Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Γ Λυκείου

Φυσική Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 4 Μηχανική Στερεού Σώματος

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Άκαμπτη ομογενής σανίδα ΑΓ, μήκους $L = 3m$ και βάρους $W = 200N$ στηρίζεται στο σημείο Δ σε ένα υποστήριγμα (δ) και ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια κατακόρυφου, αβαρούς και μη εκτατού νήματος, ΑΖ, όπως στο σχήμα. Στο άκρο Α της σανίδας έχει στερεωθεί ακλόνητα σφαίρα, βάρους $W_1 = 100N$, οπότε η τάση του νήματος ΑΖ ισούται με μηδέν.

4.1. Να υπολογίσετε την απόσταση $(A\Delta) = d$.

Μονάδες 6

4.2. Στη σανίδα και στο άλλο άκρο της Γ τοποθετούμε σώμα (σ), βάρους $W_\sigma = 200N$. Αν θεωρήσουμε ότι η σανίδα συνεχίζει να ισορροπεί, να υπολογίσετε το μέτρο της αντίδρασης που δέχεται η σανίδα από το υποστήριγμα (δ). Το νήμα θα κοπεί ή όχι; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Δίνεται το όριο θραύσης του νήματος $T_{\theta\rho} = 500N$.

Μονάδες 7

4.3. Μεταφέρουμε το σώμα (σ) από τη θέση Γ στο μέσο της σανίδας. Να υπολογίσετε την τάση του νήματος, λαμβάνοντας υπόψη ότι η σανίδα ισορροπεί.

Μονάδες 5

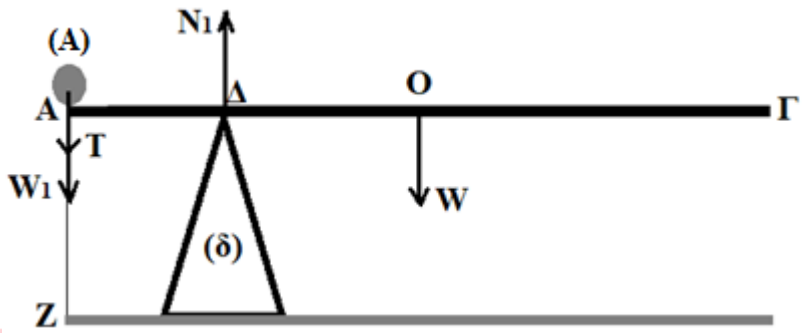
4.4. Επαναφέρουμε το σώμα (σ) στο άκρο Γ της σανίδας και τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε σ' αυτό μία κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ με φορά προς τα κάτω. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση: $F = 20 + 5t \quad (S.I.)$. Αν θεωρήσουμε ότι η σανίδα ισορροπεί, να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή όπου το νήμα θα κοπεί.

Μονάδες 7

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1.

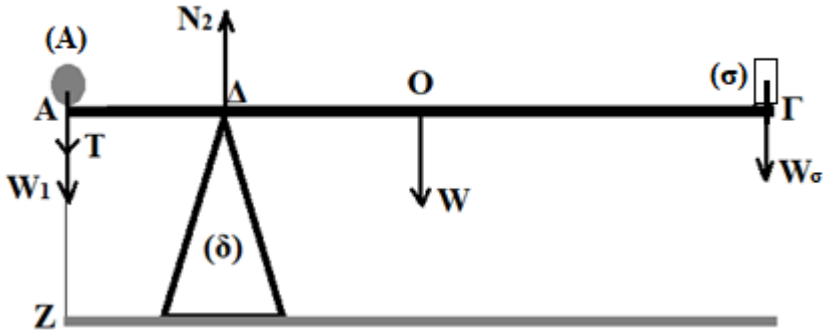


Στη σανίδα ΑΓ ασκούνται: η δύναμη που ασκεί η σφαίρα στη σανίδα που είναι ίση με το βάρος W_1, το βάρος της σανίδας W, που ασκείται στο μέσο της Ο επειδή είναι ομογενής, η τάση του νήματος T, που είναι μηδενική και η δύναμη N_1 από το υποστήριγμα (δ). Η σανίδα ισορροπεί οπότε:

$$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow W_1 \cdot d - W \cdot \left(\frac{L}{2} - d\right) = 0 \Rightarrow d = 1\,m$$

Μονάδες 6

4.2.



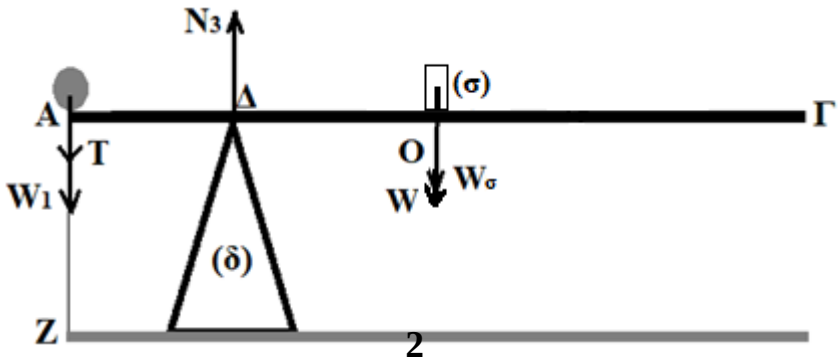
Στη σανίδα τώρα προστίθεται η δύναμη που ασκεί το σώμα (σ) που είναι ίση με το βάρος του W_σ, η τάση του νήματος T, που είναι μη μηδενική και η δύναμη N_2 από το υποστήριγμα (δ). Η σανίδα ισορροπεί οπότε:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N_2 \cdot d - W \cdot \frac{L}{2} - W_\sigma \cdot L = 0 \Rightarrow N_2 = 900\,N$$

Αλλά $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - T - W_1 - W - W_\sigma = 0 \Rightarrow T = 400N$, οπότε παρατηρούμε ότι $T < T_{\theta\rho}$, συνεπώς το νήμα δεν κόβεται.

Μονάδες 7

4.3.

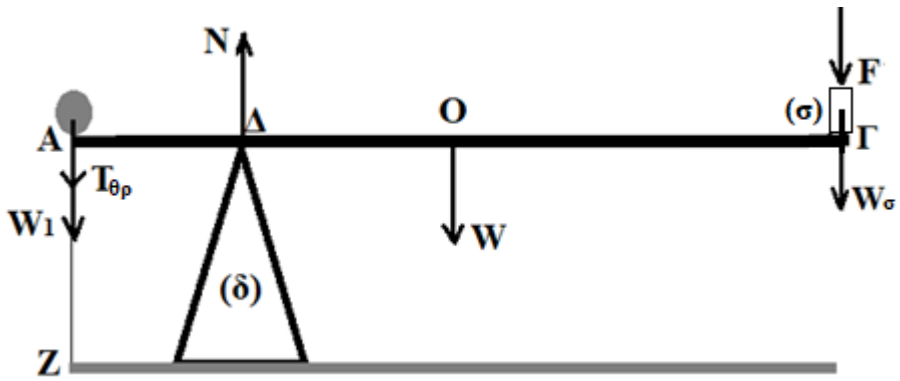


Η σανίδα ισορροπεί οπότε έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow W_1 \cdot d + T \cdot d - (W + W_\sigma) \cdot \left(\frac{L}{2} - d\right) = 0 \Rightarrow T = 100\ N$$

Μονάδες 5

4.4.



Η δύναμη που ασκείται στο σημείο Γ της σανίδας είναι ίση με το άθροισμα του βάρους W_σ του σώματος (σ) και της δύναμης F. Η τάση του νήματος στην οριακή στιγμή που θα κοπεί το νήμα θα πάρει την τιμή $T = T_{\theta\rho}$. Η σανίδα ισορροπεί οπότε έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow W_1 \cdot d + T_{\theta\rho} \cdot d - W \cdot \left(\frac{L}{2} - d\right) - (W_\sigma + F) \cdot (L - d) = 0 \Rightarrow F = 50\ N$$

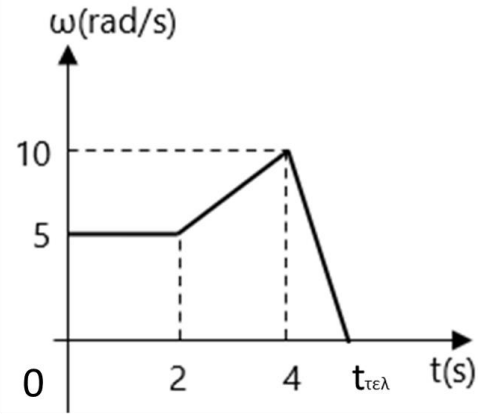
Από τη σχέση $F = 20 + 5t$, για $F = 50\ N$ βρίσκουμε $t = 6s$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένας τροχός στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο του. Για τον τροχό αυτό η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



4.1. Αν η γωνιακή μετατόπιση του τροχού από τη χρονική στιγμή $t_2 = 4s$ έως τη χρονική στιγμή $t_{\tau\varepsilon\lambda}$, που ο τροχός ακινητοποιείται, είναι ίση με $\Delta\theta_3 = 5rad$, να προσδιορίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού, για το χρονικό διάστημα αυτό, καθώς και τη χρονική στιγμή $t_{\tau\varepsilon\lambda}$.

Μονάδες 7

4.2. Για τις επιμέρους κινήσεις που εκτελεί ο τροχός από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή $t_{\tau\varepsilon\lambda}$, να δώσετε τις τιμές της γωνιακής του επιτάχυνσης και στη συνέχεια να αποδώσετε σε διάγραμμα βαθμολογημένων αξόνων τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού σε συνάρτηση με τον χρόνο, για το παραπάνω χρονικό διάστημα της κίνησης

Μονάδες 6

4.3. Να προσδιορίσετε τη γωνιακή μετατόπιση του τροχού, κατά τη διάρκεια του 3ου δευτερολέπτου.

Μονάδες 6

4.4. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των περιστροφών του τροχού από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ έως τη στιγμή $t_{\tau\varepsilon\lambda}$.

Μονάδες 6

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Ισχύει:

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,3} \cdot \Delta\theta_3 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,3} = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2 \cdot \Delta\theta_3} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,3} = \frac{0 - 100}{2 \cdot 5}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,3} = -10\frac{rad}{s^2}.$$

Για την τελική χρονική στιγμή $t_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι:

$$\omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu,3} \cdot (t_{\tau\varepsilon\lambda} - t_2) \Rightarrow t_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha_{\gamma\omega\nu,3}} + t_2 \Rightarrow t_{\tau\varepsilon\lambda} = 5s$$

Μονάδες 7

4.2. Στο χρονικό διάστημα $0 \leq t < 2s$, το σώμα εκτελεί στροφική ομαλή κίνηση, συνεπώς: $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = 0$.

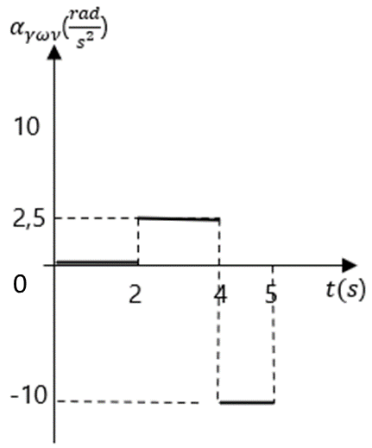
Στο χρονικό διάστημα $2s \leq t < 4s$, το σώμα εκτελεί στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, συνεπώς:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t_2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t_2} = \frac{10 - 5}{4 - 2}\frac{rad}{s^2} = 2{,}5\frac{rad}{s^2},$$

Στο χρονικό διάστημα $4s \leq t \leq 5s$, το σώμα εκτελεί στροφική ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και σταματά. Από το ερώτημα 4.1. είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = -10\frac{rad}{s^2},$$

Το διάγραμμα εικονίζεται δίπλα.

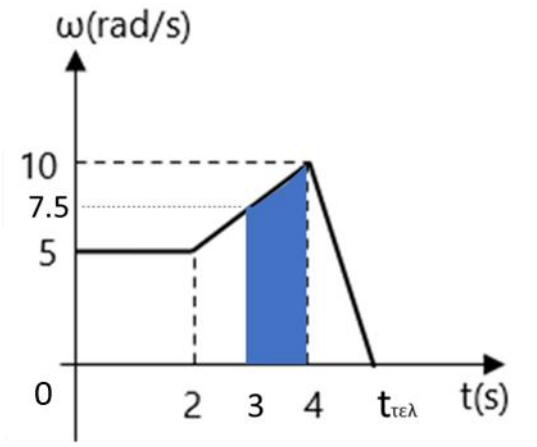


Μονάδες 6

4.3 Τη χρονική στιγμή $t = 3s$ είναι:

$$\omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \cdot (t - t_1) \Rightarrow \omega = [5 + 2{,}5 \cdot (3 - 2)]\frac{rad}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = 7{,}5\frac{rad}{s}$$



Το γραμμοσκιασμένο εμβαδό ισούται αλγεβρικά με τη γωνιακή μετατόπιση κατά το 3ο δευτερόλεπτο.

$$\Delta\theta = \frac{7{,}5 + 10}{2} \cdot 1 = 8{,}75rad$$

Μονάδες 6

4.4. Στο χρονικό διάστημα $0 \leq t < 2s$: $\Delta\theta_1 = \omega_1 \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta\theta_1 = 5 \cdot 2\, rad \Rightarrow \Delta\theta_1 = 10rad$

Στο χρονικό διάστημα $2s \leq t < 4s$: $\Delta\theta_2 = \omega_1 \cdot \Delta t_2 + \frac{1}{2} \cdot a_{\gamma\omega\nu,2} \cdot \Delta t_2{}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta\theta_2 = \left(5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 2^2\right) rad \Rightarrow \Delta\theta_2 = 15rad$$

(**Σημείωση:** *Οι γωνιακές μετατοπίσεις μπορούν να προσδιοριστούν ως εμβαδό του σχήματος που περικλύεται από τη γραφική παράσταση ω-t και τον άξονα του χρόνου).*

Στο χρονικό διάστημα$4s \leq t \leq 5s$: Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι $\Delta\theta_3 = 5rad.$

Συνεπώς: $\Delta\theta_{o\lambda} = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_{3,} \Rightarrow \Delta\theta_{o\lambda} = (10 + 15 + 5)rad \Rightarrow \Delta\theta_{o\lambda} = 30rad$

$$N = \frac{\Delta\theta_{o\lambda}}{2 \cdot \pi} \Rightarrow N = \frac{30}{2 \cdot \pi} \pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma \Rightarrow N = \frac{15}{\pi}\, \pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένας τροχός στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο του. Ο τροχός έχει ακτίνα $R = 0{,}6\ \mathrm{m}$ και αρχικά κινείται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_o = 4\frac{rad}{s}$. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ ο τροχός αρχίζει να επιταχύνεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = 2\frac{rad}{s^2}$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3s$ σταματά να επιταχύνεται και μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 5s$ στρέφεται ομαλά. Να προσδιορίσετε:

4.1. το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου Λ του τροχού που απέχει από το κέντρο του απόσταση $\frac{R}{2}$, τη χρονική στιγμή t= $1s$,

Μονάδες 6

4.2. τις εξισώσεις της γωνιακής ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου για τα επιμέρους χρονικά διαστήματα, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή $t = 5\ \mathrm{s}$,

Μονάδες 6

4.3. τη γωνιακή μετατόπιση από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ έως $t = 5s$,

Μονάδες 7

4.4. τον αριθμό των περιστροφών του τροχού, για το χρονικό διάστημα από τη στιγμή $3s$ μέχρι τη στιγμή $5s$.

Μονάδες 6

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Τη χρονική στιγμή $t = 1s$, η γωνιακή ταχύτητα του τροχού είναι:

$$\omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu,1} t \Rightarrow \ \omega = (4 + 2 \cdot 1)\frac{rad}{s} \Rightarrow \omega = 6\frac{rad}{s}$$

Για τη γραμμική ταχύτητα στο σημείο Λ είναι:

$$\upsilon_\Lambda = \omega \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow \upsilon_\Lambda = 6 \cdot \frac{0{,}6}{2} \Rightarrow \upsilon_\Lambda = 1{,}8\frac{m}{s}$$

Μονάδες 6

4.2.

Στο χρονικό διάστημα $0 - 3s$ το σώμα εκτελεί στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, συνεπώς:

$$\omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu,1}\Delta t \Rightarrow \omega = 4 + 2 \cdot t \qquad (S.I.)$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3s$ είναι $\omega_1 = 10\frac{rad}{s}$

Στο χρονικό διάστημα $3s - 5s$ το σώμα εκτελεί στροφική ομαλή κίνηση.

$$\omega = 10\ \frac{rad}{s}$$

Μονάδες 6

4.3

Στο χρονικό διάστημα $0 - 3s$ η γωνιακή μετατόπιση είναι:

$$\Delta\theta_1 = \omega_o \cdot \Delta t_1 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot {\Delta t_1}^2 \Rightarrow \Delta\theta_1 = \left(4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2\right) rad \Rightarrow \Delta\theta_1 = 21rad$$

Στο χρονικό διάστημα $3s - 5s$ είναι:

$$\Delta\theta_2 = \omega_1 \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta\theta_2 = 10 \cdot 2\ rad \Rightarrow \Delta\theta_2 = 20rad$$

Συνεπώς:

$$\Delta\theta_{o\lambda} = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 \Rightarrow \Delta\theta_{o\lambda} = (21 + 20)rad \Rightarrow \Delta\theta_{o\lambda} = 41rad$$

Μονάδες 7

4.4.

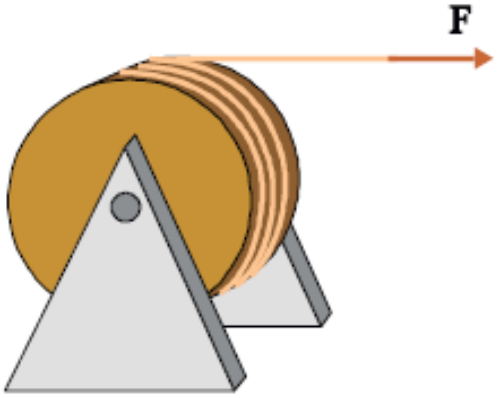
$$N = \frac{\Delta\theta_2}{2 \cdot \pi} \Rightarrow N = \frac{20}{2 \cdot \pi}\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma \Rightarrow N = \frac{10}{\pi}\ \pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

Μονάδες 6

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στην περιφέρεια μιας ακίνητης τροχαλίας, ακτίνας $R = 30\ cm$ είναι τυλιγμένο σκοινί μεγάλου μήκους. Ασκώντας στο σκοινί την χρονική στιγμή $t = 0$ οριζόντια δύναμη $F = 20\ N$ περιστρέφουμε την τροχαλία. Βρέθηκε ότι όταν η τροχαλία έχει κάνει $\frac{4}{\pi}$ περιστροφές, έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 8\frac{rad}{s}$. Με βάση αυτά τα δεδομένα, να βρείτε:



4.1. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.

Μονάδες 6

4.2.Τη γραμμική ταχύτητα του ανώτερου σημείου της τροχαλίας την χρονική στιγμή $t_1 = 3s$.

Μονάδες 6

4.3. Την συνολική ροπή των δυνάμεων που δέχεται η τροχαλία ως προς τον άξονα περιστροφής της.

Μονάδες 6

4.4. Το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται από την τροχαλία στην διάρκεια του τέταρτου δευτερολέπτου της κίνησής της.

Μονάδες 7

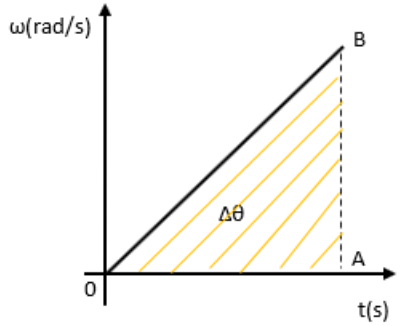
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η τροχαλία, υπό την επίδραση της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ εκτελεί στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα. Για την κίνησή της ισχύει:

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Longrightarrow \alpha_\gamma = \frac{\omega-\omega_0}{t-t_0} \xrightarrow{\omega_0=0,\, t_0=0} \omega = \alpha_\gamma t \qquad (1)$$

Η γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας-χρόνου είναι η επόμενη:



Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου είναι αριθμητικά ίσο με την επίκεντρη γωνία που διαγράφει οποιαδήποτε επιβατική ακτίνα της τροχαλίας. Άρα,

$$\Delta\theta = (OAB) = \frac{1}{2}\beta\acute{\alpha}\sigma\eta \cdot \acute{\upsilon}\psi o\varsigma = \frac{1}{2}\omega t = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \qquad (2)$$

Όταν η τροχαλία έχει διαγράψει $\frac{4}{\pi}$ περιστροφές, τότε η επιβατική ακτίνα κάθε σημείου της έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία ίση με

$$\Delta\theta = 2\pi N = 2\pi \cdot \frac{4}{\pi}\ \text{rad} = 8\ \text{rad}$$

Θα κάνουμε απαλοιφή του χρόνου από τις σχέσεις (1) και (2) για να υπολογίσουμε την γωνιακή επιτάχυνση. Λύνουμε την σχέση (1) ως προς τον χρόνο, δηλαδή $t = \frac{\omega}{\alpha_\gamma}$ και αντικαθιστούμε στην σχέση (2).

Έχουμε:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma\left(\frac{\omega}{\alpha_\gamma}\right)^2 \Leftrightarrow \Delta\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha_\gamma} \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{\omega^2}{2\Delta\theta} = \frac{8^2}{2\cdot 8}\frac{\text{rad}}{s^2} = 4\frac{\text{rad}}{s^2}$$

Μονάδες 6

4.2. Την χρονική στιγμή $t_1 = 3s$ η γωνιακή ταχύτητα κάθε σημείου της τροχαλίας δίνεται από την σχέση (1) και είναι:

$$\omega_1 = \alpha_\gamma \cdot t_1 = 4\frac{\text{rad}}{s^2} \cdot 3s = 12\frac{\text{rad}}{s}$$

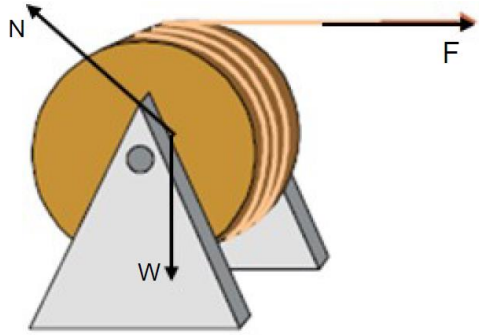
Η γραμμική ταχύτητα στο ανώτερο σημείο της τροχαλίας έχει την ίδια διεύθυνση με το νήμα, φορά προς τα δεξιά και μέτρο

$$\upsilon_1 = \omega_1 \cdot R = 12\frac{\text{rad}}{s} \cdot 0{,}3m = 3{,}6\frac{m}{s}$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νεο φροντιστηριο

4.3. Η τροχαλία δέχεται τρεις δυνάμεις, το βάρος της $\vec{W}$, την δύναμη $\vec{F}$ και την δύναμη στήριξης $\vec{N}$ από τον άξονα. Το βάρος $\vec{W}$ και η δύναμη $\vec{N}$ δεν ασκούν ροπή ως προς τον άξονα της τροχαλίας γιατί ο φορέας τους τέμνει τον άξονα περιστροφής (ο μοχλοβραχίονας είναι μηδέν).

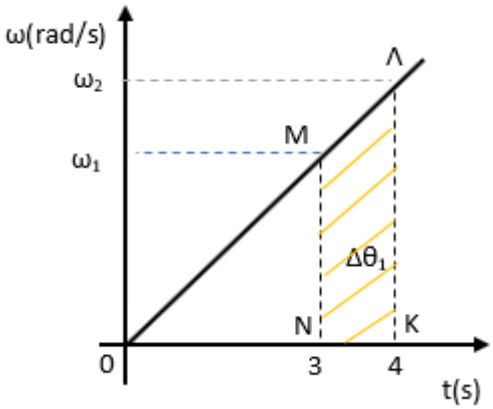


Ορίζοντας ως θετική φορά την φορά περιστροφής της τροχαλίας, η συνολική ροπή ως προς τον άξονα είναι

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{\tau}_{\vec{F}} + \vec{\tau}_{\vec{W}} + \vec{\tau}_{\vec{N}} \Leftrightarrow \Sigma\tau = F \cdot R + 0 + 0 = 20N \cdot 0{,}3m = 6Nm$$

Μονάδες 6

4.4. Η επίκεντρη γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα κάθε σημείου της τροχαλίας από την χρονική στιγμή $t_1 = 3s$ ως την χρονική στιγμή $t_2 = 4s$ (το 4ο δευτερόλεπτο) μπορεί να υπολογιστεί από την γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας χρόνου, μέσω του εμβαδού. Όπως φαίνεται από το επόμενο σχήμα, είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδό του τραπεζίου ΚΛΜΝ, με $\omega_2 = \alpha_\gamma t_2 = 4 \cdot 4\frac{rad}{s} = 16\frac{rad}{s}$.



$$\Delta\theta_1 = (K\Lambda MN) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\Delta t = \frac{(12+16)}{2} \cdot 1\ rad = 14\ rad$$

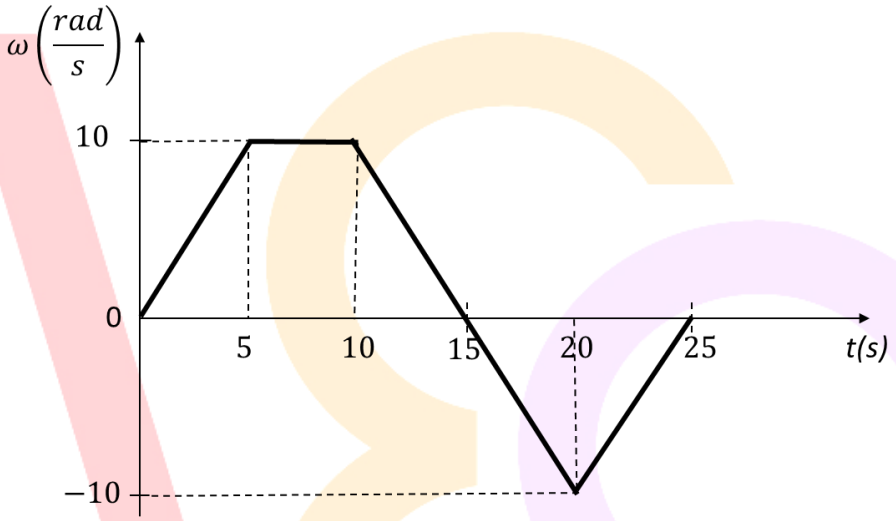
Το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται είναι ίσο με το μήκος τόξου της περιφέρειας της τροχαλίας που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $\Delta\theta_1$, δηλαδή

$$s = R \cdot \Delta\theta_1 = 0{,}3\ m \cdot 14\ rad = 4{,}2\ m$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Λεπτός ισοπαχής δακτύλιος κέντρου Ο και ακτίνας $R = 1m$ περιστρέφεται γύρω από άξονα $Z'Z$ που περνά από το Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου συναρτήσει του χρόνου παριστάνεται γραφικά στο παρακάτω διάγραμμα. Θετική είναι η φορά περιστροφής αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού (αριστερόστροφη).



4.1. Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση σε κάθε μια από τις πέντε επιμέρους κινήσεις του δακτυλίου και να εξηγήσετε το είδος κάθε επιμέρους κίνησης.

Μονάδες 10

4.2. Να υπολογίσετε τη συνολική γωνία στροφής του δακτυλίου από $t = 0$ έως $t = 25s$.

Μονάδες 5

4.3. Να παραστήσετε γραφικά, σε σύστημα ορθογώνιων βαθμολογημένων αξόνων, την αλγεβρική τιμή της ροπής που δέχεται στοιχειώδης μάζα $m = 0{,}1Kg$ του δακτυλίου από $t = 0$ έως $t = 25s$.

Μονάδες 10

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Σύμφωνα με τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης, $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, η γωνιακή επιτάχυνση έχει πάντα την ίδια κατεύθυνση με τη μεταβολή $d\vec{\omega}$ της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου και μέτρο, $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$.

Όταν το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης είναι θετικό, η $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ έχει φορά από το δακτύλιο προς τον αναγνώστη, ενώ όταν το μέτρο της είναι αρνητικό έχει φορά από τον αναγνώστη προς το δακτύλιο.

Το ίδιο ισχύει για το μέτρο και την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$.

Σύμφωνα με τη σχέση, $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$, η κλίση της γραφικής παράστασης γωνιακής ταχύτητας – χρόνου, $\omega - t$, είναι ίση με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, επομένως:

Από $t = 0$ έως $t = 5s$: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{10-0}{5-0}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = +2\frac{rad}{s^2} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$

Από $t = 5s$ έως $t = 10s$: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$

Από $t = 10$ έως $t = 15s$: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{0-10}{15-10}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = -2\frac{rad}{s^2} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$

Από $t = 15$ έως $t = 20s$: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{-10-0}{20-15}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = -2\frac{rad}{s^2} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$

Από $t = 20$ έως $t = 25s$: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{0-(-10)}{25-20}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = +2\frac{rad}{s^2} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$

Από $t = 0$ έως $t = 5s$: Ο δακτύλιος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, $\omega > 0$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu} > 0$, επομένως τα διανύσματα των $\vec{\omega}$ και $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ είναι ομόρροπα.

Από $t = 5s$ έως $t = 10s$: Ο δακτύλιος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση επειδή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$.

Από $t = 10$ έως $t = 15s$: Ο δακτύλιος εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση, $\omega > 0$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu} < 0$, επομένως τα διανύσματα των $\vec{\omega}$ και $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ είναι αντίρροπα.

Από $t = 15$ έως $t = 20s$: Ο δακτύλιος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, $\omega < 0$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu} < 0$, επομένως τα διανύσματα των $\vec{\omega}$ και $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ είναι ομόρροπα.

Από $t = 20$ έως $t = 25s$: Ο δακτύλιος εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση, $\omega < 0$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu} > 0$, επομένως τα διανύσματα των $\vec{\omega}$ και $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ είναι αντίρροπα.

Μονάδες 10

4.2. Σύμφωνα με τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας, $\omega = \frac{d\Theta}{dt} \Rightarrow d\Theta = \omega \cdot dt$, το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης $\omega - t$ και του άξονα t είναι ίσο με την αντίστοιχη γωνία στροφής, επομένως: $\Theta = \left(\frac{5+15}{2} \cdot 10 + \frac{10\cdot(-10)}{2}\right) rad \Rightarrow \Theta = 50\, rad$

Μονάδες 5

4.3. Η στροφορμή $\vec{L}$ της στοιχειώδους μάζας m του δακτυλίου ως προς τον άξονα $Z'Z$ έχει ίδια κατεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα του δακτυλίου. Για το μέτρο της L έχουμε:

$$L = m\upsilon R \;\Rightarrow\; L = m\omega R^2$$

Το μέτρο L της στροφορμής είναι ανάλογο του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας του τροχού. Όταν το ω είναι σταθερό θα είναι σταθερό και το L. Όταν το ω είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου και το L. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται χαρακτηριστικές τιμές του μέτρου της στροφορμής της στοιχειώδους μάζας m.

$t(s)$	0	5	10	20	25
$L\left(\frac{Kg\cdot m^2}{s}\right)$	0	1	1	-1	0

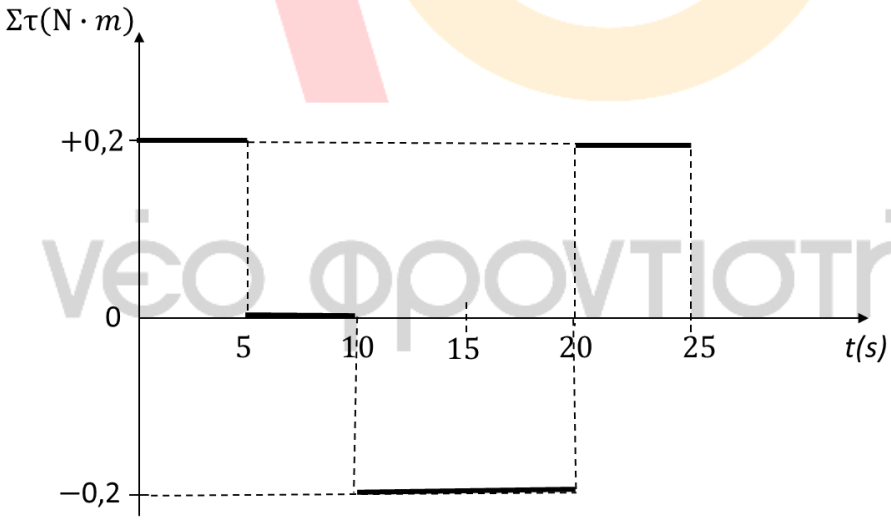
Σύμφωνα με τη γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης, η ροπή που δέχεται η στοιχειώδης μάζα του δακτυλίου είναι ίση με: $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$.

Από $t = 0$ έως $t = 5s$: $\Sigma\tau = \frac{1-0}{5-0} N\cdot m \Rightarrow \Sigma\tau = +0{,}2\ N\cdot m$

Από $t = 5s$ έως $t = 10s$: $\Sigma\tau = 0$

Από $t = 10$ έως $t = 20s$: $\Sigma\tau = \frac{-1-1}{20-10} N\cdot m \Rightarrow \Sigma\tau = -0{,}2\ N\cdot m$

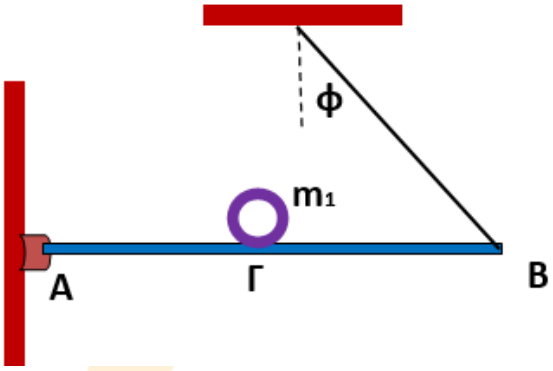
Από $t = 20$ έως $t = 25s$: $\Sigma\tau = \frac{0-(-1)}{25-20} N\cdot m \Rightarrow \Sigma\tau = +0{,}2\ N\cdot m$



Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4

Ομογενής ράβδος ΑΒ έχει μήκος $L = 1\,m$, μάζα $m = 900\,g$ και ισορροπεί σε οριζόντια θέση με την βοήθεια αβαρούς μη εκτατού νήματος που δένεται σε οροφή και σχηματίζει με τη κατακόρυφο γωνία φ τέτοια ώστε $ημφ = 0{,}87$ και $συνφ = 0{,}5$, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται κατακόρυφα, με τη βοήθεια άρθρωσης, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α και είναι κάθετος σ' αυτή. Στο μέσο της ράβδου, έστω σημείο Γ, τοποθετούμε κυκλική στεφάνη μάζας $m_1 = 100\,g$ και ακτίνας $R = 10\,cm$. Το όριο θραύσης του νήματος δίνεται $T_{θρ} = 10{,}5\,N$.

4.1. Να υπολογίσετε την τάση του νήματος, όταν τοποθετήσαμε την στεφάνη στην θέση Γ.

Μονάδες 6

4.2. Να βρείτε πόσο κοντά στο Β μπορούμε να τοποθετήσουμε την στεφάνη χωρίς να σπάσει το νήμα.

Μονάδες 6

4.3. Να κάνετε την γραφική παράσταση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με την απόσταση x της στεφάνης από το σημείο Γ καθώς μετακινείται προς το σημείο όπου σπάει το νήμα.

Μονάδες 7

Εκτοξεύουμε την στεφάνη από το σημείο Γ προς το άκρο Β, με αρχική ταχύτητα $υ_0$. Συγχρόνως, ασκούνται σε αυτή κατάλληλες δυνάμεις ώστε να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, εκτελώντας ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση $α_{cm} = 0{,}25\,m/s^2$ και σταματά μετά από χρόνο $Δt = 1s$.

4.4. Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών που εκτέλεσε έως τότε.

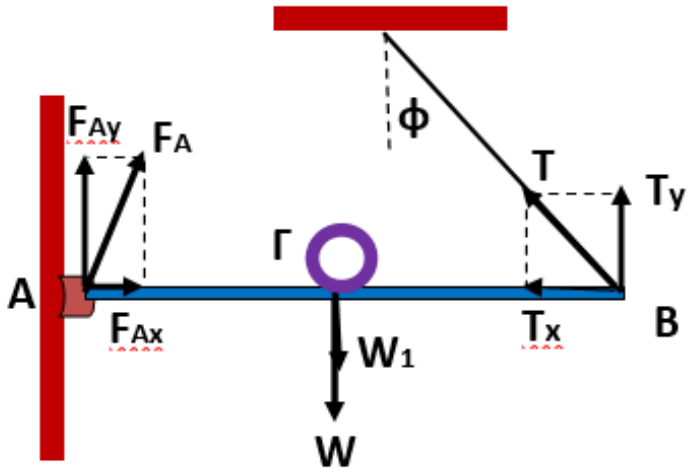
Μονάδες 6

Δίνεται: $g = 10\frac{m}{s^2}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Τοποθετούμε την στεφάνη μάζας m_1 ακίνητη στο σημείο Γ έτσι ώστε η ράβδος να ισορροπεί. Τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι σχεδιασμένες στο παρακάτω σχήμα:



Εφόσον η ράβδος ισορροπεί θα ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$, $\Sigma\vec{\tau} = \vec{0}$.

Επιλέγουμε την ισορροπία των ροπών των δυνάμεων ως προς το σημείο Α, με θετική φορά την αριστερόστροφη:

$$\Sigma\vec{\tau}_A = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{W_1} + \vec{\tau}_{F_A} + \vec{\tau}_T = \vec{0}$$

$$-W \cdot \frac{L}{2} - W_1 \cdot (A\Gamma) + 0 + T \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot L = 0 \Leftrightarrow T \cdot L \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = W \cdot \frac{L}{2} + W_1 \cdot \frac{L}{2}$$

$$T \cdot \frac{L}{2} = m \cdot g \cdot \frac{L}{2} + m_1 \cdot g \cdot \frac{L}{2} \Leftrightarrow T = 10\ N$$

Μονάδες 6

4.2. Έστω d η απόσταση από το Β, στην οποία αν μετακινήσουμε την στεφάνη, οριακά δεν θα σπάσει το νήμα. Για την νέα οριακή ισορροπία και πάλι ως προς το σημείο Α, θα είναι:

$$\Sigma\vec{\tau}'_A = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\tau}_W + \vec{\tau}'_{W_1} + \vec{\tau}_{F_A} + \vec{\tau}_T = \vec{0}$$

$$-W \cdot \frac{L}{2} - W_1 \cdot (L - d) + 0 + T_{\theta\rho} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot L = 0 \Leftrightarrow W_1 \cdot (L - d) = T_{\theta\rho} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot L - W \cdot \frac{L}{2} \Leftrightarrow$$

$$1N \cdot (1m - d) = 10{,}5N \cdot 0{,}5 \cdot 1 - 9N \cdot \frac{1m}{2} \Leftrightarrow d = (1 - 5{,}25 + 4{,}5)m = 0{,}25m$$

Άρα η στεφάνη μπορεί να πλησιάσει σε απόσταση $d = 25\ cm$ από το σημείο Β χωρίς να σπάσει το νήμα.

Μονάδες 6

4.3. Για την ζητούμενη γραφική παράσταση της μεταβολής της τάσης του νήματος ως προς την απόσταση του σώματος m_1 από το σημείο Γ, πρέπει να προσδιορίσουμε την συνάρτηση $T = f(x)$.

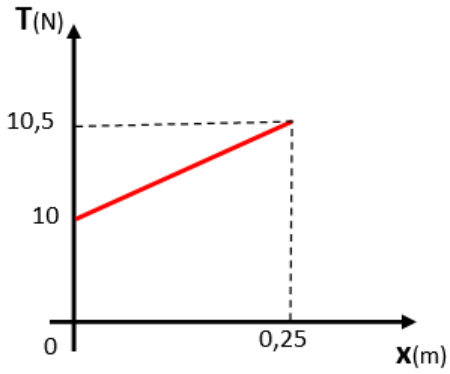
Για μια τυχαία θέση x του σώματος m_1 μεταξύ των θέσεων Γ $(x = 0)$ και θραύσης του νήματος $(x = 0{,}25\ cm)$, ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}''_A = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\tau}_W + \vec{\tau}''_{W_1} + \vec{\tau}_{F_A} + \vec{\tau}_T = \vec{0}$$

$$-W\frac{L}{2} - W_1\left(\frac{L}{2} + x\right) + 0 + T \cdot L \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Leftrightarrow T \cdot L \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = W\frac{L}{2} + W_1\left(\frac{L}{2} + x\right) \Leftrightarrow$$

$$T \cdot 0{,}5 = 9 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + x\right) \Leftrightarrow T = 10 + 2 \cdot x \quad \text{για } 0 \le x \le 0{,}25\text{m} \quad (\text{S.I.})$$

Άρα η γραφική παράσταση θα είναι:



Μονάδες 7

4.4. Ο αριθμός των περιστροφών που εκτέλεσε η στεφάνη είναι:

$$N = \frac{\theta_1}{2\pi} \qquad (1)$$

όπου θ_1 η γωνία στροφής μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Αλλά:

$$\theta_1 = \omega_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2 \qquad (2)$$

Για την αρχική ταχύτητα ω_0, ισχύει:

$$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t \Leftrightarrow 0 = \omega_0 - \frac{\alpha_{cm}}{R} \cdot \Delta t \Leftrightarrow \omega_0 = 2{,}5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \qquad (3)$$

Η (2) λόγω της (3), γίνεται:

$$\theta_1 = \omega_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2 \Leftrightarrow \theta_1 = 2{,}5\frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1\text{s} - \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 1^2\text{s}^2 \Leftrightarrow \theta_1 = 1{,}25\ \text{rad}$$

και αντικαθιστώντας στην (1):

$$N = \frac{\theta_1}{2\pi} \Leftrightarrow N = \frac{1{,}25}{2\pi}\text{περιστροφές} = \frac{0{,}625}{\pi}\ \text{περιστροφές}$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Το άκρο Β ομογενούς ράβδου ΑΒ μήκους $L = 4\,m$ και μάζας $m = 1{,}5\,kg$ φέρει σώμα αμελητέων διαστάσεων και μάζας $2m = 3\,kg$, ενώ το άκρο Α αρθρώνεται σε κατακόρυφο τοίχο. Η ράβδος κρατείται οριζόντια με τη βοήθεια αβαρούς νήματος μήκους $L = 4\,m$. Το ένα άκρο του νήματος δένεται στο μέσο Γ της ράβδου και το άλλο σε ένα σημείο Δ του τοίχου, ψηλότερα από το Α. Να υπολογίσετε:

4.1. τη γωνία φ που περιέχεται μεταξύ των τμημάτων ΓΔ και ΓΑ.

Μονάδες 4

4.2. το μέτρο της τάσης T του νήματος.

Μονάδες 7

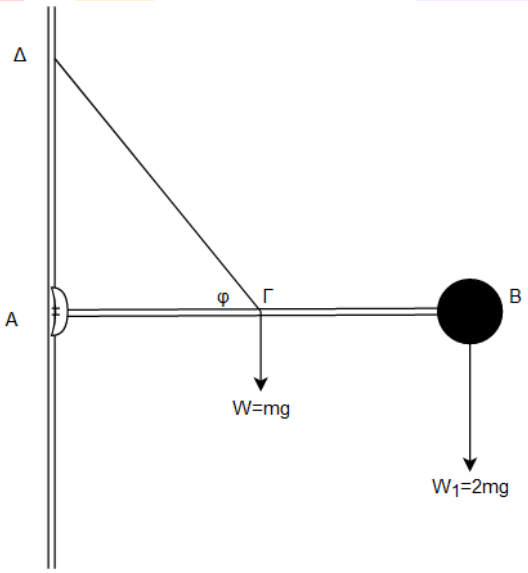
4.3. τα μέτρα των συνιστωσών δυνάμεων F_x, F_ψ που δέχεται η ράβδος από τον τοίχο,

Μονάδες 8

4.4. το μέτρο και τη διεύθυνση της συνολικής δύναμης F που δέχεται από τον τοίχο η ράβδος.

Μονάδες 6

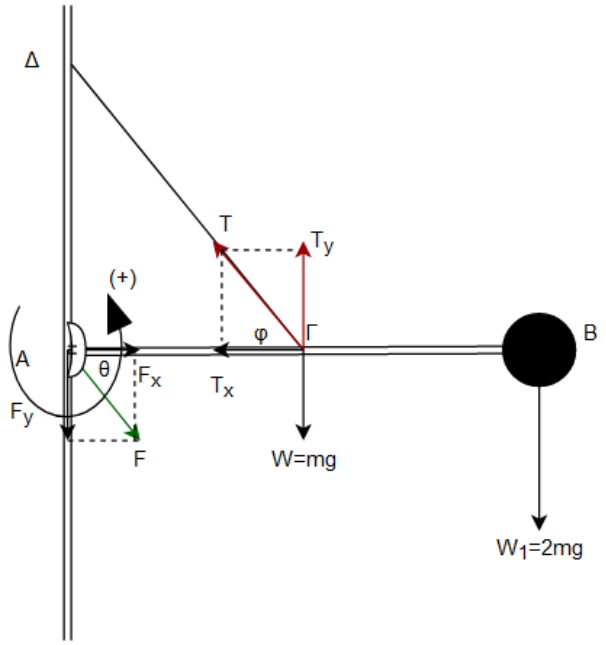
Δίνονται: $συν\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $ημ\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $g = 10\frac{m}{s^2}$



ΘΕΜΑ 4

4.1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $(\Delta A\Gamma)$ με $\hat{A} = 90^0$ θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{(A\Gamma)}{(\Delta\Gamma)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}\, rad$$



Μονάδες 4

4.2. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και τις αναλύουμε στις συνιστώσες τους σε οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. Αυτές είναι:

Η δύναμη $\vec{F}$ της άρθρωσης, η τάση $\vec{T}$ του νήματος, το βάρος $\vec{W}$ της ράβδου, και η δύναμη από το σώμα στη ράβδο, η οποία είναι ίση με το βάρος του $\vec{W}_1$.

Αφού έχουμε ισορροπία, η συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στην ράβδο θα είναι ίση με μηδέν. Επιλέγουμε να υπολογίσουμε την συνισταμένη των ροπών ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο A, ώστε να καταλήξουμε στην απλούστερη δυνατή εξίσωση. Ορίζουμε θετική φορά περιστροφής εκείνη που είναι αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Έτσι:

$$\sum \tau = 0 \quad \text{ή} \quad -mg\frac{L}{2} - 2mg \cdot L + T_y\frac{L}{2} = 0 \quad \text{ή} \quad -mg - 4mg + T_y = 0$$

$$\text{ή} \quad T_y = 5mg \quad \text{ή} \quad T_y = 75\, N$$

Επίσης: $T_y = T\eta\mu\frac{\pi}{3}$ ή $T = \frac{T_y}{\eta\mu\frac{\pi}{3}}$ ή $T = \frac{10mg}{\sqrt{3}}$ ή $T = \frac{10mg\sqrt{3}}{3}$

$$\text{ή} \quad T = \frac{150\sqrt{3}}{3}\, N \quad \text{ή}$$

$$T = 50\sqrt{3}\, N$$

Μονάδες 7

4.3. Λόγω της ισορροπίας η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι επίσης ίση με το μηδέν:

$$\Sigma\vec{F} = 0$$

Γράφουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τον κάθε άξονα χωριστά.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \text{ ή } F_x = T_x \text{ ή } F_x = T\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \text{ ή } F_x = 50\sqrt{3}\frac{1}{2}N \text{ ή } F_x = 25\sqrt{3}\,N$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \text{ ή } T_y - F_y - W - W_1 = 0 \text{ ή } F_y = 5mg - 3mg = 2mg \text{ ή } F_y = 30N$$

Μονάδες 8

4.4.

$$\mathrm{F} = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = \sqrt{\left(25\sqrt{3}\right)^2 + 30^2} \text{ ή}$$

$$\mathrm{F} = 15\sqrt{\frac{37}{3}}\,N$$

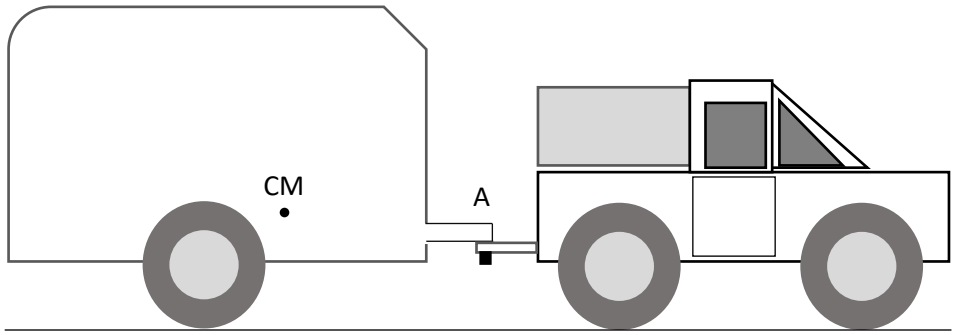
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Αυτοκίνητο μεταφέρει ένα ρυμουλκούμενο τροχόσπιτο, κινούμενο σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα. Το αυτοκίνητο και το τροχόσπιτο συνδέονται στο σημείο Α, όπου η ρυμούλκα (το κομμάτι που εξέχει από το τροχόσπιτο προς τα εμπρός) συνδέεται με τον κοτσαδόρο (το κομμάτι που εξέχει από το αυτοκίνητο προς τα πίσω). Το κέντρο μάζας του τροχόσπιτου (μαζί με το φορτίο του) είναι σημειωμένο στο σχήμα. Το σχήμα είναι **σχεδιασμένο υπό κλίμακα**. Με βάση τις προδιαγραφές, η κατακόρυφη δύναμη στο σημείο Α πρέπει να είναι μεταξύ $1500\,N$ και $12000\,N$. Η μάζα του τροχόσπιτου (μαζί με το φορτίο του) είναι $3.500\,kg$.



4.1. Στο φύλλο απαντήσεων να σχεδιάσετε ένα απλό αντίγραφο του σχήματος και να σχεδιάσετε τις κατακόρυφες δυνάμεις που ασκούνται στο τροχόσπιτο.

Μονάδες 5

4.2. Να γράψετε τις εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι κατακόρυφες δυνάμεις του ερωτήματος 4.1 κατά την ευθύγραμμη, οριζόντια κίνηση του συστήματος αυτοκινήτου-τροχόσπιτου.

Μονάδες 6

4.3. Να εξηγήσετε τι κίνδυνος υπάρχει αν το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης στο σημείο Α ξεπερνάει το άνω όριο των προδιαγραφών, και να εξετάσετε αν η δύναμη που ασκείται στο σημείο Α είναι ανάμεσα στα όρια που ορίζουν οι προδιαγραφές.

Μονάδες 7

4.4. Θέλουμε το τροχόσπιτο να κουβαλήσει επιπλέον φορτίο $700\,kg$. Εξηγήστε τι θα συμβεί στην κατακόρυφη δύναμη στο σημείο Α αν το τοποθετήσουμε στο μπροστινό μέρος του τροχόσπιτου.

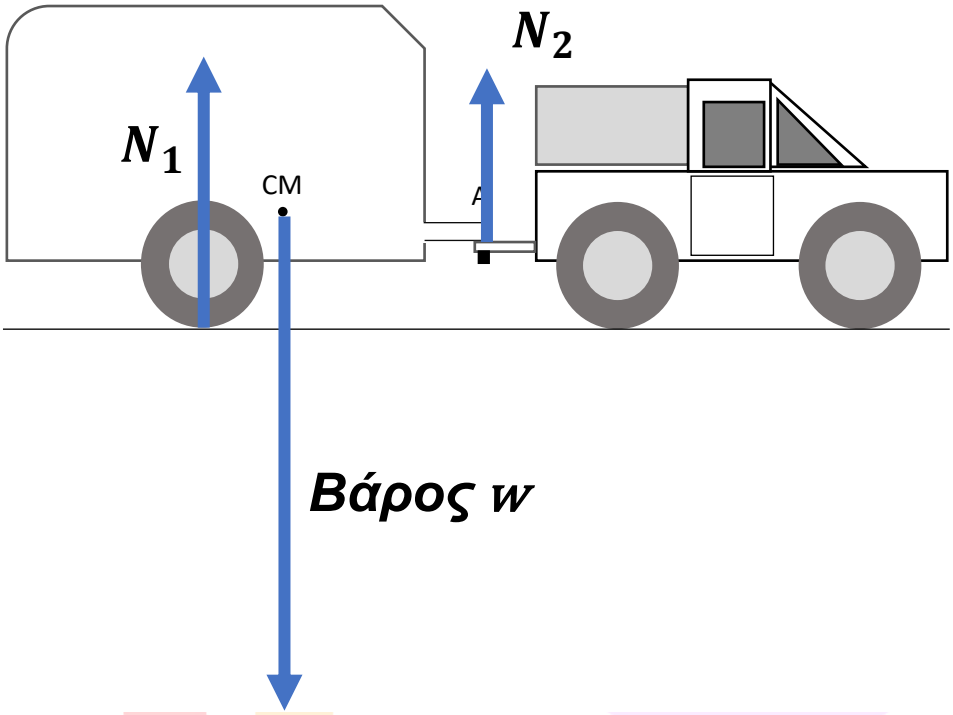
Μονάδες 7

Για τις τιμές των φυσικών σταθερών που θα χρειαστείτε, να συμβουλευτείτε το τυπολόγιο που θα σας δοθεί.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1.



Οι δυνάμεις στις σωστές θέσεις και κατευθύνσεις (3 μονάδες)

Χρειάζεται τα μήκη να είναι κάπως ανάλογα με τα μέτρα των δυνάμεων: Το N_2 είναι μικρότερο από το N_1, ενώ το βάρος είναι περίπου ίσο σε μήκος (μέτρο) με το άθροισμα των άλλων δύο. (2 μονάδες)

Εναλλακτικά, στη θέση της N_1 μπορεί να εμφανίζονται δύο δυνάμεις (η αντίδραση στη ρόδα που φαίνεται στο σχήμα και η αντίδραση στη ρόδα που βρίσκεται από πίσω) με αντίστοιχη προσαρμογή των μηκών.

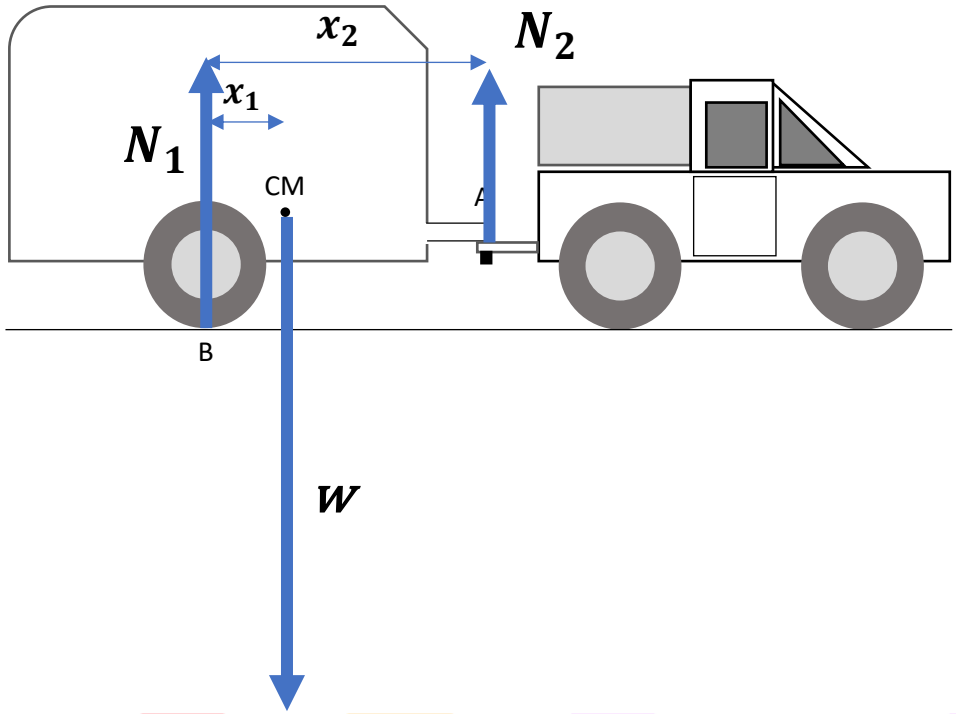
Μονάδες 5

4.2. Αφού το σύστημα κινείται ευθύγραμμα ομαλά, πρέπει να υπάρχει μεταφορική ισορροπία:

$$N_1 + N_2 = w$$

Για τον ίδιο λόγο πρέπει να υπάρχει και στροφική ισορροπία:

νέο φροντιστήριο



Υπολογίζοντας τις ροπές ως προς το σημείο Β:

$$wx_1 = N_2x_2$$

Εναλλακτικά μπορούν να γραφούν συνθήκες στροφικής ισορροπίας ως προς άλλα σημεία (πχ το κέντρο μάζας CM ή το σημείο Α).

Μονάδες 6

4.3. Αν η N_2 είναι μεγαλύτερη από $12000\ N$, η δύναμη από το τροχόσπιτο στο σημείο Α (αντίδραση της N_2) ο κοτσαδόρος μπορεί να σπάσει.

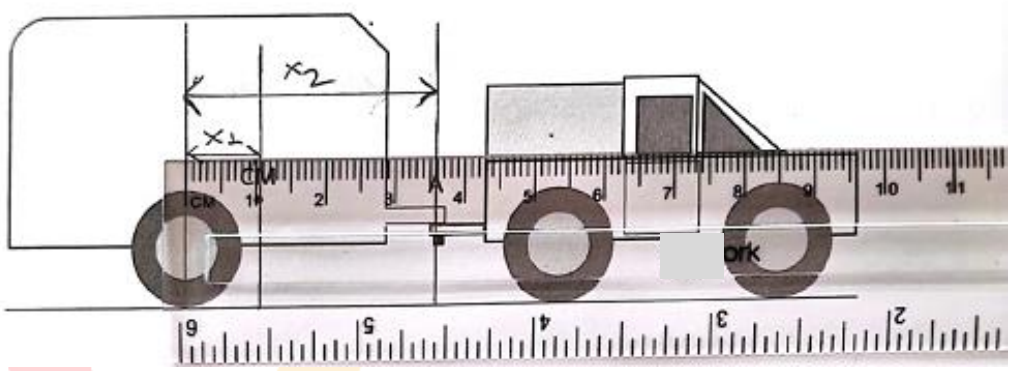
Η απαίτηση στροφικής ισορροπίας είναι η

$$wx_1 = N_2x_2$$

όπου $w = mg = (3500\ kg)\left(9{,}80\,\frac{m}{s^2}\right) = 34300\ N$

νέο φροντιστήριο

Οι αποστάσεις x_1 και x_2 είναι άγνωστες, αλλά εφόσον το σχήμα είναι υπό κλίμακα, θα είναι ανάλογες με αυτές που μπορούν να μετρηθούν στο σχήμα. Μετρώντας με υποδεκάμετρο, προκύπτει περίπου $x_1 = 1{,}1\ cm$ και $x_2 = 3{,}6\ cm$ (υπάρχει περίπτωση, ανάλογα με την εκτύπωση να προκύψουν διαφορετικές τιμές, αλλά αυτό που μετράει είναι μόνο ο λόγος τους).



$$wx_1 = N_2x_2$$

$$(34300\ N)(1{,}1\ cm) = N_2(3{,}6\ cm)$$

$$N_2 \cong 10.500\ N$$

Συνεπώς η δύναμη είναι ανάμεσα στα όρια των προδιαγραφών.

Μονάδες 7

4.4. Με βάση τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας

$$wx_1 = N_2x_2$$

ή

$$N_2 = \frac{wx_1}{x_2}$$

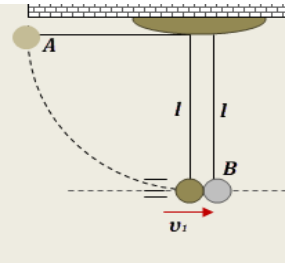
Αν το επιπλέον φορτίο τοποθετηθεί στο μπροστινό μέρος , **<u>οπωσδήποτε</u>** η N_2 θα αυξηθεί με κίνδυνο να ξεπεράσει το όριο των $12000\ N$ γιατί θα συμβούν τα εξής:

- Το κέντρο μάζας θα μετατοπιστεί σίγουρα προς τα εμπρός . Συνεπώς το x_1 θα αυξηθεί.
- Επιπλέον, το w θα αυξηθεί.
- Το x_2 είναι σταθερό.

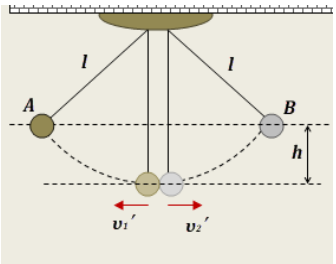
Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4



Δύο μικρές σφαίρες A και B, με ίσες ακτίνες και μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, έχουν δεθεί στα κάτω άκρα μη ελαστικών νημάτων ίσου μήκους l, τα πάνω άκρα των οποίων είναι δεμένα στην ίδια οροφή (σχήμα). Όταν οι δύο σφαίρες ισορροπούν ακίνητες, τα νήματα που τις κρατούν είναι κατακόρυφα, οι σφαίρες εφάπτονται και τα κέντρα τους είναι στην ίδια οριζόντια ευθεία. Εκτρέπουμε τη σφαίρα A από την αρχική θέση ισορροπίας της και την φέρνουμε σε θέση, όπου το κέντρο της ανήκει στο αρχικό κατακόρυφο επίπεδο και το νήμα της είναι τεντωμένο και οριζόντιο. Από τη θέση αυτή την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί, οπότε συγκρούεται με τη B κεντρικά και ελαστικά. Οι αντιστάσεις αέρα αγνοούνται και διαπιστώσαμε ότι μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται αντίθετα και φτάνουν ταυτόχρονα στο ίδιο ύψος ως προς το αρχικό οριζόντιο επίπεδο ηρεμίας τους (σχήμα).



Δίνεται ότι η μάζα της σφαίρας A είναι $m_1 = 300$ g, το μήκος των νημάτων $l = 0{,}8$ m και ότι το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας μπορεί να θεωρηθεί $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

Για διευκόλυνση πράξεων, δίνεται κατά προσέγγιση ότι ισχύει $\sqrt{7} \cong \frac{8}{3}$.

Να υπολογίσετε:

4.1. Τη μάζα m_2 της σφαίρας B.

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής της σφαίρας A ακριβώς πριν την σύγκρουσή της με την ακίνητη Β, ενώ το νήμα της έχει γίνει κατακόρυφο.

Μονάδες 6

4.3. Το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας Α, ως προς άξονα στο σημείο O γύρω από το οποίο περιστρέφεται, κατά την κίνησή της από το σημείο που την αφήσαμε ελεύθερη να κινηθεί, μέχρι την σύγκρουσή της με τη σφαίρα B.

Μονάδες 6

4.4 Το μέτρο του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας B, ως προς άξονα στο σημείο Ο΄ γύρω από το οποίο περιστρέφεται, κατά την κίνησή της μετά την κρούση των δύο σφαιρών.

Μονάδες 7

νεο φροντιστηριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών είναι κεντρική και ελαστική. Έστω $\vec{\upsilon}_1$ η ταχύτητα της σφαίρας A, ακριβώς πριν την κρούση της με την ακίνητη σφαίρα B. Για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σφαιρών αμέσως μετά την κρούση, ισχύουν:

$$\upsilon_1{}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \ , \ \ \upsilon_2{}' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \qquad (1)$$

Επειδή οι δύο σφαίρες μετά την κρούση φτάνουν ακριβώς στο ίδιο ύψος από το αρχικό οριζόντιο επίπεδο ηρεμίας τους, αυτό σημαίνει ότι αμέσως μετά τη κρούση είχαν κατά μέτρο ίσες ταχύτητες (εφαρμόζοντας οποιοδήποτε ενεργειακό θεώρημα). Επειδή όμως αμέσως μετά την κρούση κινούνται αντίθετα, για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων τους, ισχύει:

$$\upsilon_1{}' = -\upsilon_2{}' \qquad (2)$$

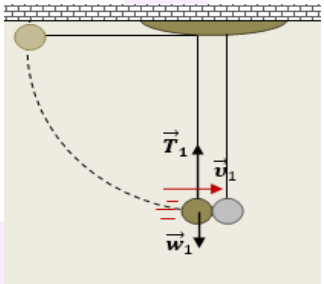
Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), με τη συνθήκη (2), προκύπτει:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 = -\frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1$$

$$\text{ή} \quad m_1 - m_2 = -2 \cdot m_1, \quad \boldsymbol{m_2} = 3 \cdot m_1 = \mathbf{900\ g}$$

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής της σφαίρας A ακριβώς πριν την κρούση, είναι ίσο με το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται εκείνη τη στιγμή, η οποία είναι κατακόρυφη, με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής κίνησης και παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, για τη σφαίρα αυτή:



$$\left|\frac{dp}{dt}\right| = \sum F = F_\kappa = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1^2}{l} \qquad (3)$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κίνηση της σφαίρας A από τη στιγμή που την αφήσαμε ελεύθερη να κινηθεί με το νήμα σε οριζόντια θέση, μέχρι τη στιγμή, ακριβώς πριν την κρούση της με τη σφαίρα B:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_1^2 - 0 = W_{w_1}$$

$$\text{ή} \quad m_1 \cdot \upsilon_1^2 = 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot l \qquad (4)$$

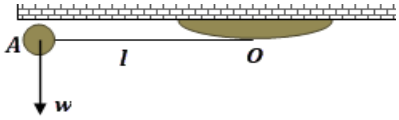
Συνδυάζουμε τις σχέσεις (3) και (4):

$$\left|\frac{dp}{dt}\right| = 2 \cdot m_1 \cdot g = 6\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Μονάδες 6

4.3. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας A, ως προς τον άξονα περιστροφής στο ακλόνητο άκρο O του νήματος, κατά την κίνησή της πριν την κρούση, είναι ίσο με το μέτρο της συνισταμένης των ροπών, των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτή, ως προς αυτό τον άξονα. Η τάση του νήματος, δεν δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής. Άρα η συνισταμένη των ροπών είναι μόνο η ροπή του βάρους της και γίνεται μέγιστη, όταν είναι μέγιστη η απόσταση του φορέα του βάρους από τον άξονα, δηλαδή στην αρχική θέση από όπου την αφήσαμε ελεύθερη.

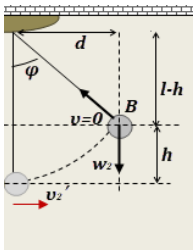
νέο φροντιστήριο



Έτσι για την αρχική κίνηση της σφαίρας A πριν την κρούση είναι:

$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{max}^{A,\pi\rho\iota\nu} = \tau_{max}^{O} = w_1 \cdot l = m_1 \cdot g \cdot l = 2{,}4\ \mathrm{N \cdot m}$$

Μονάδες 6



4.4 Για την κίνηση της σφαίρας B μετά την κρούση, με τους ίδιους συλλογισμούς, είναι:

$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{max}^{B,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \tau_{max}^{\alpha\xi o\nu\alpha} = w_2 \cdot d = m_2 \cdot g \cdot d \qquad (5)$$

Από τη σχέση (4) έχουμε::

$$\upsilon_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot l} \qquad (6)$$

Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2{}'$, της σφαίρας B αμέσως μετά την κρούση έχει μέτρο:

$$\upsilon_2{}' = \frac{2 \cdot m_1 \cdot \upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot m_1 \cdot \upsilon_1}{m_1 + 3 \cdot m_1} = \frac{\upsilon_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot l} \qquad (7)$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη σφαίρα B, κατά την κίνησή της αμέσως μετά την κρούση, μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά της, σε ύψος h από το αρχικό οριζόντιο επίπεδο που βρισκόταν:

$$0 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \upsilon'^2_2 = -m_2 \cdot g \cdot h \quad , \quad \upsilon'^2_2 = 2 \cdot g \cdot h$$

Λόγω της (7) προκύπτει:

$$\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot g \cdot l = 2 \cdot g \cdot h \quad , \quad h = \frac{l}{4} = 0{,}2\ \mathrm{m}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο, εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα:

$$d^2 + (l-h)^2 = l^2 \quad , \quad d = \sqrt{l^2 - (l-h)^2} = \sqrt{0{,}8^2 - 0{,}6^2}\ \mathrm{m} = \sqrt{\frac{64}{100} - \frac{36}{100}}\ \mathrm{m} = \sqrt{\frac{28}{100}}\ \mathrm{m} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{10}\ \mathrm{m}$$

$$\text{Τελικά} \quad d = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{3}\ \mathrm{m} = \frac{8}{15}\ \mathrm{m}$$

Έτσι από τη σχέση (5), προκύπτει:

$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{max}^{B,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = 0{,}9 \cdot 10 \cdot \frac{8}{15}\ \mathrm{N \cdot m} = \frac{9 \cdot 8}{15}\ \mathrm{N \cdot m} = \frac{24}{5}\ \mathrm{N \cdot m} = 4{,}8\ \mathrm{N \cdot m}$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο