθεί και τελικά εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 20\ \mathrm{m/s}$ εκτελώντας κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση g. Έρχεται σε επαφή με το έδαφος στη θέση $x = -15\mathrm{m}$, σε χρόνο:



$$x = \upsilon t - \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow -15\mathrm{m} = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t - \frac{1}{2}10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}\mathrm{s} \Leftrightarrow t_1 = 3\mathrm{s}\ \text{ ή } t_2 = -1\mathrm{s}\ \ (\text{απορρίπτεται})$$

Άρα ο χρόνος πτώσης είναι: $t_1 = 3\mathrm{s}$

Μονάδες 8

4.2. Εφόσον ο χρόνος για να εκτελέσει μισή περίοδο ταλάντωσης το σύστημα σώμα-ελαστικό μέσο είναι $t = \frac{1}{50}\mathrm{s}$, προκύπτει: $T = 2\cdot\frac{1}{50}\mathrm{s} = \frac{1}{25}\mathrm{s}$, και άρα η συχνότητα θα είναι $f = \frac{1}{T} = 25\mathrm{Hz}$.

Η συχνότητα ταλάντωσης μόνο του ελαστικού μέσου, αφού εκτοξευθεί το σώμα, δίνεται διπλάσια.

Δηλαδή $f' = 50\mathrm{Hz}$.

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon_\delta = 25\mathrm{m/s}$, οπότε βρίσκουμε ότι το μήκος κύματος θα είναι:

$$\upsilon_\delta = \lambda\cdot f' \Leftrightarrow \lambda = \frac{25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{50\mathrm{s}^{-1}} = 0{,}5\mathrm{m}$$

Η εξίσωση του κύματος θα είναι:

$$y = A\cdot \eta\mu 2\pi\left(f't - \frac{x}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y = 0{,}4\cdot \eta\mu 2\pi(50\cdot t - 2\cdot x) \qquad \mathrm{S.I.}$$

και η αντίστοιχη του στιγμιότυπου την $t' = 0{,}2\ \mathrm{s}$, θα είναι:

$$y = 0{,}4\cdot \eta\mu 2\pi(50\cdot 0{,}2 - 2\cdot x) = 0{,}4\cdot \eta\mu 2\pi(10 - 2\cdot x) \qquad (\mathrm{S.I.})$$

$$0 \le x \le 5\mathrm{m}$$

Μονάδες 8

4.3. Αφού το ελαστικό μέσο είναι ελεύθερο στο ένα άκρο του και ακλόνητα στερεωμένο στο άλλο, αν δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, θα παρουσιάζει κοιλία στο ελεύθερο άκρο και δεσμό στο ακλόνητο.

Άρα για το μήκος L του μέσου είναι:

$$L = k\lambda_{\sigma\tau} + \frac{\lambda_{\sigma\tau}}{2} = (2k+1)\frac{\lambda_{\sigma\tau}}{2} \Leftrightarrow L = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow 2k+1 = \frac{4L}{\lambda} \Leftrightarrow k = \frac{\frac{4L}{\lambda}-1}{2} = 24$$

Εφόσον το k προέκυψε ακέραιος αριθμός, δημιουργούνται στάσιμα κύματα.

Το k εκφράζει τον αριθμό των ατράκτων του στάσιμου κύματος, οπότε ο αριθμός των δεσμών θα είναι:

$$N_{\Delta} = k + 1 = 25$$

διότι για την πρώτη άτρακτο απαιτούνται 2 δεσμοί και από κει και πέρα, για κάθε άτρακτο απαιτείται άλλος ένας δεσμός.

Ο αριθμός των κοιλιών θα είναι ο αριθμός των ατράκτων συν την πρώτη κοιλία στο ελεύθερο άκρο:

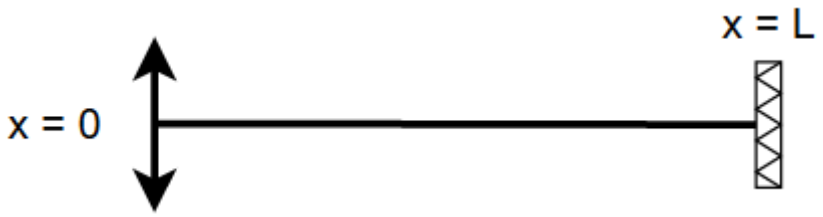
$$N_K = k + 1 = 25$$

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Λεπτή ατσάλινη χορδή έχει μήκος $L = \frac{7}{4}\ m$ και έχει τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα x. Η χορδή διεγείρεται με κατάλληλη διάταξη σε ταλάντωση με το ένα της άκρο σταθερό στο σημείο $x = L$ ενώ το άλλο άκρο είναι ελεύθερο στο $x = 0$.



4.1. Να δείξετε ότι οι συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης της χορδής που μπορούμε να πετύχουμε με την κατάλληλη διάταξη κάθε φορά για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα είναι:

$$f = \frac{\upsilon}{4L}(2n+1)$$

Όπου υ είναι η ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στη χορδή, και n ακέραιος αριθμός. Δηλαδή οι τιμές των συχνοτήτων θα είναι:

$$f_1 \quad , \quad 3 \cdot f_1 \quad , \quad 5 \cdot f_1 \quad , \quad 7 \cdot f_1 \quad , \ldots \text{ όπου } f_1 = \frac{\upsilon}{4L}$$

Μονάδες 7

4.2. Αν δίνεται ότι $f_1 = 50\ Hz$, να βρείτε το αντίστοιχο μήκος κύματος λ_1 του εγκάρσιου κύματος το οποίο όταν διαδίδεται στην χορδή, δημιουργεί, λόγω της ανάκλασής του στο δεσμευμένο άκρο, στάσιμο κύμα.

Μονάδες 7

4.3. Να υπολογίσετε την σταθερή ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στα οποία οφείλεται το στάσιμο κύμα.

Μονάδες 6

Στη συνέχεια, με την κατάλληλη διάταξη, στην χορδή διαδίδεται κύμα με συχνότητα $f_7 = 7 \cdot f_1 = 350\ Hz$.

4.4. Να γράψετε (στο $S.I.$) την εξίσωση του στάσιμου κύματος για συχνότητα πηγής ίση με f_7. Δίνεται ότι η μέγιστη απομάκρυνση ενός σημείου της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = \frac{\lambda}{8}$ είναι $2\sqrt{2}$ cm.

Μονάδες 5

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Τα σημεία τα οποία βρίσκονται σε θέση:

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

είναι οι δεσμοί του στάσιμου κύματος και έχουν μηδενικό πλάτος ταλάντωσης δηλαδή παραμένουν συνεχώς ακίνητα.

Γνωρίζουμε ότι το σημείο Γ στη θέση $x = L$ είναι δεσμός και το σημείο Β στη θέση $x = 0$ είναι κοιλία. Αν το Γ είναι ο αμέσως επόμενος δεσμός μετά από την κοιλία Β, τότε θα ισχύει:

$$L = \frac{\lambda}{4}$$

Ενδέχεται όμως το Γ να είναι ο μεθεπόμενος δεσμός μετά από την κοιλία Β. Οπότε:

$$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = 3\frac{\lambda}{4}$$

Αν μεταξύ των Γ και Α μεσολαβούν δύο δεσμοί, ισχύει:

$$L = \frac{\lambda}{4} + 2\frac{\lambda}{2} = 5\frac{\lambda}{4}$$

Γενικεύοντας μπορούμε να γράψουμε:

$$L = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4} + 2n\frac{\lambda}{4} = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \ , \ n \geq 0$$

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που, συμβάλλοντας, δίνουν το στάσιμο κύμα είναι:

$$\upsilon = \lambda \cdot f$$

Εάν συνδυάσουμε τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε:

$$L = (2n+1)\frac{\upsilon}{4f} \quad \text{ή} \quad f = (2n+1)\frac{\upsilon}{4L} \quad \text{ή} \quad f = (2n+1)f_1 \ \text{με} \ f_1 = \frac{\upsilon}{4L}$$

Μονάδες 7

4.2. Η μικρότερη συχνότητα αντιστοιχεί στην τιμή $f_1 = \frac{\upsilon}{4L}$ η οποία προκύπτει από την εξίσωση $f = (2n+1)\frac{\upsilon}{4L}$ για $n = 0$.

Θέτοντας $n = 0$ στην $L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ έχουμε:

$$L = \frac{\lambda_1}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda_1 = 7\,m$$

Αυτό σημαίνει ότι θα παρατηρήσουμε μόνο στο ελεύθερο άκρο της χορδής να δημιουργείται κοιλία και στο ακλόνητο ένας και μόνο δεσμός.

Μονάδες 7

4.3. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος είναι:

$$\upsilon = \lambda_1 \cdot f_1 \quad \text{ή} \quad \upsilon = 7m \cdot 50Hz \quad \text{ή} \quad \upsilon = 350\frac{m}{s}$$

Μονάδες 6

4.4. Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$$

Η μέγιστη απομάκρυνση του σημείου της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = \frac{\lambda}{8}$ είναι $2\sqrt{2}\,10^{-2}m$ οπότε: $2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\frac{\lambda}{8}}{\lambda} = 2\sqrt{2}\,10^{-2}m$ ή $A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,10^{-2}m$ ή $A\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,10^{-2}m$ ή $A = 2\cdot 10^{-2}m$

Άρα η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda_7}\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$ με $\lambda_7 = \frac{\upsilon}{f_7} = \frac{350}{350}m = 1\,m$ και $T = \frac{1}{f_7} = \frac{1}{350}\,s$ θα είναι:

$$y = 2\cdot 2\cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{1}\eta\mu\frac{2\pi}{T}t \quad \text{ή} \quad y = 4\cdot 10^{-2}\sigma\upsilon\nu 2\pi x\,\eta\mu 700\pi t \quad (S.I.)$$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο