Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Γ Λυκείου

Φυσική Προσανατολισμού

Κεφάλαιο: 1 Ηλεκτρικές – Μηχανικές Ταλαντώσεις

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Η εξίσωση της ταχύτητας ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή δίνεται από την σχέση

$$\upsilon = 4\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t) \text{ στο S.I.}$$

4.1. Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης και την περίοδο ταλάντωσης του ταλαντωτή.

Μονάδες 6

4.2. Να γράψετε την εξίσωση επιτάχυνσης για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή.

Μονάδες 6

4.3. Αν ο ταλαντωτής έχει μάζα $m = 200g$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας.

Μονάδες 7

4.4. Μετά από αρκετό χρόνο επεμβαίνει στο σύστημα ένα εξωτερικό αίτιο, το οποίο ασκεί δύναμη της μορφής $F = F_0\sigma\upsilon\nu(20\pi t)$ στο S.I. Να βρείτε την περίοδο ταλάντωσης του συστήματος και να εξετάσετε αν το σύστημα θα βρεθεί σε συντονισμό. Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

Μονάδες 6

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η εξίσωση ταχύτητας του απλού αρμονικού ταλαντωτή $\upsilon = 4\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t)$ αντιστοιχεί στην γενική μορφή $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t)$. Με αντιστοίχιση των σχέσεων προκύπτει ότι $\upsilon_{max} = 4\pi\frac{m}{s}$ και $\omega = 10\pi\frac{rad}{s}$. Το πλάτος ταλάντωσης είναι

$$\upsilon_{max} = \omega A \Leftrightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} = \frac{4\pi}{10\pi}m = 0{,}4m$$

Αντίστοιχα, η περίοδος ταλάντωσης είναι

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\pi}s = 0{,}2s$$

Μονάδες 6

4.2. Η εξίσωση επιτάχυνσης έχει γενική μορφή $\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t)$. Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης έχει μέτρο

$$\alpha_{max} = \omega^2 A = (10\pi)^2 \cdot 0{,}4\frac{m}{s^2} = 400\frac{m}{s^2}$$

Αντικαθιστώντας στην γενική μορφή της εξίσωσης επιτάχυνσης προκύπτει ότι

$$\alpha = -400\eta\mu(10\pi t) \text{ στο S.I.}$$

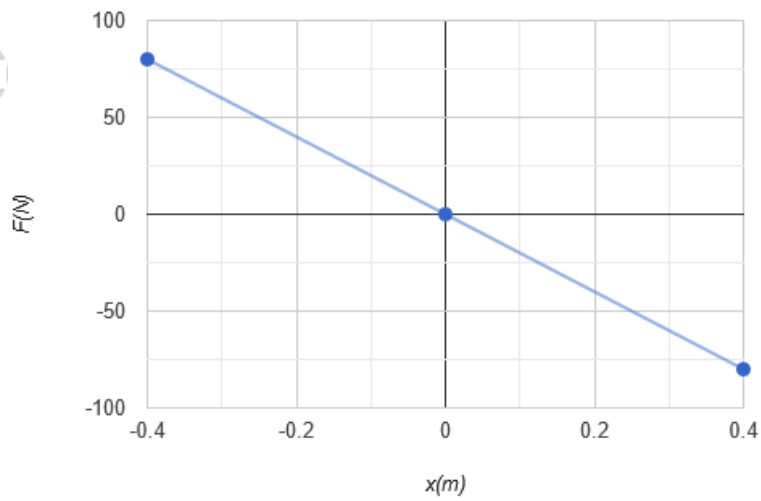
Μονάδες 6

4.3. Η σχέση που συνδέει την δύναμη επαναφοράς με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας σε μία απλή αρμονική ταλάντωση έχει μορφή $F = -Dx$, όπου D είναι η σταθερά επαναφοράς. Η τιμή της είναι

$$D = m\omega^2 = 0{,}2kg \cdot \left(10\pi\frac{rad}{s}\right)^2 = 200\frac{N}{m}$$

Επομένως, η συνάρτηση δύναμης επαναφοράς-απομάκρυνσης είναι $F = -200x$, με $-0{,}4 \le x \le +0{,}4$. Η σχέση αυτών των δύο μεγεθών είναι γραμμική και για τον σχεδιασμό της γραφικής της παράστασης σχεδιάζουμε έναν πίνακα τιμών.

Απομάκρυνση x(m)	−0,4	0	+0,4
Δύναμη επαναφοράς F(N)	+80	0	−80



Μονάδες 7

4.4. Στην περίπτωση που στο ταλαντούμενο σύστημα επεμβαίνει περιοδικά ένα εξωτερικό αίτιο (διεγέρτης) προσφέροντας ενέργεια μέσω της δύναμης που ασκεί, το σύστημα ταλαντώνεται με την συχνότητα του διεγέρτη και όχι με την ιδιοσυχνότητά του.

Ο διεγέρτης έχει κυκλική συχνότητα $\omega_\delta = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, οπότε η περίοδος ταλάντωσης του συστήματος είναι

$$T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_\delta} = \frac{2\pi}{20\pi}\text{s} = 0{,}1\text{s}$$

Η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f_\delta = \frac{1}{T_\delta} = \frac{1}{0{,}1}\text{Hz} = 10\text{Hz}$, ενώ η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος είναι $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0{,}2}\text{Hz} = 5\text{Hz}$. Επειδή αυτές οι δύο συχνότητες δεν είναι ίσες, το σύστημα δεν βρίσκεται σε συντονισμό.

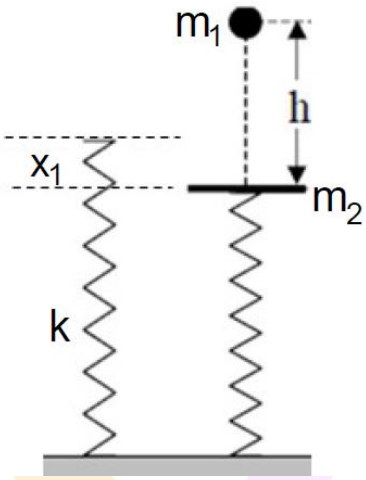
Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σώμα μάζας $m_1 = 1kg$ αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος $h = 5m$ πάνω σε δίσκο μάζας $m_2 = 4kg$, ο οποίος ισορροπεί σε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100\frac{N}{m}$. Η κρούση θεωρείται μετωπική και ελαστική και η διάταξη απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Αν είναι γνωστό ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{m}{s^2}$ και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, να βρείτε:



4.1. το μέτρο της ταχύτητας υ_1 με την οποία το σώμα προσκρούει στον δίσκο.

Μονάδες 5

4.2. τις ταχύτητες του σώματος και του δίσκου αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 6

4.3. την μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Μονάδες 8

4.4. την εξίσωση απομάκρυνσης για την απλή αρμονική ταλάντωση του δίσκου και να την αποδώσετε γραφικά στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq T$, όπου T είναι η περίοδος ταλάντωσης του δίσκου. (Να θεωρήσετε θετική φορά προς τα κάτω και ότι αμέσως μετά την κρούση το σώμα απομακρύνεται και δεν συγκρούεται ξανά με τον δίσκο).

Μονάδες 6

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το σώμα από την στιγμή που αφήνεται ελεύθερο από ύψος h πάνω από τον δίσκο και μέχρι να τον συναντήσει εκτελεί ελεύθερη πτώση. Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία προσκρούει στον δίσκο μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας τους τύπους της ελεύθερης πτώσης ή με εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Με χρήση του δεύτερου τρόπου έχουμε:

$$\Delta K = W_{ολ} \Leftrightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B \Leftrightarrow \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} - 0 = m_1 gh \Leftrightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5}\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$$

Μονάδες 5

4.2. Για τον υπολογισμό των ταχυτήτων του σώματος και του δίσκου αμέσως μετά την ελαστική κρούση, θα εφαρμόσουμε τους γνωστούς τύπους από το σχολικό βιβλίο. Η ταχύτητα του σώματος αμέσως μετά την μετωπική ελαστική κρούση είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{1-4}{1+4}10\frac{m}{s} = -6\frac{m}{s}$$

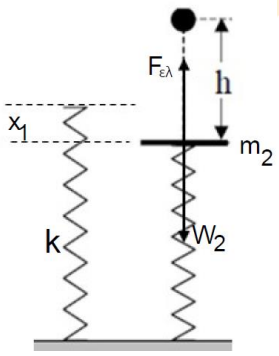
Αντίστοιχα, η ταχύτητα του δίσκου θα είναι:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2 \cdot 1}{1+4}10\frac{m}{s} = 4\frac{m}{s}$$

Μονάδες 6

4.3. Το ελατήριο θα έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια στην θέση της μέγιστης παραμόρφωσης. Αυτή είναι η χαμηλότερη θέση στην οποία θα βρεθεί το ελατήριο κατά την ταλάντωσή του. Στην θέση αυτή η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $x_1 + A$, όπου x_1 είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου στην θέση ισορροπίας του δίσκου και A είναι το πλάτος ταλάντωσης του δίσκου. (Στην ανώτερη θέση της ταλάντωσης του δίσκου η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι μικρότερη, καθώς είναι $|x_1 - A|$.)

Στην θέση ισορροπίας (δείτε το παρακάτω σχήμα) ο δίσκος δέχεται δύο δυνάμεις, το βάρος του W_2 και τη δύναμη από το ελατήριο $F_{ελ}$, οι οποίες έχουν συνισταμένη μηδέν.



Άρα:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_{ελ} = W_2 \Leftrightarrow kx_1 = m_2 g \Leftrightarrow x_1 = \frac{m_2 g}{k} = \frac{4 \cdot 10}{100}m = 0{,}4m$$

Η κυκλική συχνότητα με την οποία γίνεται η ταλάντωση του δίσκου είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{100}{4}}\frac{rad}{s} = 5\frac{rad}{s}$$

Η ταχύτητα που αποκτά ο δίσκος αμέσως μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα στην ταλάντωση που εκτελεί, οπότε το πλάτος ταλάντωσης είναι:

$$\upsilon_2' = \omega A \Leftrightarrow A = \frac{\upsilon_2'}{\omega} = \frac{4}{5}m = 0{,}8m$$

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

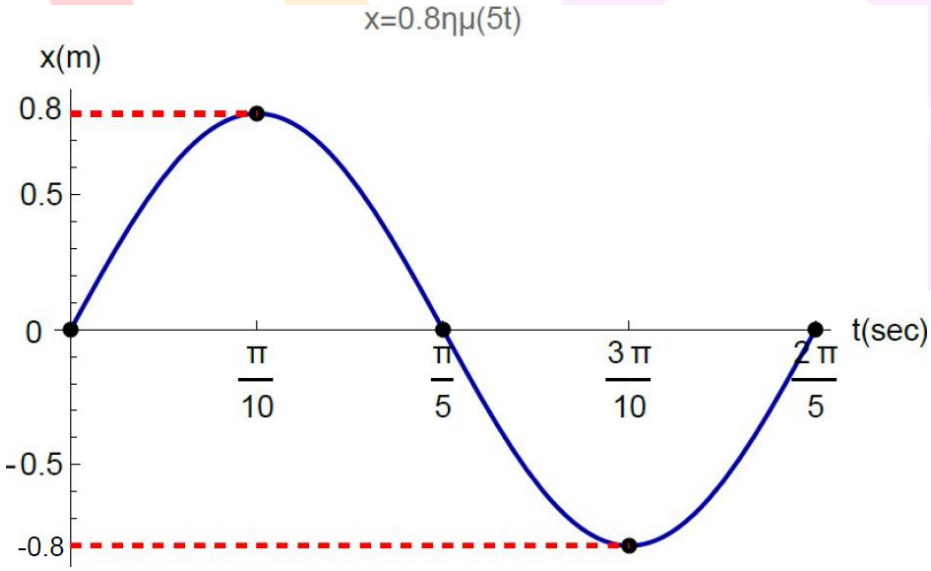
$$U_{max,\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(x_1 + A)^2 = \frac{1}{2}100(0{,}4 + 0{,}8)^2 J = 72\ J$$

Μονάδες 8

4.4. Η εξίσωση ταλάντωσης έχει γενική μορφή $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$. Ο δίσκος την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην θέση ισορροπίας $(d = 0)$. Συνεπώς η αρχική φάση είναι $\eta\mu\varphi = \frac{d}{A} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$ γιατί κινείται προς την θετική κατεύθυνση $(\upsilon > 0)$. Άρα η εξίσωση ταλάντωσης είναι:

$$x = 0{,}8\eta\mu(5t) \quad (S.I.)$$

Η περίοδος ταλάντωσης του δίσκου είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}4\pi\ s$ και η γραφική παράσταση $x - t$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

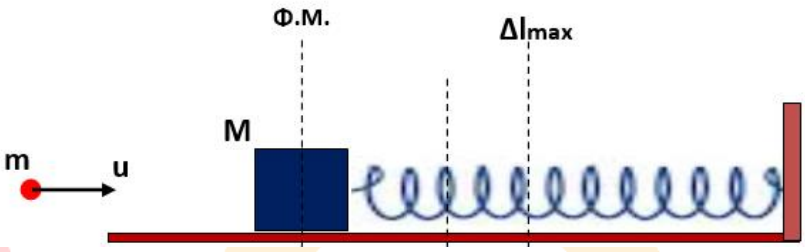


Μονάδες 6

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα βλήμα μάζας $m = 50\ g$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon = 200 \cdot \sqrt{15}\,\frac{m}{s}$ και σφηνώνεται στο κέντρο μάζας ενός ξύλου μάζας $M = 4950\ g$, το οποίο είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το ξύλο εφάπτεται στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου που έχει το φυσικό του μήκος, σταθεράς $k = 10\ \frac{N}{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο.



Στο συσσωμάτωμα ασκείται, επίσης, δύναμη αντίστασης στην κίνησή του της μορφής $F_{\alpha\nu} = -0{,}1 m_{\sigma\upsilon\sigma} g$.

Να υπολογίσετε:

4.1. Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 7

4.2. Την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

Μονάδες 9

Μόλις το συσσωμάτωμα βρεθεί στη θέση μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου, καταργείται η δύναμη αντίστασης και το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με θετική φορά προς τα δεξιά.

4.3. Να γράψετε τις εξισώσεις:

i. της μετατόπισης ως προς τον χρόνο.

ii. της δύναμης επαναφοράς ως προς την μετατόπιση.

Μονάδες 9

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

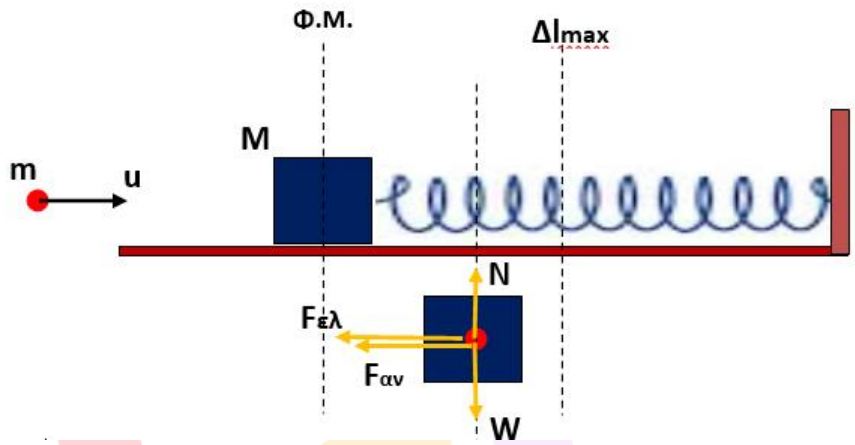
4.1. Κατά την διάρκεια της κρούσης το σύστημα θεωρείται μονωμένο και ισχύει η Α.Δ.Ο.:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$$

$$m\upsilon + 0 = (m + M)V_{\sigma\upsilon\sigma} \Leftrightarrow 50 \cdot 10^{-3}kg \cdot 200 \cdot \sqrt{15}\frac{m}{s} = 5kg \cdot V_{\sigma\upsilon\sigma} \Leftrightarrow V_{\sigma\upsilon\sigma} = 2 \cdot \sqrt{15}\frac{m}{s}$$

Μονάδες 7

4.2. Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση, λόγω της δύναμης του ελατηρίου και της δύναμης αντίστασης που του ασκούνται, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Αρχικά υπολογίζουμε το μέτρο της δύναμης αντίστασης:

$$F_{\alpha\nu} = 0{,}1m_{\sigma\upsilon\sigma}g = 0{,}1 \cdot (m + M) \cdot g \Leftrightarrow F_{\alpha\nu} = 5N$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για το συσσωμάτωμα, από την θέση Φ.Μ. του ελατηρίου όπου έγινε η κρούση έως την θέση που σταματά στιγμιαία.

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w + W_N + W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_{F_{\alpha\nu}} \Leftrightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}(m + M)V_{\sigma\upsilon\sigma}^2 = 0 + 0 + \left(U_{\alpha\rho\chi}^{\varepsilon\lambda} - U_{\tau\varepsilon\lambda}^{\varepsilon\lambda}\right) - F_{\alpha\nu}\Delta l_{max} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m + M)V_{\sigma\upsilon\sigma}^2 = -\frac{1}{2}k\Delta l_{max}^2 - F_{\alpha\nu}\Delta l_{max} \Leftrightarrow$$

$$150J = 5\frac{N}{m} \cdot \Delta l_{max}^2 + 5N \cdot \Delta l_{max} \Leftrightarrow \Delta l_{max}^2 + \Delta l_{max} - 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta l_{max} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2} \Leftrightarrow \Delta l_{max} = 5m$$

Η τιμή $\Delta l_{max} = 5m$ αναφέρεται στη ζητούμενη συσπείρωση του ελατηρίου.

Η αρνητική τιμή που προκύπτει αντιστοιχεί στην μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου η οποία δεν ζητείται.

Μονάδες 9

4.3. Η εξίσωση ταλάντωσης είναι της μορφής : $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Για το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta l_{max} = 5m$

Επίσης ισχύει: $D = k = (m + M)\omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{2}\,\frac{rad}{s}$

Και για την αρχική φάση: Για $t = 0$, $x = A = 5m$

$$5m = 5m \cdot ημ(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \Leftrightarrow ημ\varphi_0 = 1 = ημ\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_0 = 2κπ + \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \varphi_0 = 2κπ + \pi - \frac{\pi}{2}$$

και άρα: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση ταλάντωσης θα είναι:

$$x = 5ημ\left(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad S.I.$$

Η σχέση της συνισταμένης δύναμης στον ταλαντωτή με την θέση είναι:

$$\Sigma F = -D \cdot x \Leftrightarrow \Sigma F = -10 \cdot x \quad S.I.$$

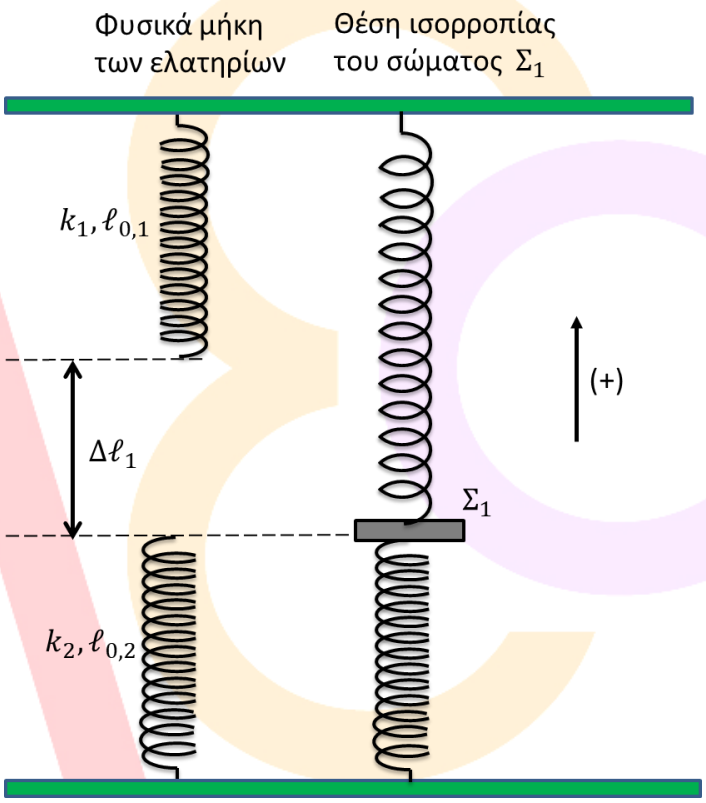
Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Το πάνω άκρο του κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου $k_1 = 40\frac{N}{m}$ είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο ενώ το άλλο άκρο του είναι δεμένο στο σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = 1Kg$. Το κάτω άκρο του κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου $k_2 = 60\frac{N}{m}$ είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο ενώ το άλλο άκρο του είναι δεμένο στο σώμα Σ_1. Τα σημεία στερέωσης των δύο ελατηρίων ανήκουν στην ίδια κατακόρυφο. Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 το ελατήριο k_1 έχει επιμήκυνση $\Delta\ell_1$ ενώ το k_2 βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Απομακρύνουμε το σώμα Σ_1 προς τα πάνω κατά $\Delta\ell_1$ και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο. Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.



4.1. Να αποδείξετε ότι μετά τη χρονική στιγμή t_0 το σώμα Σ_1 θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της.

Μονάδες 8

4.2. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του Σ_1 συναρτήσει του χρόνου και να την παραστήσετε γραφικά μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{6\pi}{20}\ s$.

Μονάδες 8

Ένα σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3Kg$ βρίσκεται σε ύψος $h = 0{,}3\ m$, πάνω από τη θέση που αφήσαμε το σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή t_0. Την κατάλληλη χρονική στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ_2 να κινηθεί κατακόρυφα οπότε τη χρονική στιγμή t_1 συγκρούεται πλαστικά με το Σ_1.

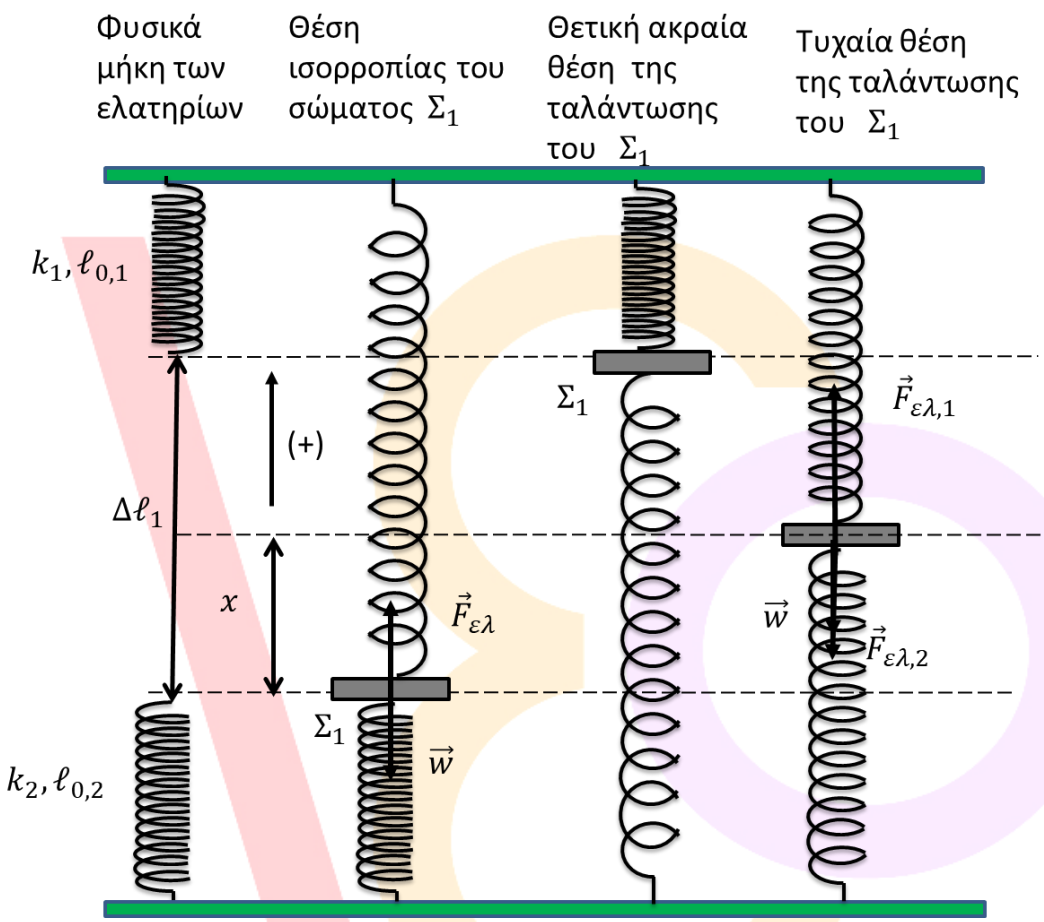
4.3. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος. Δίνεται ότι: $\sqrt{0{,}3625} = 0{,}602$

Μονάδες 9

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Για να εκτελεί το σώμα απλή αρμονική ταλάντωση θα πρέπει στην τυχαία θέση να δέχεται συνισταμένη δύναμη ανάλογη και ετερόσημη της απομάκρυνσης x.



Στην θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 το ελατήριο k_1 είναι σε επιμήκυνση $\Delta\ell_1$ και το ελατήριο k_2 είναι στο φυσικό του μήκος.

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - w = 0 \Rightarrow k_1 \cdot \Delta\ell_1 = m_1 g \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση το ελατήριο k_1 είναι σε επιμήκυνση $(\Delta\ell_1 - x)$ και το ελατήριο k_2 σε επιμήκυνση x.

$$\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda,1} - w - F_{\varepsilon\lambda,2} \Rightarrow \Sigma F = k_1 \cdot (\Delta\ell_1 - x) - m_1 g - k_2 \cdot x \overset{(1)}{\Rightarrow} \Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x \Rightarrow$$
$$\Sigma F = -D \cdot x$$

Επομένως το σώμα Σ_1 εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά

$$D = k_1 + k_2 \Rightarrow D = 100\frac{N}{m}$$

και περίοδο

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D}} \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{5}\ s$$

Μονάδες 8

4.2. Το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με εξίσωση $x = A_1 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0),\ 0 \le \varphi_0 < 2\pi$

Στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσης η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι ίση με το πλάτος Α, δηλαδή:

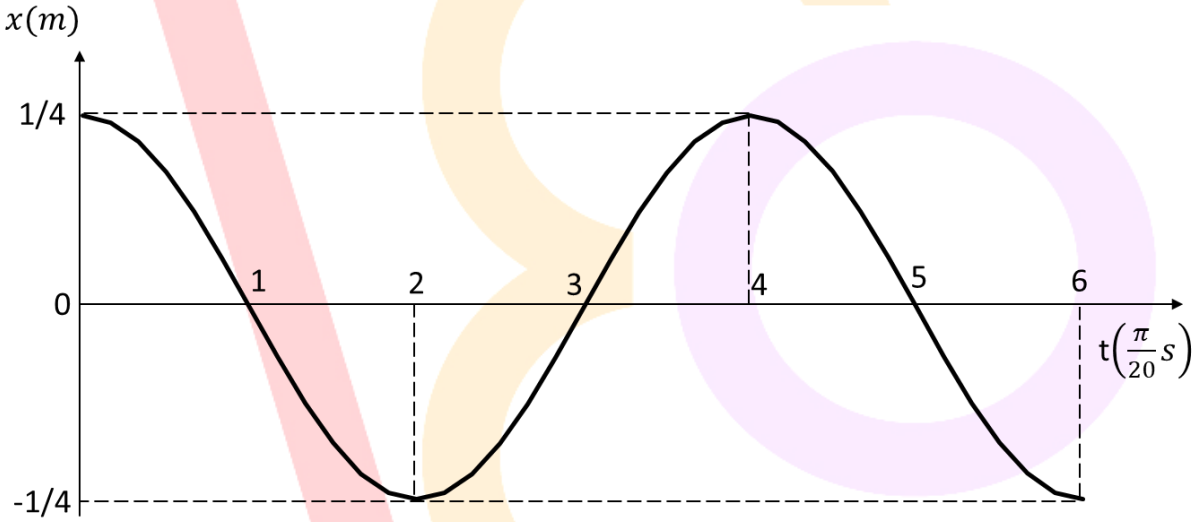
$$A_1 = \Delta\ell_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} A_1 = \frac{m_1 g}{k_1} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4} m$$

$$D = m_1 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m_1}} \Rightarrow \omega_1 = 10 \frac{rad}{s}$$

Για $t_0 = 0$ το σώμα Σ_1 βρίσκεται σε απομάκρυνση $x = +A_1$ επομένως,

$$A_1 \cdot \eta\mu\varphi_0 = A_1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\, rad$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω: $x = \frac{1}{4} \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (SI)

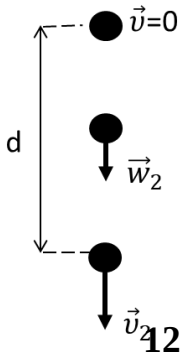


Μονάδες 8

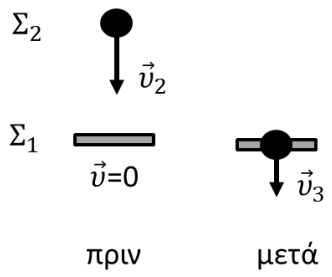
4.3. Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην κάτω (αρνητική) ακραία θέση της ταλάντωσής του. Η απόσταση που διανύει το σώμα Σ_2 από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με: $d = h + 2A_1 \Rightarrow d = 0{,}8\, m$

Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ_2 πριν την κρούση.

$$\Delta K = W_{w_2} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 - 0 = m_2 g\, d \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{2gd} \Rightarrow \upsilon_2 = 4 \frac{m}{s}$$



Κατά τη διάρκεια της κρούσης το σύστημα θεωρείται μονωμένο.

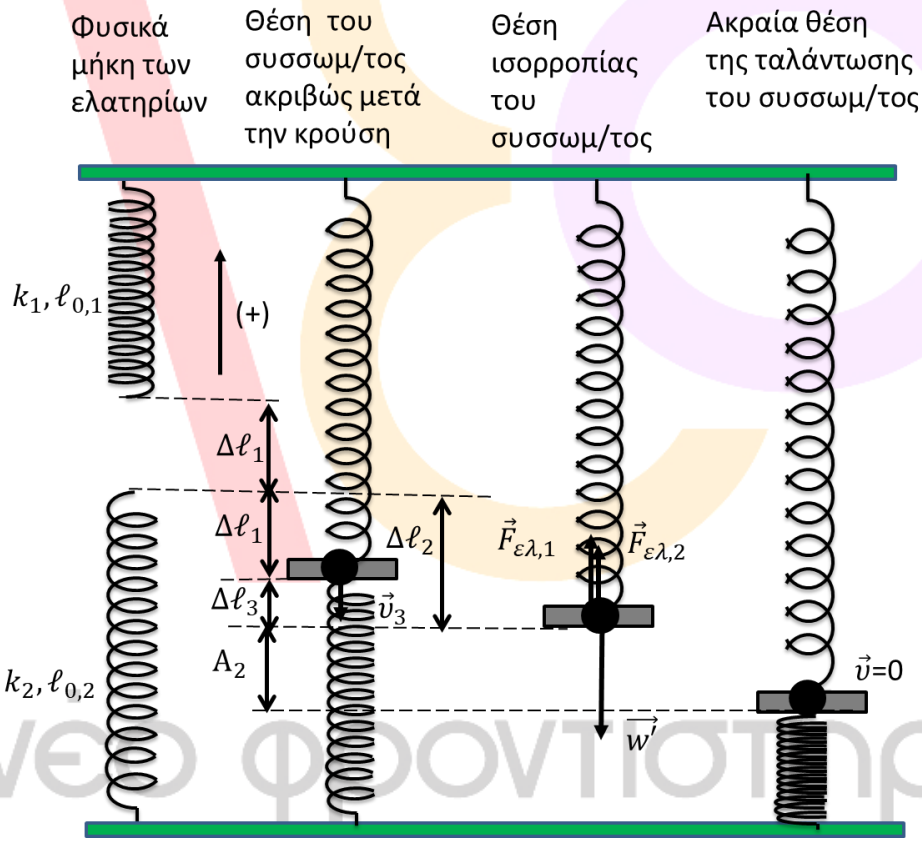


Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m_2\upsilon_2 = (m_1+m_2)\upsilon_3 \Rightarrow \upsilon_3 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_3 = 3\frac{m}{s}$$

Έστω $\Delta\ell_2$ η συσπείρωση του ελατηρίου k_2 στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Στη θέση αυτή το ελατήριο k_1 έχει επιμήκυνση $\Delta\ell_4 = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$, επομένως:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda_{,1}} + F_{\varepsilon\lambda_{,2}} - w' = 0 \Rightarrow k_1\cdot(\Delta\ell_1+\Delta\ell_2) + k_2\Delta\ell_2 = (m_1+m_2)g \Rightarrow \Delta\ell_2 = 0{,}3\ m$$



Η απομάκρυνση του συσσωματώματος ακριβώς μετά την κρούση από τη θέση ισορροπίας του είναι ίση με: $\Delta\ell_3 = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_3 = 0{,}05\ m$

Το συσσωμάτωμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά $D = k_1 + k_2 \Rightarrow D = 100\frac{N}{m}$

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ενέργειας της ταλάντωσης

$$K + U = E_T \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_3^2 + \frac{1}{2}D\cdot\Delta\ell_3^2 = \frac{1}{2}D\cdot A_2^2 \Rightarrow A_2 = 0{,}602\ m$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα Σ μάζας $m = 2kg$ κρέμεται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k. Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ακλόνητα σε οροφή. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ εκτοξεύουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ κατακόρυφα προς τα πάνω. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 0{,}2\ m$. Την προς τα πάνω κατεύθυνση λαμβάνουμε ως θετική. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{10} s$ το σώμα περνά για πρώτη φορά μετά την εκτόξευση από τη θέση ισορροπίας του.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

4.1. Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης και να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σώματος.

Μονάδες 8

4.2. Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς D και το μέτρο της αρχικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$.

Μονάδες 7

4.3. Να γράψετε τη συνάρτηση που περιγράφει τη δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ σε σχέση με την απομάκρυνση και τη συνάρτηση που περιγράφει τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου σε σχέση με την απομάκρυνση. Να παραστήσετε γραφικά κάθε σχέση σε αριθμημένους άξονες.

Μονάδες 10

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Για $t_0 = 0$: $x_0 = 0$ και $\upsilon_0 > 0$, επομένως $\varphi_0 = 0$. Για $t_1 = \frac{\pi}{10} s$ το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά, επομένως: $x_1 = 0$ και $\upsilon_1 < 0$. Το χρονικό διάστημα για την κίνηση του σώματος από τη θέση ισορροπίας στη θετική ακραία θέση και ξανά στη θέση ισορροπίας είναι ίσο με $t_1 = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi}{10} s \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} s$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σώματος συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$x = A \cdot \eta\mu\omega t$$

Όμως, $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{rad}{s}$

Επομένως,

$$x = 0{,}2 \cdot \eta\mu 10t \ (SI)$$

Μονάδες 8

4.2. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική με σταθερά $D = k$, όπου

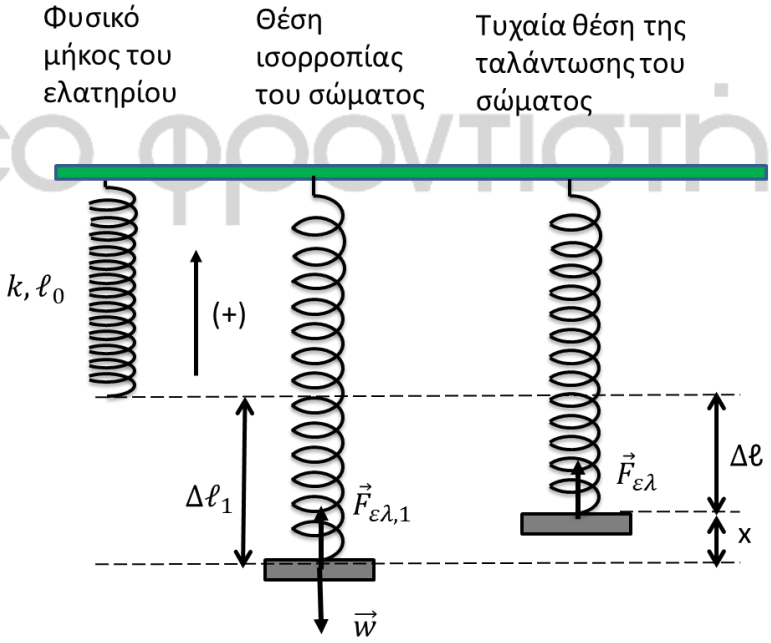
$$D = m \cdot \omega^2 \Rightarrow D = 2 \cdot 100 \frac{N}{m} \Rightarrow D = 200 \frac{N}{m}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του επομένως έχει μέγιστη ταχύτητα

$$\upsilon_0 = \omega \cdot A \Rightarrow \upsilon_0 = 10 \cdot 0{,}2 \frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_0 = 2 \frac{m}{s}$$

Μονάδες 7

4.3. Έστω $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος και $\Delta\ell = \Delta\ell_1 - x$ στην τυχαία θέση της ταλάντωσής του.



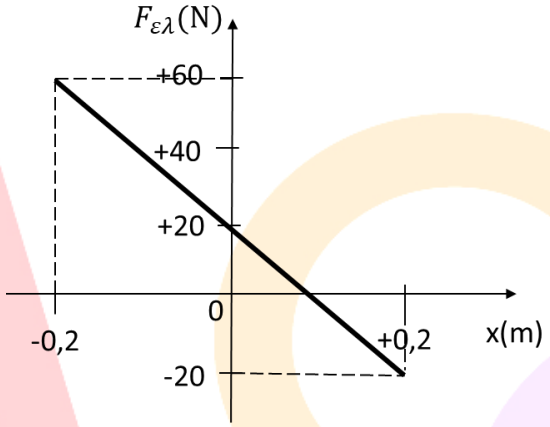
νέο φροντιστήριο

Στη θέση ισορροπίας: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - w = 0 \Rightarrow k \cdot \Delta\ell_1 = m \cdot g \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0{,}1\, m$

Στην τυχαία θέση η δύναμη του ελατηρίου είναι ίση με:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta\ell \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot (\Delta\ell_1 - x) \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 200(0{,}1 - x)\ (SI), \qquad -0{,}2 \le x \le +0{,}2$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η γραφική παράσταση της δύναμης του ελατηρίου συναρτήσει της απομάκρυνσης είναι γραμμική με αρνητική κλίση όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.

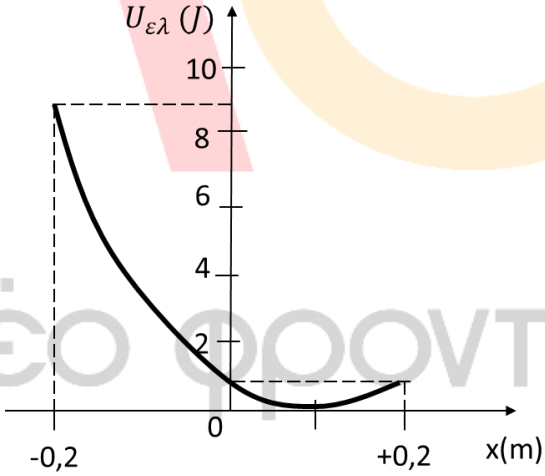


x(m)	$F_{\varepsilon\lambda}$(N)
-0,2	+60
0	+20
+0,1	0
+0,2	-20

Στην τυχαία θέση η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι ίση με:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta\ell^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta\ell_1 - x)^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} = 100 \cdot (0{,}1 - x)^2\ (SI), \qquad -0{,}2 \le x \le +0{,}2$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου συναρτήσει της απομάκρυνσης είναι τμήμα παραβολής με τα κοίλα πάνω όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



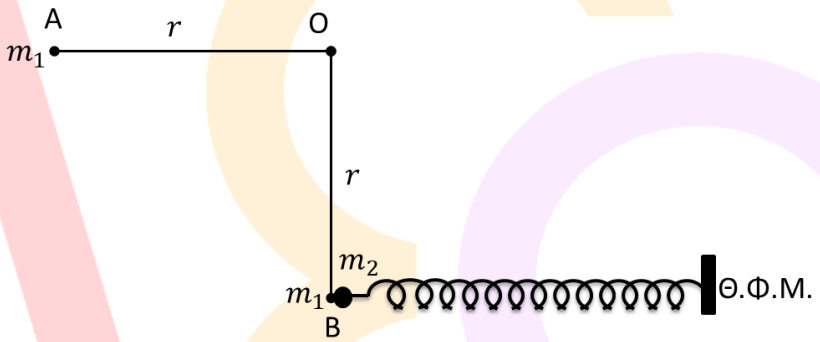
x(m)	$U_{\varepsilon\lambda}$(J)
-0,2	9
0	1
+0,1	0
+0,2	1

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα υλικό σημείο Σ_1 μάζας $m_1 = 100g$ κρέμεται από το κάτω άκρο ιδανικού νήματος μήκους $r = 0{,}8\ m$. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σε σταθερό σημείο Ο. Φέρνουμε το Σ_1 στη θέση Α όπου το νήμα είναι τεντωμένο και οριζόντιο και το αφήνουμε να κινηθεί. Τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο το υλικό σημείο Σ_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με υλικό σημείο Σ_2 μάζας $m_2 = 700g$ που ηρεμούσε σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 70\frac{N}{m}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο. Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\frac{m}{s^2}$.



4.1. Να υπολογίσετε την στροφορμή του Σ_1 ακριβώς πριν την κρούση, ως προς τον άξονα που περνά από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του Σ_1.

Μονάδες 8

4.2. Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων των Σ_1 και Σ_2 ακριβώς μετά την κρούση.

Μονάδες 8

4.3. Το Σ_2 μετά την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου και το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μηδενιστεί η ταχύτητα του Σ_2 για πρώτη φορά μετά την κρούση. Να υποθέσετε ότι δεν γίνεται άλλη κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων.

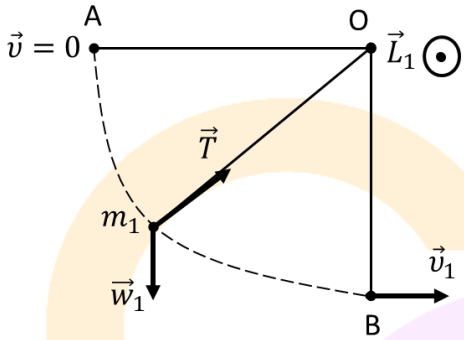
νεο φροντιστηριο

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4

4.1. Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ_1 από το Α στο Β.

$$\Delta K = W_{w_1} + W_T \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 = m_1 g r \Rightarrow \upsilon_1 = 4\frac{m}{s}$$



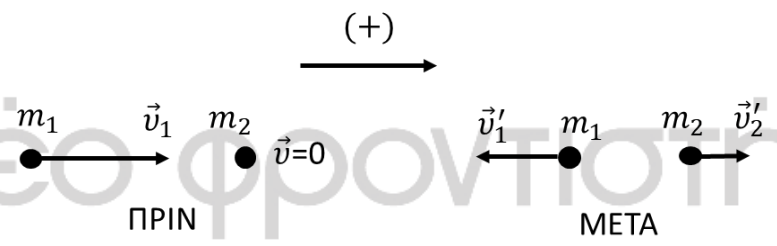
Η στροφορμή $\vec{L}_1$ του Σ_1 ως προς τον άξονα $z'z$ που περνά από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του Σ_1 έχει φορέα τον άξονα $z'z$, φορά προς τον αναγνώστη και, τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο, μέτρο:

$$L_1 = m_1\upsilon_1 r_1 \Rightarrow L_1 = 0{,}32\frac{Kg\cdot m^2}{s}$$

Μονάδες 8

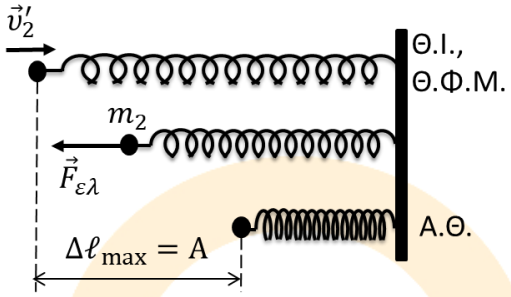
4.2. Η κρούση είναι μετωπική και ελαστική, επομένως:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = -3\frac{m}{s} \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = +1\frac{m}{s}$$



Μονάδες 8

4.3. Μετά την κρούση το Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, σταθερά $D = k$ και πλάτος ίσο με τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, επομένως:



$$k = m_2 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$$

$$\upsilon_2' = \upsilon_{max} \Rightarrow \upsilon_2' = \omega \cdot A \Rightarrow A = \Delta\ell_{max} = 0{,}1\ m$$

Η κίνηση του Σ_2 από τη Θ.Ι. μέχρι την ακραία θέση, όπου η ταχύτητά του μηδενίζεται, διαρκεί:

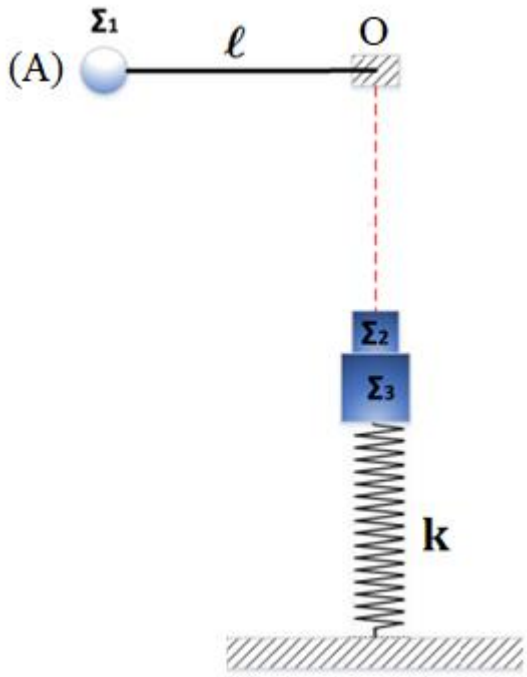
$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{20}s$$

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100N/m$ είναι δεμένο σώμα Σ_3, μάζας $m_3 = 1Kg$. Πάνω στο σώμα Σ_3 και σε επαφή με αυτό βρίσκεται σώμα Σ_2, μάζας $m_2 = 3Kg$ και το σύστημα ισορροπεί. Σε ένα σημείο Ο πάνω στην κατακόρυφο που διέρχεται από τον άξονα του ελατηρίου είναι δεμένο αβαρές μη εκτατό νήμα μήκους $\ell = 0{,}8m$, στο ελεύθερο άκρο του οποίου έχουμε στερεώσει σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 2Kg$. Φέρνουμε το νήμα με το σώμα Σ_1 στην οριζόντια θέση (Α) και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο, το σώμα Σ_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_2 και ταυτόχρονα κόβεται το νήμα.



4.1. Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση.

Μονάδες 6

4.2. Το σώμα Σ_3 μετά την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να υπολογίσετε το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης.

Μονάδες 8

4.3. Θεωρώντας ως χρονική στιγμή $t_o = 0$, τη στιγμή της κρούσης, αμελητέα τη διάρκεια της και θετική την φορά προς τα κάτω, να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{4}$s, την κινητική ενέργεια του σώματος Σ_3.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{10}$s, το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου.

Μονάδες 5

Να ληφθεί υπόψη ότι η επιτάχυνση βαρύτητας έχει τιμή $g = 10m/s^2$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Για την κάθοδο του σώματος $Σ_1$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για να βρούμε την ταχύτητά του λίγο πριν την κρούση με το σώμα $Σ_2$:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = ΣW \Rightarrow \frac{1}{2}m_1υ_1^2 - 0 = m_1gℓ \Rightarrow υ_1 = \sqrt{2gℓ} \Rightarrow υ_1 = 4\ \mathrm{m/s}$$

(Μονάδες 3)

Για την ελαστική κρούση ανάμεσα στα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ ισχύει:

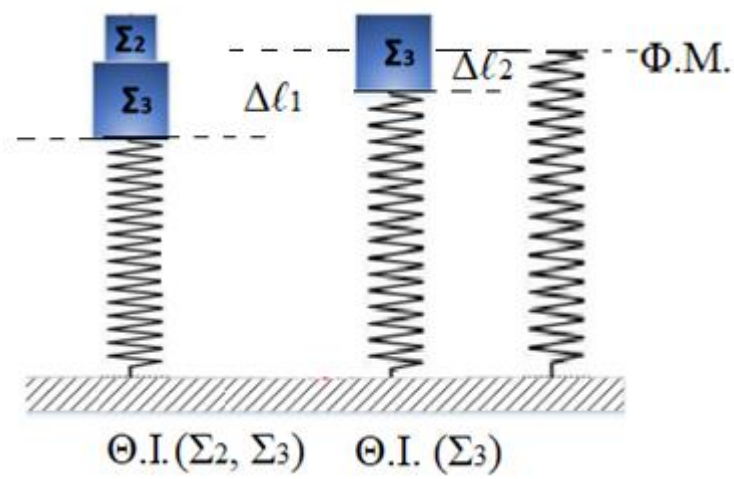
$$υ'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = -0{,}8\frac{m}{s} \quad (η\ κατεύθυνση\ του\ Σ_1\ προς\ τα\ αριστερά)$$

$$υ'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 = 3{,}2\frac{m}{s} \quad (η\ κατεύθυνση\ του\ Σ_2\ προς\ τα\ δεξιά)$$

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

4.2. Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος $Σ_3$ το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά $Δℓ_2$, οπότε:



$ΣF = 0 \Rightarrow F_{ελ} = W_3 \Rightarrow kΔℓ_2 = m_3g \Rightarrow$

$Δℓ_2 = \frac{m_3g}{k} = 0{,}1\ m$ (Μονάδες 2)

Στην αρχική ισορροπία των δύο σωμάτων (ακραία θέση της ταλάντωσης εφόσον τα σώματα είναι ακίνητα), το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά $Δℓ_1$, οπότε:

$ΣF = 0 \Rightarrow F'_{ελ} = W_3 + W_2 \Rightarrow kΔℓ_1 = (m_2 + m_3)g \Rightarrow Δℓ_1 = \frac{(m_2+m_3)g}{k} = 0{,}4\ m$ (Μονάδες 2)

Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι: $A = Δℓ_1 - Δℓ_2 = 0{,}3\ m$ (Μονάδες 2)

Η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι: $T = 2π\sqrt{\frac{m_3}{k}} = \frac{π}{5}\ s$ (Μονάδες 2)

Μονάδες 8

4.3. Η σχέση της απομάκρυνσης με το χρόνο στην απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος $Σ_3$ είναι της μορφής: $x = Aημ(ωt + φ_o)$. Η γωνιακή συχνότητα δίνεται από τη σχέση: $ω = \frac{2π}{T} = 10r/s$.

Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ το σώμα $Σ_3$ ξεκινά την ταλάντωση από την θέση $x = +A$ (θετική φορά προς τα κάτω), οπότε έχουμε: $+A = Aημφ_o \Rightarrow ημφ_o = +1 \Rightarrow φ_o = \frac{π}{2}\ rad$ (αρχική φάση).

Συνεπώς, η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος $Σ_3$ σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$x = 0{,}3ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right) \quad S.I.$$ (Μονάδες 3)

Για τη χρονική στιγμή $t = \frac{π}{4}$s βρίσκουμε $x = 0$ (Θ.Ι. ταλάντωσης του σώματος $Σ_3$), οπότε το σώμα $Σ_3$ έχει τη μέγιστη ταχύτητα $υ = υ_{max} = Aω = 3\ m/s$. Άρα η κινητική ενέργεια του σώματος $Σ_3$ είναι:

$$K = \frac{1}{2} m_3 \upsilon^2 = 4{,}5\, J \quad \text{(Μονάδες 3)}$$

Μονάδες 6

4.4. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{10} s = \frac{T}{2}$ το σώμα Σ_3 θα βρεθεί στην άλλη ακραία του θέση ($x = -A$). Συνεπώς, η παραμόρφωση (επιμήκυνση) του ελατηρίου θα είναι: $\Delta\ell = A - \Delta\ell_2 = 0{,}2\, m$.

Άρα το μέτρο της δύναμης ελατηρίου είναι:

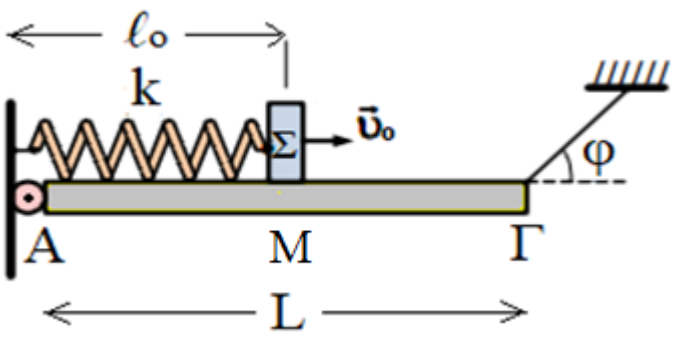
$$F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta\ell = 20\, N$$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4



Στη διάταξη του σχήματος η ομογενής ράβδος ΑΓ έχει μάζα $m = 4Kg$, μήκος $L = 4m$ και ισορροπεί. Η ράβδος είναι αρθρωμένη στο άκρο Α και δεμένη με νήμα στο άκρο Γ. Το νήμα σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^o$ με τον άξονα της ράβδου, έτσι ώστε η ράβδος να παραμένει οριζόντια (όπως φαίνεται στο σχήμα). Πάνω στη ράβδο τοποθετείται σύστημα που αποτελείται από ιδανικό ελατήριο, σταθεράς $k = 100N/m$, και σώμα Σ, μάζας $m_\Sigma = 1Kg$, στερεωμένο στη δεξιά άκρη του ελατηρίου (η αριστερή άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένη στον κατακόρυφο τοίχο πάνω από την άρθρωση). Το σώμα Σ αρχικά βρίσκεται στο μέσο Μ της ράβδου ΑΓ και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος ℓ_o. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ εκτοξεύουμε το σώμα Σ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o = 10m/s$ προς τα δεξιά. Αν θεωρήσουμε ότι το όριο θραύσης του νήματος έχει την κατάλληλη τιμή ώστε η απλή αρμονική ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα Σ να γίνεται χωρίς τον κίνδυνο να κοπεί το νήμα να υπολογίσετε:

4.1. το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ.

Μονάδες 6

4.2. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης του νήματος εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ.

Μονάδες 7

4.3. το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση τη χρονική στιγμή $t = \frac{3\pi}{10}$s.

Μονάδες 7

4.4. Αν θεωρήσουμε ότι το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_{\theta\rho} = 52{,}5N$, να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ, τη στιγμή που κόβεται το νήμα.

Μονάδες 5

Να ληφθεί υπόψη ότι η επιτάχυνση βαρύτητας έχει τιμή $g = 10m/s^2$.

νέο φροντιστήριο

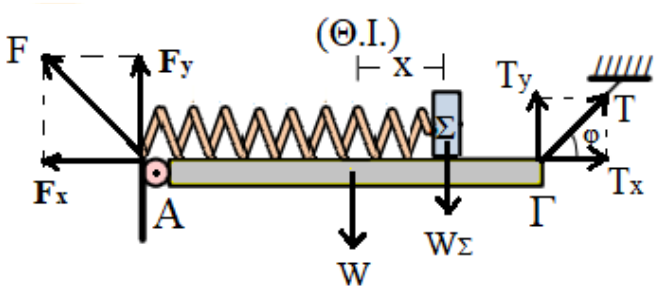
ΘΕΜΑ 4

4.1. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, συνεπώς βρίσκεται στην θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Συνεπώς έχει τη μέγιστη ταχύτητα, δηλαδή, $\upsilon_o = \upsilon_{max} = A\omega \Rightarrow A = \frac{\upsilon_o}{\omega}$ (1)

όπου ω, η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που δίνεται από τη σχέση $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_\Sigma}} = 10\ rad/s$. Άρα από τη σχέση (1) βρίσκουμε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ, $A = 1\ m$.

Μονάδες 6

4.2. Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος της W που ασκείται στο μέσο της (η ράβδος είναι ομογενής), η δύναμη T (τάση του νήματος), η δύναμη F (από την άρθρωση) και η δύναμη που ασκεί το σώμα Σ στη ράβδο που είναι ίση με το βάρος του W_Σ.



Έστω ότι το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση όπου η απομάκρυνση της ταλάντωσής του είναι x (θετική φορά επιλέγεται η φορά προς τα δεξιά).

Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow \tau_F + \tau_W + \tau_{W_\Sigma} + \tau_T = 0 \Rightarrow$$

$$0 - W \cdot \frac{L}{2} - W_\Sigma \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right) + T_y \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$-10(2 + x) - 80 + 4T\eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$T = 50 + 5x \quad (S.I.) \quad (2)$$

όπου $-1 \le x \le +1$.

Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης του νήματος εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ προκύπτει από τις ακραίες θέσεις που θα βρεθεί το σώμα Σ ($x = +A$ και $x = -A$ αντίστοιχα). Συνεπώς,

$$T_{max} = 55\ N \quad \kappa\alpha\iota \quad T_{min} = 45\ N$$

Μονάδες 7

4.3. Η σχέση της απομάκρυνσης με το χρόνο στην απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος Σ είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ το σώμα Σ ξεκινά την ταλάντωση από την θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα δεξιά (θεωρούμε θετική φορά τη φορά προς τα δεξιά), οπότε η αρχική του φάση είναι $\varphi_o = 0$. Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$x = \eta\mu 10t \quad (S.I.) \quad (3)$$

Για τη χρονική στιγμή $t = \frac{3\pi}{10}$ s βρίσκουμε $x = 0$, οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει: $T = 50\ N$.

Εφόσον ισορροπεί η ράβδος πρέπει $\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \Sigma F_y = 0$.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x \Rightarrow F_x = T\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow F_x = 25\sqrt{3}\ N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + T_y = W + W_\Sigma \Rightarrow F_y = 50 - T\eta\mu\varphi \Rightarrow F_y = 25\ N$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

Επομένως το μέτρο της δύναμης F, που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = 50\ N$$

Μονάδες 7

4.4. Τη χρονική στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα Σ βρίσκεται σε απομάκρυνση x_1, που υπολογίζεται από τη σχέση (2), δηλαδή:

$$T_{\theta\rho} = 50 + 5x_1 \Rightarrow\ x_1 = 0{,}5m$$

Εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης ενέργειας στην ταλάντωση (ΑΔΕΤ) έχουμε:

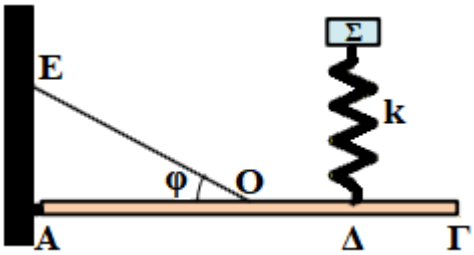
$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_\Sigma {\upsilon_1}^2 + \frac{1}{2}k{x_1}^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{k(A^2 - {x_1}^2)}{m_\Sigma}} \Rightarrow \upsilon_1 = 5\sqrt{3}\ m/s$$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4



Στη διάταξη του σχήματος η ομογενής ράβδος ΑΓ έχει μάζα $m = 6Kg$, μήκος L και ισορροπεί στηριζόμενη σε άρθρωση στη μία άκρη Α και σε νήμα ΟΕ το οποίο είναι δεμένο στο μέσο της Ο και σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^o$ με τον άξονα της ράβδου, έτσι ώστε η ράβδος να παραμένει οριζόντια (όπως φαίνεται στο σχήμα). Πάνω στη ράβδο και στο σημείο Δ, του οποίου η απόσταση από το άκρο Γ της ράβδου είναι $L/4$, είναι στερεωμένο ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο, σταθεράς $k = 100N/m$, στο πάνω μέρος του οποίου ισορροπεί σώμα Σ, μάζας $m_\Sigma = 1Kg$. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ μετακινούμε το σώμα Σ στη θέση όπου το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρώντας ως θετική φορά για την ταλάντωση τη φορά προς τα πάνω να υπολογίσετε:

4.1. το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ.

Μονάδες 6

4.2. τη μέγιστη τιμή του μέτρου της τάσης του νήματος εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ.

Μονάδες 8

4.3. το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση, τη χρονική στιγμή όπου η τιμή του μέτρου της τάσης του νήματος εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ παίρνει την ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 6

4.4. την κινητική ενέργεια του σώματος Σ τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{60}$s.

Μονάδες 5

Να ληφθεί υπόψη ότι η επιτάχυνση βαρύτητας έχει τιμή $g = 10m/s^2$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

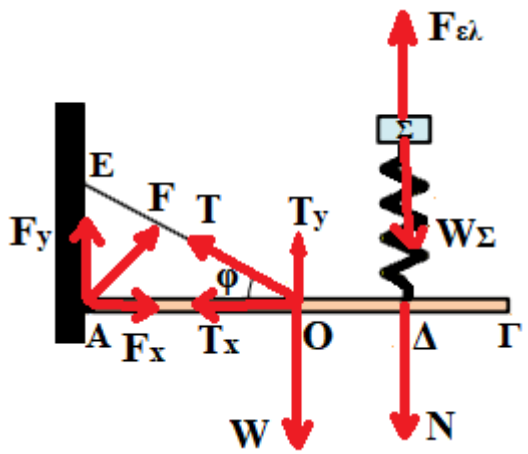
4.1. Αρχικά το σώμα Σ ισορροπεί πάνω στο ελατήριο υπό την επίδραση των δυνάμεων του βάρους του W_Σ και της δύναμης του ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$, οπότε αν $\Delta\ell$, η παραμόρφωση του ελατηρίου θα ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = W_\Sigma \Rightarrow \mathrm{k}\Delta\ell = m_\Sigma g \Rightarrow \Delta\ell = 0{,}1\ m$$

Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, συνεπώς βρίσκεται στην θετική ακραία θέση της ταλάντωσης που θα εκτελέσει (σύμφωνα με την θετική φορά προς τα πάνω για την ταλάντωση). Συνεπώς το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ είναι: $A = \Delta\ell = 0{,}1\ m$.

Μονάδες 6

4.2. Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος της W που ασκείται στο μέσο της (η ράβδος είναι ομογενής), η δύναμη T (τάση του νήματος), η δύναμη F (από την άρθρωση) και η δύναμη N, που ασκεί το ελατήριο στη ράβδο και που το μέτρο της είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$.



Έστω ότι το σώμα Σ βρίσκεται σε μια τυχαία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του όπου η απομάκρυνση της ταλάντωσής του είναι x (απόσταση από την θέση ισορροπίας του). Εφόσον το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πρέπει:

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - W_\Sigma = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = m_\Sigma g - kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 10 - 100x \quad (S.I.) \qquad (1)$$

όπου $-0{,}1 \le x \le +0{,}1$.

Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow \tau_F + \tau_W + \tau_N + \tau_T = 0 \Rightarrow$$

$$0 - W\cdot\frac{L}{2} - N\cdot\left(L - \frac{L}{4}\right) + T_y\cdot\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow T\eta\mu\varphi\cdot\frac{L}{2} = mg\cdot\frac{L}{2} + F_{\varepsilon\lambda}\cdot\frac{3L}{4} \Rightarrow$$

$$T = 120 + 3F_{\varepsilon\lambda} \quad (S.I.) \qquad (2)$$

Αν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις (1) και (2) καταλήγουμε:

$$T = 150 - 300x \quad (S.I.) \qquad (3)$$

όπου $-0{,}1 \le x \le +0{,}1$.

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της τάσης του νήματος εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ προκύπτει όταν το σώμα Σ βρεθεί στην κάτω ακραία του θέση $(x = -A)$. Συνεπώς,

$$T_{max} = 180\ N$$

Μονάδες 8

4.3. Η ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης του νήματος εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ προκύπτει όταν το σώμα Σ βρεθεί στην πάνω ακραία του θέση $(x = +A)$, δηλαδή λόγω της σχέσης (3)

$$T = T_{min} = 120\ N$$

νέο φροντιστήριο

Εφόσον ισορροπεί η ράβδος πρέπει $\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad και \quad \Sigma F_y = 0.$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x \Rightarrow F_x = T\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow F_x = 60\sqrt{3}\,N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + T_y = W + N \Rightarrow F_y = W + F_{\varepsilon\lambda} - T\eta\mu\varphi \Rightarrow F_y = 0$$

Επομένως το μέτρο της δύναμης F, που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = 60\sqrt{3}\,N$$

Μονάδες 6

4.4. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος Σ δίνεται από τη σχέση $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_\Sigma}} = 10\,rad/s.$

Η σχέση της απομάκρυνσης με το χρόνο στην απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος Σ είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$, το σώμα Σ ξεκινά την ταλάντωση από την θετική ακραία του θέση, οπότε $+A = A\eta\mu\varphi_o \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = 1 \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{2}$. Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$x = 0{,}1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.) \qquad (4)$$

Για τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{60}$ s βρίσκουμε $x = 0{,}05\sqrt{3}\,m$.

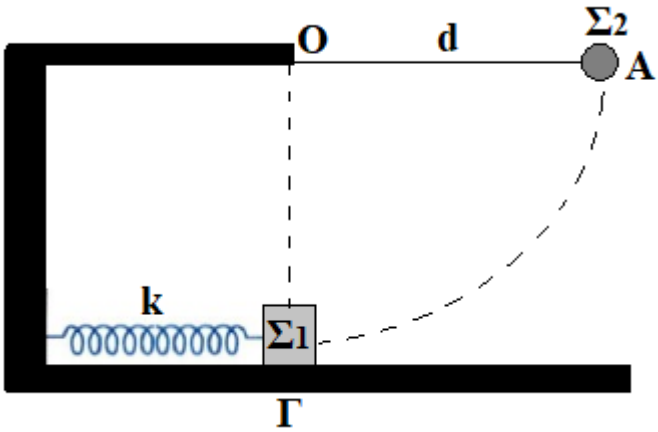
Εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης ενέργειας στην ταλάντωση (ΑΔΕΤ) έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = K + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \mathrm{K} = 0{,}125\,J$$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4



Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 3\ Kg$ ισορροπεί στο λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k, που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1\ Kg$ και αμελητέων διαστάσεων, είναι προσδεμένο με νήμα μη εκτατό, που το άλλο άκρο του είναι προσδεμένο σε σταθερό σημείο Ο, με το νήμα σε οριζόντια θέση. Το μήκος του νήματος είναι $d = 0{,}8\ m$. Αφήνουμε το σώμα Σ_2 ελεύθερο από τη θέση Α να κινηθεί και να συγκρουσθεί κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_1. Μετά την κρούση το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A_1 = 0{,}2\ m$.

Να υπολογίσετε:

4.1. τη σταθερά k του ελατηρίου.

Μονάδες 7

4.2. το ύψος h που θα φτάσει το σώμα Σ_2 μετά την κρούση.

Μονάδες 6

4.3. το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, τη στιγμή που αυτό είναι συσπειρωμένο κατά το ήμισυ της μέγιστης συσπείρωσής του και το σώμα κινείται προς τα δεξιά.

Μονάδες 7

4.4. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του Σ_2 ακριβώς πριν την κρούση με το σώμα Σ_1, ως προς τον άξονα που περνά από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του Σ_2.

Μονάδες 5

Να ληφθεί υπόψη ότι η επιτάχυνση βαρύτητας έχει τιμή $g = 10 m/s^2$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ για την κίνηση του σώματος $Σ_2$, έχουμε:

$$K_A + U_A = K_Γ + U_Γ \Rightarrow 0 + m_2 gd = \frac{1}{2} m_2 υ_2^2 \Longrightarrow υ_2 = \sqrt{2gd} \Rightarrow υ_2 = 4\ m/s$$

Για την ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ στην κεντρική ελαστική κρούση του με το σώμα $Σ_2$ έχουμε:

$$υ'_1 = \frac{2m_2 υ_2}{m_1 + m_2} = 2\ m/s$$

Όμως η ταχύτητα $υ'_1$ είναι η μέγιστη ταχύτητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$, αφού βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, άρα:

$$υ'_1 = ωA_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \cdot A_1 \Longrightarrow k = \frac{m_1 \cdot {υ'_1}^2}{A_1^2} \Longrightarrow k = 300\ N/m$$

Μονάδες 7

4.2. Για την ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ στην κεντρική ελαστική κρούση του με το σώμα $Σ_1$ έχουμε:

$$υ'_2 = \frac{(m_2 - m_1)υ_2}{m_1 + m_2} = -2\ m/s$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση του μέχρι το μέγιστο ύψος h που θα φτάσει και έχουμε:

$$K_{2A} + U_{2A} = K'_2 + U'_2 \Longrightarrow \frac{1}{2} m_2 {υ'_2}^2 + 0 = 0 + m_2 gh \Longrightarrow h = \frac{{υ'_2}^2}{2g} \Longrightarrow h = 0{,}2\ m$$

Μονάδες 6

4.3. Στη θέση που το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά το ήμισυ της μέγιστης συσπείρωσής του, δηλαδή $Δl = \frac{A_1}{2} = 0{,}1\ m$ και το σώμα κινείται προς τα δεξιά έχουμε: $x = -\frac{A_1}{2} = -0{,}1\ m$, η δύναμη του ελατηρίου είναι προς τα δεξιά, καθώς και η ταχύτητα του σώματος, επομένως το σώμα κινείται προς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, πράγμα που σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μειώνεται, έτσι ο ρυθμός μεταβολής της είναι αρνητικός, άρα

$$\frac{dU_{ελατ.}}{dt} = \frac{-dW_{F_{ελ.}}}{dt} = \frac{-F_{ελ.} \cdot dx}{dt} = -F_{ελ.} \cdot υ = -kΔl \cdot υ \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης ενέργειας στην ταλάντωση (ΑΔΕΤ), οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 υ^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k{A_1}^2 \Longrightarrow υ = \sqrt{\frac{k}{m_1} \cdot (A_1^2 - x^2)} = \sqrt{3}\ m/s$$

οπότε από τη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\frac{dU_{ελατ.}}{dt} = -30\sqrt{3}\ J/s$$

Μονάδες 7

4.4. Η στροφορμή $\vec{L}_2$ του σώματος Σ_2 ως προς τον άξονα $z'z$ που περνά από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του Σ_2 έχει φορέα τον άξονα $z'z$, με φορά από τον αναγνώστη προς την σελίδα και μέτρο:

$$L_2 = m_2 \upsilon_2 d \;\Rightarrow\; L_2 = 3{,}2\, Kg \cdot m^2/s$$

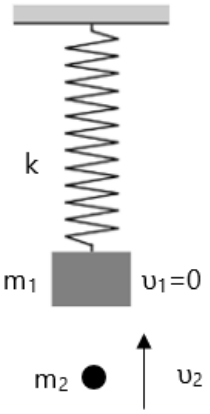
Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100\ \frac{N}{m}$, έχει το πάνω άκρο του στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και στο κάτω άκρο του είναι δεμένο ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1Kg$. Το σώμα Σ_1 ισορροπεί ακίνητο.



4.1. Να υπολογίσετε την επιμήκυνση του ελατηρίου από τη θέση φυσικού του μήκους.

Μονάδες 6

Δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1Kg$, κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω κατά την διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 2\ \frac{m}{s}$. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

4.2. Να προσδιορίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος, αμέσως μετά τη δημιουργία του.

Μονάδες 6

4.3. Να προσδιορίσετε τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος σε σχέση με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

Μονάδες 7

Για τα δεδομένα της άσκησης να θεωρήσετε προσεγγιστικά ότι : $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Για τη θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_1 ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0}, \qquad k \cdot \Delta l_1 - m_1 \cdot g = 0, \;\; \Delta l_1 = \frac{m_1 \cdot g}{k}, \qquad \Delta l_1 = \frac{1 \cdot 10}{100}, \qquad \Delta l_1 = 0{,}1m$$

Μονάδες 6

4.2. Θεωρούμε θετική τη φορά προς τα πάνω και για το μονωμένο σύστημα των δύο σωμάτων εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο για την πλαστική κρούση:

$$\vec{p}_{ολ,αρχ} = \vec{p}_{ολ,τελ}, \qquad m_2 \cdot \upsilon_2 = (m_1 + m_2) \cdot v, \qquad v = \frac{m_2 \cdot \upsilon_2}{m_1 + m_2}, \qquad , \qquad v = 1\,\frac{m}{s}$$

Μονάδες 6

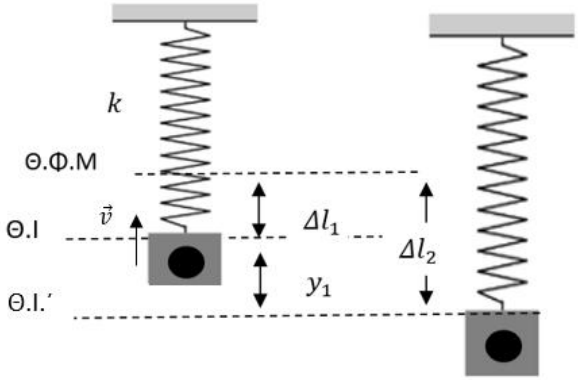
4.3 Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται έχει διαφορετική θέση ισορροπίας από εκείνη του σώματος m_1.

Για τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0}, \qquad k \cdot \Delta l_2 - (m_1 + m_2) \cdot g = 0,$$

$$\Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{k},$$

$$\Delta l_2 = \frac{(1+1) \cdot 10}{100}\, m = 0{,}2\, m$$



Μονάδες 6

4.4. Η ταλάντωση του συσσωματώματος αρχίζει όταν αυτό βρίσκεται σε απομάκρυνση y_1 από τη θέση ισορροπίας του.
Για την απομάκρυνση είναι:

$$y_1 = \Delta l_2 - \Delta l_1, \qquad y_1 = 0{,}1m$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται:

$$E = K + U, \qquad \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_1^2,$$

$$k \cdot A^2 = (m_1 + m_2) \cdot v^2 + k \cdot y_1^2,$$

$$100 \cdot A^2 = (1+1) \cdot 1^2 + 100 \cdot 0{,}1^2, \text{(S.I)}$$

$$100 \cdot A^2 = 2 + 1, \;\; \text{(SI)}$$

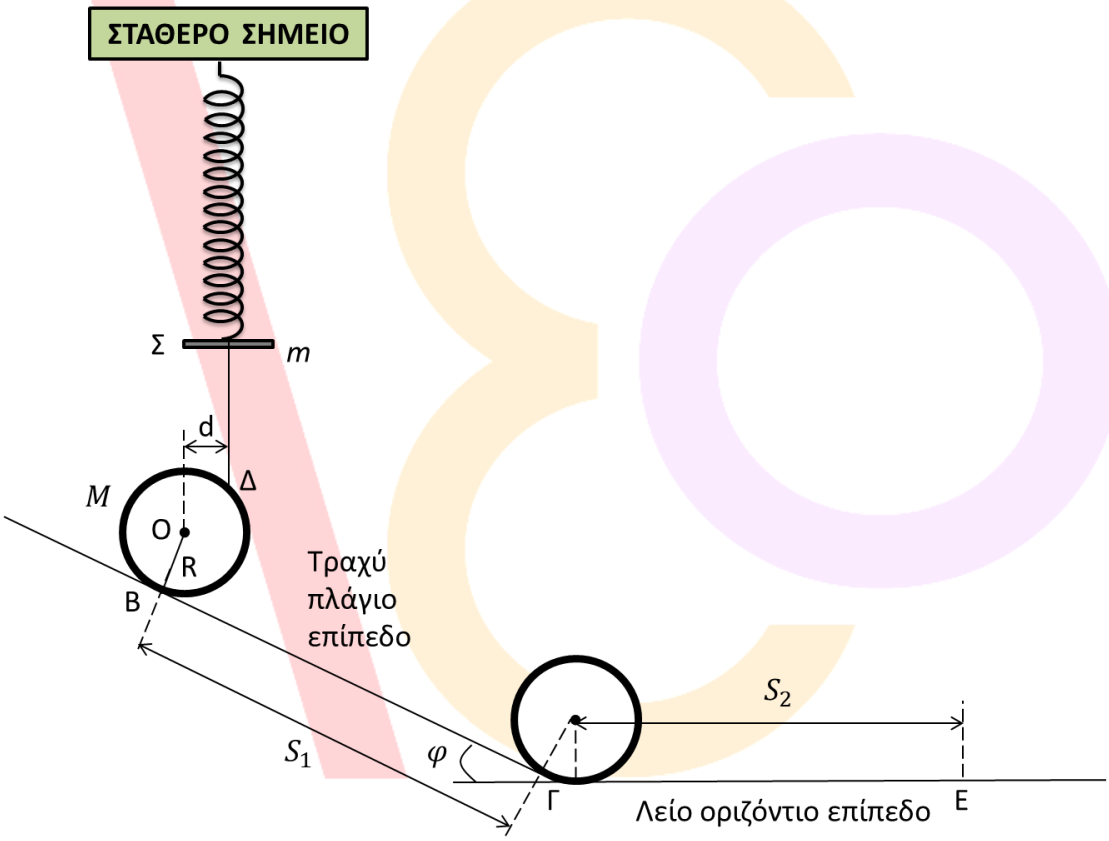
$$A = \frac{\sqrt{3}}{10}\text{m} = 0{,}1 \cdot \sqrt{3}\text{m}$$

Μονάδες 7

νεο φροντιστηριο

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το σώμα Σ έχει μάζα $m = 1Kg$ και είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο του ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400\frac{N}{m}$. Αβαρές και μη εκτατό νήμα είναι δεμένο με το ένα άκρο του στο σώμα Σ και με το άλλο στο σημείο Δ λεπτού και ομογενούς δακτυλίου ακτίνας $R = 0{,}2\ m$ και μάζας $M = 4{,}875Kg$ έτσι ώστε η απόσταση d να είναι ίση με $0{,}1\ m$. Ο δακτύλιος ακουμπά σε τραχύ κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ με $\eta\mu\varphi = 0{,}8$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}6$.



Το σώμα Σ και ο δακτύλιος ισορροπούν. Στη θέση ισορροπίας του συστήματος το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell = 0{,}1\ m$. Δίνεται η επιτάχυνση τη βαρύτητας $g = 10\frac{m}{s^2}$

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος στη θέση ισορροπίας του συστήματος και τη στατική τριβή που ασκείται στο δακτύλιο από το τραχύ κεκλιμένο επίπεδο.

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κόβουμε το νήμα οπότε το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και ο δακτύλιος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει αρχικά στο τραχύ κεκλιμένο επίπεδο

και στη συνέχεια στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Η μετάβαση του δακτυλίου από το κεκλιμένο επίπεδο στο οριζόντιο επίπεδο γίνεται χωρίς ενεργειακές απώλειες με αποτέλεσμα να μην αλλάξει το μέτρο της μεταφορικής και το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας κατά τη μετάβαση.

4.2. Να γράψετε την εξίσωση της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου, για την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ μετά την κοπή του νήματος, θεωρώντας θετική τη φορά προς τα κάτω.

Μονάδες 6

4.3. Η γωνιακή επιτάχυνση του δακτυλίου κατά την κύλιση του στο κεκλιμένο επίπεδο έχει μέτρο $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 20\frac{rad}{s^2}$. Να υπολογίσετε το μέτρο α_{cm} της μεταφορικής επιτάχυνσης του δακτυλίου κατά την κύλισή του στο κεκλιμένο επίπεδο και το μέτρο υ_1 της μεταφορικής και το μέτρο ω_1 της γωνιακής ταχύτητας του δακτυλίου τη στιγμή που περνά από το σημείο Γ. Να θεωρήσετε ότι η μετατόπιση του κέντρου μάζας του δακτυλίου κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι ίση με $S_1 = 8m$

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών του δακτυλίου από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα μέχρι τη στιγμή που περνά από το σημείο Ε. Να θεωρήσετε ότι η μετατόπιση του κέντρου μάζας του δακτυλίου κατά μήκος του οριζόντιου επιπέδου είναι ίση με $S_2 = 8m$.

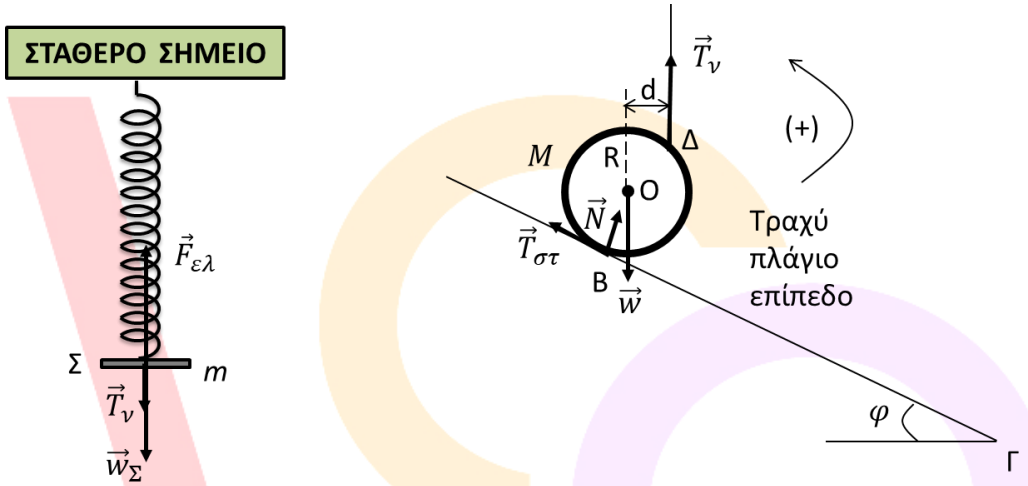
Μονάδες 7

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το σώμα Σ ισορροπεί, άρα $\Sigma\vec{F} = 0$. Θεωρώντας θετική τη φορά προς τα κάτω έχουμε:

$$W_\Sigma + T_\nu = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow T_\nu = k \cdot \Delta\ell - mg \Rightarrow T_\nu = 30\ N$$



Ο δακτύλιος ισορροπεί, άρα $\Sigma\tau_{(O)} = 0$. Το βάρος $\vec{w}$ του δακτυλίου και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ δεν έχουν ροπή ως προς το Ο γιατί οι φορείς τους περνούν από αυτό, επομένως:

$$\tau_{T_\nu} + \tau_{T_{\sigma\tau}} = 0 \Rightarrow T_\nu \cdot d - T_{\sigma\tau} \cdot R = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = T_\nu \cdot \frac{d}{R} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = 15\ N$$

Μονάδες 6

4.2. Μετά την κοπή του νήματος το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που κόβεται το νήμα, το σώμα Σ έχει μηδενική ταχύτητα, επομένως βρίσκεται στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι ίσο με την επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση αυτή, μείον την επιμήκυνση που έχει το ελατήριο στη θέση ισορροπίας του σώματος μετά την κοπή του νήματος.

$$A = \left(\Delta\ell - \frac{mg}{k}\right) = (0{,}1 - 0{,}025)m = 0{,}075\ m$$

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 20\frac{rad}{s}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης για την ταλάντωση του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o),\ 0 \le \varphi_0 < 2\pi$$

Για $t_0 = 0$: $x = +A \Rightarrow A \cdot \eta\mu\varphi_0 = A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ rad.$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστηριο

Σύμφωνα με τα παραπάνω: $x = 0{,}075 \cdot ημ\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)\ (SI)$

Η εξίσωση της επιτάχυνσης για την ταλάντωση του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = -\omega^2 \cdot A \cdot ημ(\omega t + \varphi_o) \Rightarrow \alpha = -30 \cdot ημ\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)\ (SI)$$

Μονάδες 6

4.3. Η κύλιση του δακτυλίου κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι σύνθετη. Η γωνιακή επιτάχυνση του δακτυλίου είναι σταθερή επομένως η στροφική του κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Σύμφωνα με τη σχέση που συνδέει το μέτρο της μεταφορικής με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$, η μεταφορική κίνηση του δακτυλίου είναι ομαλά επιταχυνόμενη με $\alpha_{cm} = 4\ \frac{m}{s^2}$.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο δακτύλιος φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

$$S_1 = \frac{1}{2}\alpha_{cm} \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2S_1}{\alpha_{cm}}} \Rightarrow t_1 = 2s$$

Όμως,

$$\upsilon_1 = \alpha_{cm} \cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 8\frac{m}{s}$$

Επίσης,

$$\upsilon_1 = \omega_1 \cdot R \Rightarrow \omega_1 = \frac{\upsilon_1}{R} \Rightarrow \omega_1 = 40\frac{rad}{s}$$

Μονάδες 6

4.4. Η κύλιση του δακτυλίου στο λείο οριζόντιο επίπεδο είναι σύνθετη. Η μεταφορική του κίνηση είναι ομαλή, εφόσον ο δακτύλιος δεν δέχεται καμία δύναμη στην οριζόντια διεύθυνση, με μεταφορική ταχύτητα $\upsilon_1 = 8\frac{m}{s}$. Επίσης, η στροφική του κίνηση στο λείο οριζόντιο επίπεδο είναι ομαλή, εφόσον δεν υπάρχει καμία ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του, με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 40\frac{rad}{s}$.

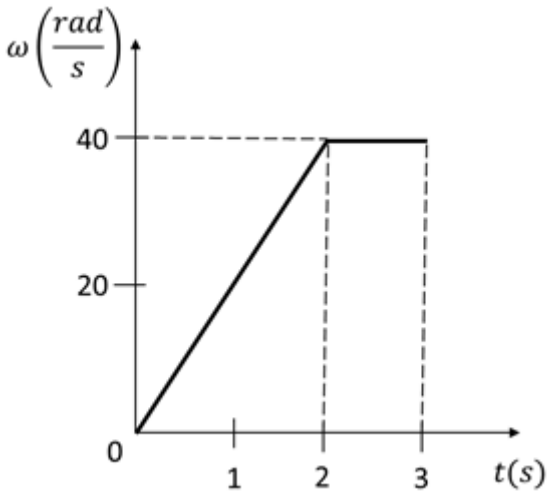
Έστω t_2 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο δακτύλιος περνά από το σημείο Ε.

$$S_2 = \upsilon_1 \cdot (t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = \frac{S_2}{\upsilon_1} + t_1 \Rightarrow t_2 = 3s$$

Επομένως, η γωνιακή ταχύτητα ως προς τον χρόνο δίνεται από την συνάρτηση:

$$\omega = \begin{cases} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \Rightarrow \omega = 20t, & 0 \le t \le 2s \\ 40, & 2s \le t \le 3s \end{cases}\ (SI)$$

Σχεδιάζουμε την αντίστοιχη γραφική παράσταση:



Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης γωνιακής ταχύτητας – χρόνου και του άξονα των χρόνων είναι ίσο με την αντίστοιχη γωνία στροφής, επομένως:

$$\Delta\Theta = \frac{3+1}{2} \cdot 40\, rad \Rightarrow \ \Delta\Theta = 80\, rad$$

Αν N είναι ο αριθμός των περιστροφών του δακτυλίου από $t_0 = 0$ έως $t_2 = 3s$, τότε:

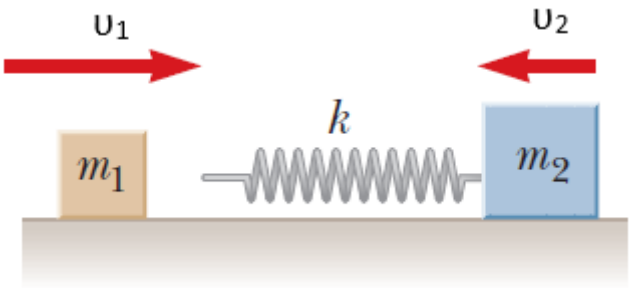
$$N = \frac{\Delta\Theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{40}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα μάζας $m_1 = 2kg$ κινείται αρχικά προς τα δεξιά με ταχύτητα $\upsilon_1 = 10\frac{m}{s}$ σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται με ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 400\frac{N}{m}$. Το ελατήριο είναι συνδεδεμένο σε ένα σώμα μάζας $m_2 = 3kg$, το οποίο κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $\upsilon_2 = 5\frac{m}{s}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Κατά την διάρκεια της επαφής του m_1 με το ελατήριο θεωρούμε ότι δεν μετατρέπεται κινητική ενέργεια σε άλλη μορφή ενέργειας εκτός από ελαστική δυναμική ενέργεια στο ελατήριο.



4.1. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος με μάζα m_2 κατά την διάρκεια της επαφής του m_1 με το ελατήριο, όταν το σώμα μάζας m_1 κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $\upsilon_3 = 5\frac{m}{s}$.

Μονάδες 6

4.2. Υπολογίστε τις ταχύτητες που θα αποκτήσουν τα σώματα όταν το m_1 χάσει την επαφή με το ελατήριο.

Μονάδες 6

4.3. Να βρεθεί το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του m_1 εξαιτίας της αλληλεπίδρασής του με το ελατήριο.

Μονάδες 6

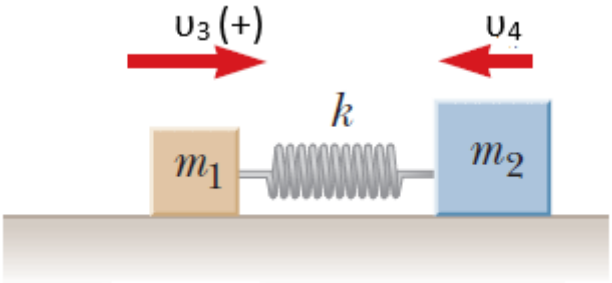
4.4. Ποια είναι η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου κατά την διάρκεια της κρούσης;

Μονάδες 7

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Κατά την διάρκεια της κρούσης το σύστημα των δύο σωμάτων είναι μονωμένο και κατά συνέπεια η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής θεωρώντας ως αρχική θέση την στιγμή που το m_1 ακουμπά το ελατήριο και ως τελική όταν θα έχει ταχύτητα $\upsilon_3 = 5\frac{m}{s}$. Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά.



$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_3 - m_2\upsilon_4 \Leftrightarrow \upsilon_4 = \frac{m_1(\upsilon_3 - \upsilon_1) + m_2\upsilon_2}{m_2} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_4 = \frac{2(5-10) + 3\cdot 5}{3}\frac{m}{s} = \frac{5}{3}\frac{m}{s}$$

Μονάδες 6

4.2. Επειδή η δύναμη του ελατηρίου είναι διατηρητική, η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο μαζών είναι ίδια πριν την επαφή και μετά το χάσιμο της επαφής του m_1 με το ελατήριο. Συνεπώς η κρούση μπορεί να θεωρηθεί ελαστική και οι τελικές ταχύτητες των σωμάτων είναι

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{2-3}{2+3}\,10\frac{m}{s} + \frac{2\cdot 3}{2+3}\left(-5\frac{m}{s}\right) = -8\frac{m}{s}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{2\cdot 2}{2+3}\,10\frac{m}{s} + \frac{3-2}{2+3}\left(-5\frac{m}{s}\right) = 7\frac{m}{s}$$

Μονάδες 6

4.3. Το κλάσμα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 εξαιτίας της αλληλεπίδρασής του με το ελατήριο είναι

$$\frac{\Delta K_1}{K_1, \alpha\rho\chi} = \frac{\frac{1}{2}m_1{\upsilon_1'}^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2} = \left(\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_1}\right)^2 - 1 = \left(\frac{8}{10}\right)^2 - 1 = -0{,}36$$

Το αντίστοιχο ποσοστό μεταβολής είναι

$$\frac{\Delta K_1}{K_1, \alpha\rho\chi}\cdot 100\% = -36\%$$

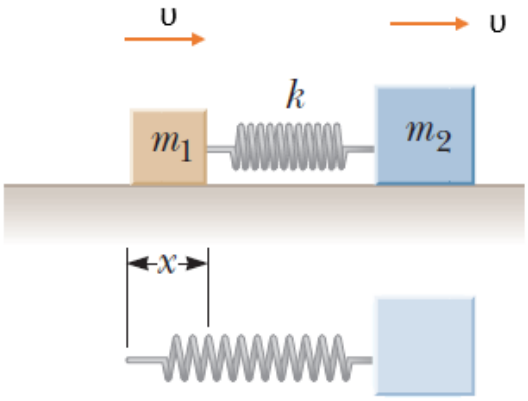
Μονάδες 6

4.4. Το ελατήριο θα υποστεί την μέγιστη συσπείρωση όταν οι δύο μάζες θα αποκτήσουν ίδια ταχύτητα. Μέχρι αυτό το σημείο η απόσταση των μαζών μειώνεται, ενώ μετά από αυτό το σημείο η μεταξύ τους απόσταση αρχίζει να μεγαλώνει. Εφαρμόζοντας Α.Δ.Ο. θεωρώντας ως αρχική θέση την στιγμή που το m_1 ακουμπά το ελατήριο και ως τελική την θέση που οι μάζες αποκτούν ίδια ταχύτητα έχουμε

νέο φροντιστήριο

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon + m_2\upsilon \Leftrightarrow \upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{2\cdot 10 - 3\cdot 5}{2+3} = 1\frac{m}{s}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο μαζών και του ελατηρίου κατά την διάρκεια της κρούσης παραμένει σταθερή.



Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις που εφαρμόσαμε την Α.Δ.Ο. και έχουμε

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 - (m_1+m_2)\upsilon^2}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^2 + 3\cdot 5^2 - 5\cdot 1^2}{400}}\,m = \frac{\sqrt{270}}{20}\,m \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{36}\sqrt{7{,}5}}{20}\,m = \frac{6\sqrt{7{,}5}}{20}\,m = 0{,}3\sqrt{7{,}5}\,m$$

Μονάδες 7

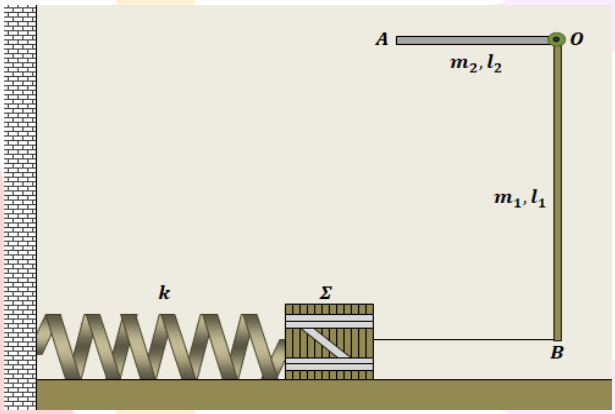
ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δύο λεπτές και ομογενείς ράβδοι OA και OB από διαφορετικά υλικά, συγκολλούνται στο ένα άκρο τους O, ώστε να σχηματίζουν ορθή γωνία. Η ράβδος OB έχει μήκος $l_1 = 0{,}8\ \mathrm{m}$ και μάζα $m_1 = 0{,}4\ \mathrm{kg}$. Η ράβδος OA, έχει το μισό μήκος από την OB, ($l_2 = 0{,}4\ \mathrm{m}$) και διπλάσια μάζα ($m_2 = 0{,}8\ \mathrm{kg}$), από αυτή. Το σύστημα των δύο ράβδων, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, ως ένα σώμα, γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα, κάθετο στο επίπεδό τους ο οποίος διέρχεται από την κορυφή O της ορθής γωνίας.

Οριζόντιο αβαρές νήμα, συνδέει το άκρο B της ράβδου OB με άλλο σώμα Σ μάζας $m_3 = 0{,}2\ \mathrm{kg}$, το οποίο μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Το Σ είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 20\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Ο άξονας του ελατηρίου είναι στην ίδια ευθεία με το νήμα.

Αρχικά το σύστημα ισορροπεί έτσι ώστε, με κατάλληλη επιμήκυνση του ελατηρίου, η ράβδος ΟΒ να συγκρατείται κατακόρυφη όπως στο σχήμα.



4.1. Να υπολογίσετε την επιμήκυνση του ελατηρίου, σε σχέση με το φυσικό του μήκος, στην αρχική κατάσταση ισορροπίας του συστήματος.

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το νήμα κόβεται, το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και το σύστημα των δύο ράβδων αρχίζει να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον άξονα Ο.

4.2. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του σώματος Σ κατά την ταλάντωση που εκτελεί μετά την κοπή του νήματος.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος σώμα Σ-ελατήριο.

Μονάδες 6

4.4. Αφού θεωρήσετε θετική φορά από τον τοίχο προς το σώμα Σ, να γράψετε τη σχέση $F_{\varepsilon\lambda} - t$, η οποία αποδίδει τιμές της δύναμης του ελατηρίου με το χρόνο, από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα και να την αποδώσετε γραφικά σε διάγραμμα με βαθμονομημένους άξονες, για διάρκεια μιας περιόδου της ταλάντωσης.

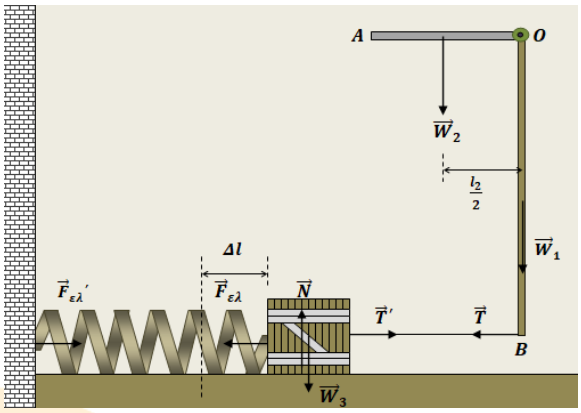
Μονάδες 7

Να θεωρήσετε το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10\ \frac{m}{s^2}$ και ασήμαντες τις αντιστάσεις αέρα.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας ροπών των δυνάμεων ως προς τον άξονα στο O, για το σύστημα των δύο ράβδων:



$$\sum \tau = 0, \quad m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} = T \cdot l_1, \; T = \frac{m_2 \cdot g \cdot l_2}{2 \cdot l_1} = \frac{m_2 \cdot g}{4} = 2\,\text{N}$$

Το ιδανικό τεντωμένο νήμα, ασκεί στα άκρα του αντίθετες δυνάμεις. Οπότε κατά μέτρο ισχύει:

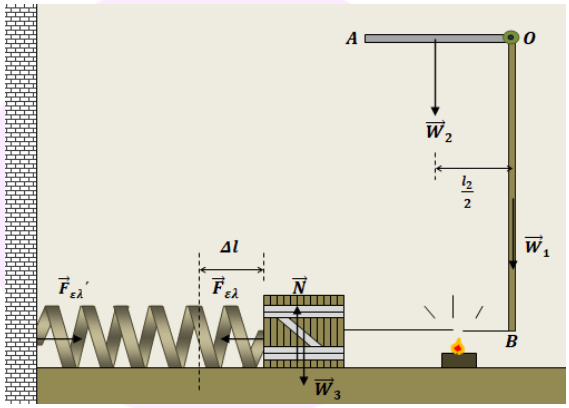
$$T = T' = 2\,\text{N}$$

Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων για τις οριζόντιες δυνάμεις που δέχεται το σώμα Σ:

$$\sum F_x = 0\,, \quad T' = k \cdot \Delta l, \; \Delta l = \frac{T'}{k} = \frac{2}{20}\,\text{m} = 0{,}1\,\text{m}$$

Μονάδες 6

4.2. Η κυκλική συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος ιδανικό ελατήριο-σώμα Σ είναι:



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_3}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}2}}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Καθώς ταλαντώνεται, το σώμα περνάει με μέγιστη ταχύτητα από τη θέση ισορροπίας του. Η επιμήκυνση του ελατηρίου στην αρχική ισορροπία του συστήματος που υπολογίσαμε στο πρώτο ερώτημα, αποτελεί πλάτος της ταλάντωσης. Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του σώματος σε αυτή την κίνηση είναι:

$$\upsilon_{max} = \omega \cdot A = \omega \cdot \Delta l = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Μονάδες 6

4.3. Το σύστημα οριζόντιο ιδανικό ελατήριο-σώμα Σ, αποτελεί πρότυπο αρμονικό ταλαντωτή και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς τη σταθερά του ελατηρίου.

Έτσι η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0{,}01\,\text{J} = 0{,}1\,\text{J}$$

(<u>Παρατήρηση</u>: φυσικά μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια ταλάντωσης από τη μέγιστη κινητική ενέργεια: $E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 1\,\text{J} = 0{,}1\,\text{J}$)

Μονάδες 6

4.4. Η περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος ιδανικό ελατήριο-σώμα Σ είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5}\,\text{s}$$

Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, έτσι όπως καθορίστηκε η θετική φορά, είναι:

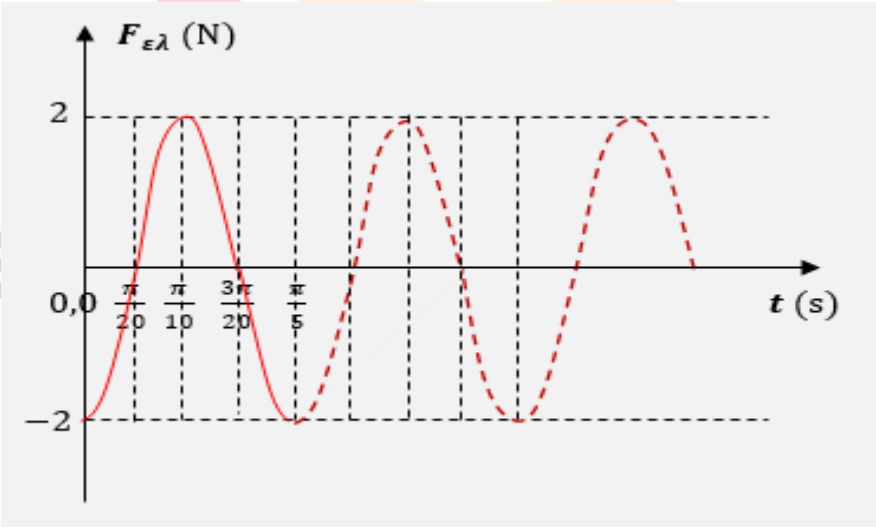
$$x_0 = A \cdot \eta\mu\varphi_0 = A, \quad \eta\mu\varphi_0 = 1, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\, rad$$

Η δύναμη του ελατηρίου στο σώμα αποτελεί τη δύναμη επαναφοράς για την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί, οπότε ισχύει:

$$F_{\varepsilon\lambda} = F_{\varepsilon\pi} = -k \cdot x = -k \cdot A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (S.I)$$

Μπορούμε τώρα να δημιουργήσουμε ένα πίνακα τιμών για τις τιμές της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο, ώστε να γίνει πιο εύκολη η κατασκευή της γραφικής παράστασης που ζητείται:

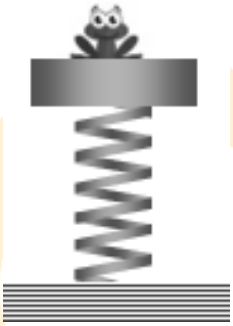
t	$\varphi = 10 \cdot t + \frac{\pi}{2}, \ (S.I)$	$\eta\mu\varphi$	$F_{\varepsilon\lambda}$
0	$\frac{\pi}{2}$ rad	1	-2 N
$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{20}$ s	π rad	0	0
$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{10}$ s	$\frac{3\pi}{2}$ rad	-1	$+2$ N
$\frac{3 \cdot T}{4} = \frac{3\pi}{20}$ s	2π rad	0	0
$T = \frac{\pi}{5}$ s	$\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ rad	1	-2 N



Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Ένας δίσκος μάζας $M = 1\,\text{kg}$, είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο δίσκο κάθεται ένας βάτραχος μάζας $m = 0{,}2\,\text{kg}$ και αρχικά το σύστημα ισορροπεί. Κάποια στιγμή ο βάτραχος εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, με αποτέλεσμα το σύστημα δίσκος-ελατήριο να αρχίσει να ταλαντώνεται και ο δίσκος να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



Να υπολογίσετε:

4.1. το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά ο δίσκος αμέσως μετά την εκτίναξη του βάτραχου,

Μονάδες 6

4.2. το πλάτος της ταλάντωσης του δίσκου,

Μονάδες 7

4.3. τη μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του δίσκου,

Μονάδες 6

4.4. τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του συστήματος, εξαιτίας της παραμόρφωσης του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος.

Μονάδες 6

Αντιστάσεις αέρα αγνοούνται και το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας δίνεται $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

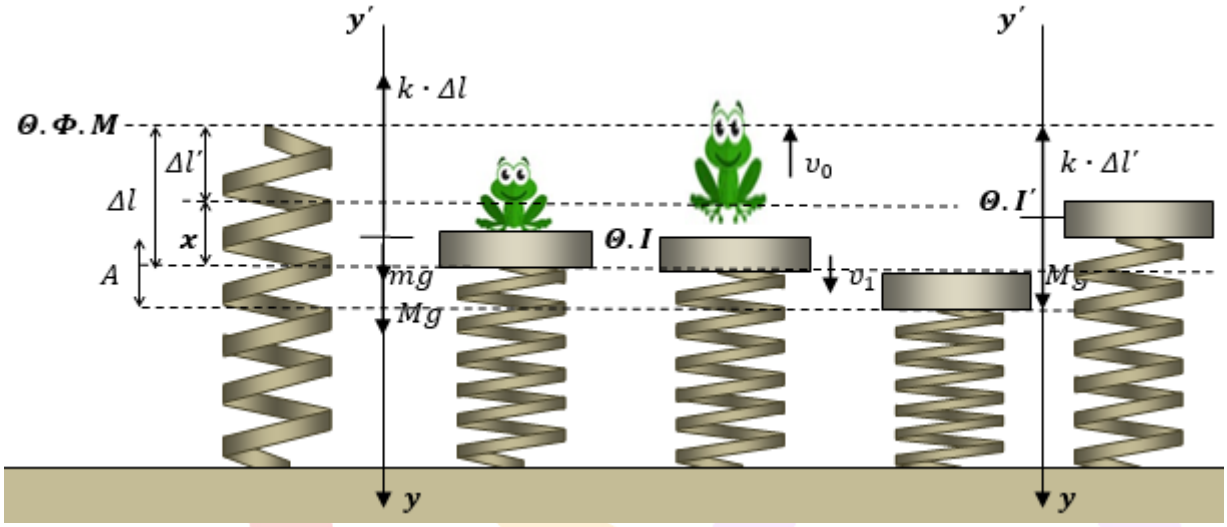
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής στο σύστημα δίσκου-βάτραχου:

$$\vec{p}_{συστ}^{πριν} = \vec{p}_{συστ}^{μετα}, \qquad 0 = m \cdot \upsilon_0 - M \cdot \upsilon_1, \qquad M \cdot \upsilon_1 = m \cdot \upsilon_0$$

$$\upsilon_1 = \frac{m}{M} \cdot \upsilon_0 = 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$



Μονάδες 6

4.2. Στην αρχική θέση ισορροπίας, το ελατήριο εμφανίζει συσπείρωση Δl, σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Δημιουργούμε ένα ελεύθερο διάγραμμα δυνάμεων και εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων:

$$\sum F_y = 0, \ \ (M + m) \cdot g - k \cdot \Delta l = 0, \ \ k \cdot \Delta l = (M + m) \cdot g$$

$$\Delta l = 0{,}06\ \mathrm{m}$$

Αφού εκτινάσσεται ο βάτραχος, απομένει στο πάνω άκρο του ελατηρίου μόνο ο δίσκος, με αποτέλεσμα να αλλάζει η θέση ισορροπίας του συστήματος (Θ.Ι΄). Στη νέα θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει συσπείρωση $\Delta l'$ και η θέση αυτή είναι πάνω από τη θέση ισορροπίας του συστήματος δίσκος-βάτραχος κατά x. Δημιουργούμε ένα ελεύθερο διάγραμμα δυνάμεων και εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων:

$$\sum F_y = 0, \ \ M \cdot g - k \cdot \Delta l' = 0, \ \ k \cdot \Delta l' = M \cdot g$$

$$\Delta l' = 0{,}05\ \mathrm{m}, \ \ \text{οπότε} \ \ x = \Delta l - \Delta l' = 0{,}01\ \mathrm{m}$$

Η θέση του δίσκου ακριβώς μετά την εκτίναξη του βάτραχου είναι μια τυχαία θέση της απλής αρμονικής ταλάντωσης του δίσκου και μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διατήρηση ενέργεια ταλάντωσης και να υπολογίσουμε το πλάτος της:

$$U_{ταλ}^{T.θ} + K_{ταλ}^{T.θ} = U_{ταλ}^{max}, \qquad \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \upsilon_1^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

$$\text{ή} \ \ A = \sqrt{x^2 + \frac{M}{k} \cdot \upsilon_1^2} = 0{,}03\ \mathrm{m}$$

Μονάδες 7

4.3. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του δίσκου είναι:

$$U_{\tau\alpha\lambda}^{max} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = 0{,}09\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 6

4.4. Η μέγιστη παραμόρφωση ελατηρίου εμφανίζεται στην κάτω ακραία θέση τα ταλάντωσης και είναι:

$$\Delta l_{max} = \Delta l' + A = 0{,}08\ \mathrm{m}$$

Έτσι η μέγιστη δυναμική ενέργεια παραμορφωμένου ελατηρίου στο σύστημα είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda}^{max} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta l_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0{,}08^2\ \mathrm{J} = 0{,}64\ \mathrm{J}$$

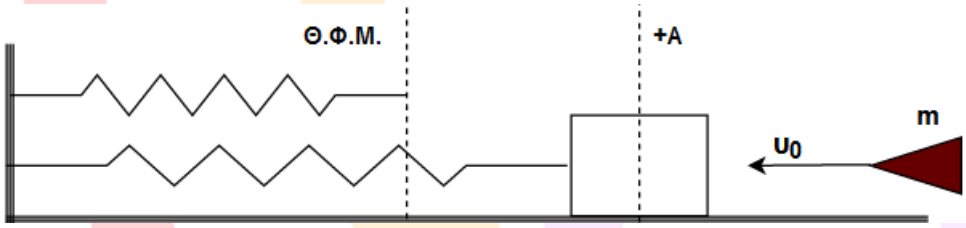
Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα μάζας $M = 3{,}6\ kg$ είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σκληρότητας k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 0{,}1\ m$ και μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{max} = \frac{2\sqrt{10}}{3}\frac{m}{s}$ σε οριζόντια λεία επιφάνεια. Το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Όταν το σώμα βρίσκεται σε μία από τις ακραίες θέσεις του την $+A$, ένα βλήμα μάζας $m = 0{,}4\ kg$, που κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ_0 κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, συγκρούεται με το σώμα. Η κρούση είναι πλαστική και αμελητέας διάρκειας. Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αν η ολική ενέργεια του ταλαντωτή αμέσως μετά την κρούση τετραπλασιάζεται, να υπολογίσετε:



4.1. το νέο πλάτος της ταλάντωσης,

Μονάδες 6

4.2. την νέα περίοδο της ταλάντωσης,

Μονάδες 6

4.3. τη νέα μέγιστη ταχύτητα,

Μονάδες 5

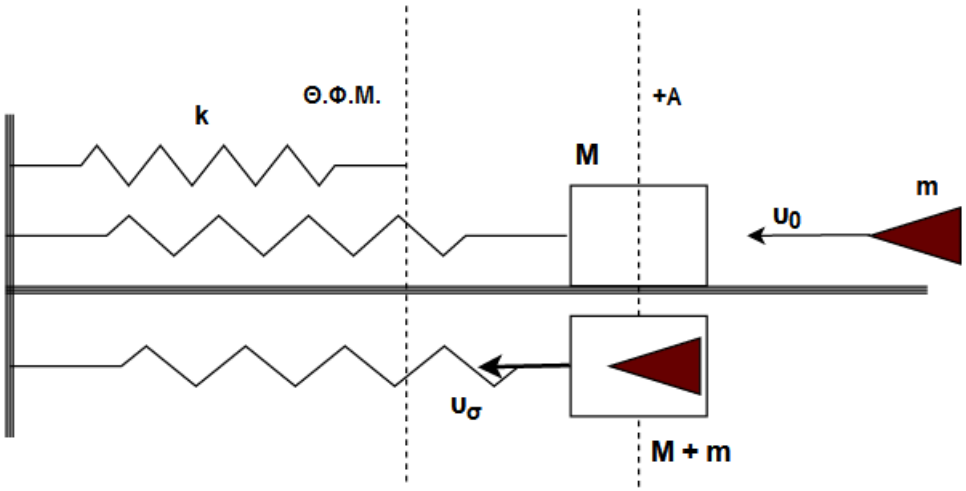
4.4. την ταχύτητα του βλήματος υ_0 πριν από την κρούση.

Μονάδες 8

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Στις οριζόντιες ταλαντώσεις η θέση ισορροπίας δεν εξαρτάται από το βάρος του ταλαντευόμενου σώματος, η αλλαγή της μάζας δεν προκαλεί αλλαγή της θέσης ισορροπίας. Επίσης δεν αλλάζει η τιμή της σταθεράς επαναφοράς $D = k$ γιατί οριζόντια ασκείται μόνο η δύναμη του ελατηρίου μετά την κρούση.



$$E'_{o\lambda} = 4E_{o\lambda} \text{ ή } \frac{1}{2}kA'^2 = 4\frac{1}{2}kA^2 \text{ ή } A' = 2A \text{ ή } A' = 0{,}2\ m$$

Μονάδες 6

4.2.

$$\upsilon_{max} = \omega A \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{\upsilon_{max}}{A} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{3}}{0{,}1}\frac{rad}{s} \text{ ή } \omega = \frac{20\sqrt{10}}{3}\frac{rad}{s}$$

$$k = m\omega^2 \text{ ή } k = 3{,}6\left(\frac{20\sqrt{10}}{3}\right)^2\frac{N}{m} = 3{,}6\frac{400\cdot 10}{9}\frac{N}{m} \text{ ή } k = 1600\frac{N}{m}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{o\lambda}}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{1600}}s = 2\pi\frac{2}{40}s = \frac{4\pi}{40}s = \frac{\pi}{10}\ s$$

Μονάδες 6

4.3.

$$\omega' = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{m_{o\lambda}}} = \sqrt{\frac{1600}{4}}\frac{rad}{s} = 20\frac{rad}{s}$$

$$\upsilon'_{max} = \omega' A' = 4\frac{m}{s}$$

Μονάδες 5

4.4.

$$\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}m_{o\lambda}\upsilon_\sigma^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \quad \text{ή} \quad \upsilon_\sigma^2 = \frac{\frac{1}{2}kA'^2 - \frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}m_{o\lambda}} \quad \text{ή} \quad \upsilon_\sigma^2 = \frac{1}{2}k\frac{A'^2 - A^2}{\frac{1}{2}m_{o\lambda}}$$

νέο φροντιστήριο

ή $\quad \upsilon_\sigma^2 = k\frac{A'^2 - A^2}{m_{o\lambda}}$ ή $\quad \upsilon_\sigma^2 = 1600 \cdot \frac{0{,}2^2 - 0{,}1^2}{4}\frac{m^2}{s^2}$

ή $\quad \upsilon_\sigma = 2\sqrt{3}\frac{m}{s}$

$m\upsilon_0 = (m+M)\upsilon_\sigma$ ή $\quad \upsilon_0 = \frac{(m+M)\upsilon_\sigma}{m}$ ή $\quad \upsilon_0 = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{0{,}4}\frac{m}{s}$ ή $\quad \upsilon_0 = \frac{2\sqrt{3}}{0{,}1}\frac{m}{s}$

ή $\quad \upsilon_0 = 20\sqrt{3}\frac{m}{s}$

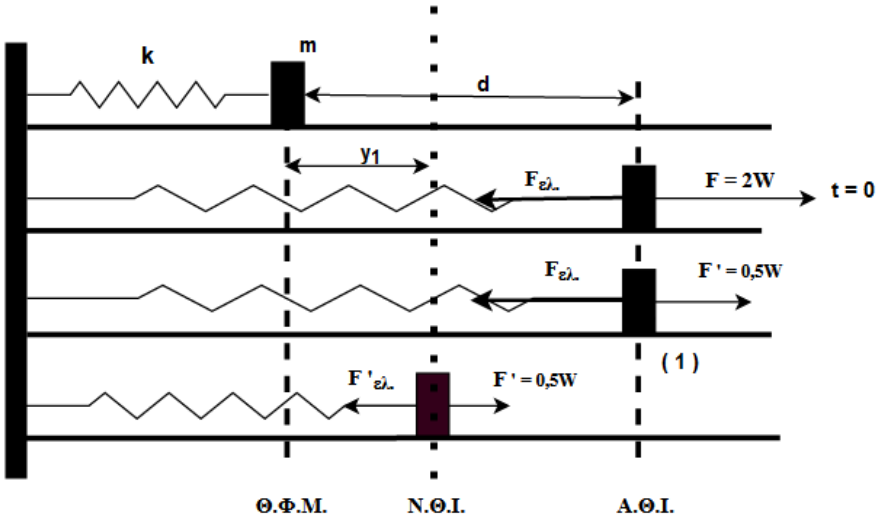
Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σκληρότητας k είναι δεμένο ένα σώμα $m = 1\ kg$. Αρχικά βρίσκεται σε ισορροπία σε λείο οριζόντιο επίπεδο στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Επιμηκύνουμε το ελατήριο κατά $d = 0{,}2\ m$, ασκώντας δύναμη F διπλάσια του βάρους του σώματος και το σώμα ισορροπεί στη θέση αυτή. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η τιμή της δύναμης F μειώνεται στο $\frac{1}{4}$ της αρχικής τιμής, δηλαδή $F' = \frac{1}{4}F = \frac{W}{2}$ και το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$. Θεωρώντας θετική την φορά επιμήκυνσης του ελατηρίου, να υπολογίσετε:



4.1. τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης,

Μονάδες 6

4.2. το πλάτος της ταλάντωσης,

Μονάδες 6

4.3. τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη επιτάχυνση.

Μονάδες 6

4.4. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις που περιγράφουν την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του ταλαντούμενου σώματος.

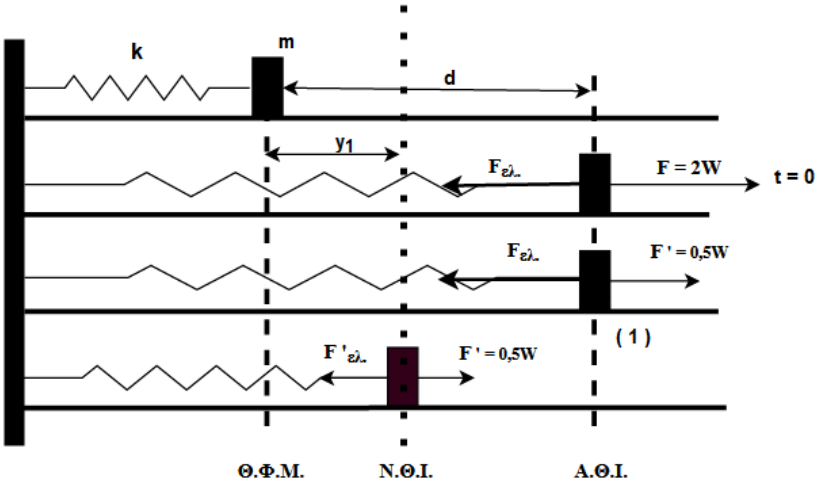
Μονάδες 7

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στην αρχική θέση ισορροπίας (Α.Θ.Ι.).



Γράφουμε τη συνθήκη ισορροπίας:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad ή \quad \vec{F} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = 0 \quad ή \quad 2W = k\,d \quad ή \quad k = \frac{2W}{d} \quad ή$$

$$k = \frac{2mg}{d} \quad ή \quad k = \frac{2 \cdot 1 \cdot 10}{0,2}\ \frac{N}{m} \quad ή \quad k = 100\ \frac{N}{m}$$

Υπολογίζουμε την γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ή \quad \omega = \sqrt{\frac{100}{1}}\ \frac{rad}{s} \quad ή \quad \omega = 10\,\frac{rad}{s}$$

Μονάδες 6

4.2. Το σώμα εκτελεί στη συνέχεια απλή αρμονική ταλάντωση. Βρίσκουμε τη νέα θέση ισορροπίας του (Ν.Θ.Ι.):

$$\sum \vec{F} = 0 \quad ή \quad \vec{F'} + \vec{F'}_{\varepsilon\lambda} = 0 \quad ή \quad F' = k\,y_1 \quad ή \quad \frac{W}{2} = k\,y_1$$

$$ή \quad y_1 = \frac{W}{2k} \quad ή \quad y_1 = \frac{1 \cdot 10}{2 \cdot 100}\,m \quad ή \quad y_1 = \frac{1}{20}\,m$$

Γράφουμε την ενεργειακή ισότητα για τη θέση (1) που αρχίζει να ταλαντώνεται το σώμα:

$$K^{(1)} + U^{(1)} = E_{o\lambda} = \frac{1}{2}\,K\,A^2 \quad ή \quad 0 + \frac{1}{2}K(d - y_1)^2 = \frac{1}{2}\,K\,A^2$$

$$ή \quad A = d - y_1 \quad ή \quad A = 0,15\,m$$

Μονάδες 6

4.3. Η μέγιστη ταχύτητα και η μέγιστη επιτάχυνση δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\upsilon_{max} = A\,\omega = 1,5\ \frac{m}{s}$$

$$\alpha_{max} = A\,\omega^2 = 15\ \frac{m}{s^2}$$

Μονάδες 6

4.4. Πρέπει να υπολογίσουμε την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης .

Γράφουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης:

$$x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Για $t = 0$ είναι $x = +A$ οπότε θα έχουμε:

$$x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad A = A\,\eta\mu(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = 1 \;\; \text{ή} \;\; \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

Επομένως:

$$\varphi_0 = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

Για $\kappa = 0$ είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ δεκτή λύση ενώ για $\kappa = 1$ είναι $\varphi_0 > 2\pi$.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την απομάκρυνση την ταχύτητα και την επιτάχυνση θα είναι οι παρακάτω:

$$x = 0{,}15\,\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

$$\upsilon = 1{,}5\,\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

$$\alpha = -15\,\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 2\sqrt{3}\,cm$ και η στιγμιαία ορμή του περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$p = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2t \;\; (S.I.)$$

Δίνεται: $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\eta\mu 2\theta = 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$

4.1. Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης υ_{max} του σώματος.

Μονάδες 5

4.2. Να βρεθεί η μάζα m του ταλαντούμενου σώματος.

Μονάδες 5

4.3. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{12}\;\; s$.

Μονάδες 6

4.4. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας K της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1.

Μονάδες 9

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Από την εξίσωση που περιγράφει την στιγμιαία ορμή η γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\omega = 2\,\frac{rad}{sec}$$

Η μέγιστη ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_{max} = A\cdot\omega \quad \text{ή} \quad \upsilon_{max} = 2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\cdot 2\ \frac{m}{s} \quad \text{ή} \quad \upsilon_{max} = 4\cdot\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\ \frac{m}{s}$$

Μονάδες 5

4.2. Η μέγιστη ορμή δίνεται από τη σχέση:

$$p_{max} = m\cdot\upsilon_{max} \ \text{ή}\ m = \frac{p_{max}}{\upsilon_{max}}\ \text{ή}\ m = \frac{4\cdot 10^{-2}}{4\cdot\sqrt{3}\cdot 10^{-2}}Kg\ \text{ή}\ \ m = \frac{\sqrt{3}}{3}\ Kg$$

Μονάδες 5

4.3. Η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή σε μια απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβές.

$$\frac{\Delta E_{o\lambda}}{\Delta t} = 0 \ \text{αφού}\ E_{o\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$$

Μονάδες 6

4.4. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Sigma F\cdot\Delta x}{\Delta t} \quad \left(\text{αφού}\ \upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}\ \kappa\alpha\iota\ \Sigma F = -D\cdot x\right)\ \text{θα έχουμε:}$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F\cdot\ \upsilon = -D\cdot x\cdot\upsilon = -m\omega^2 A\cdot\eta\mu\omega t\cdot\upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Επίσης είναι $p_{max} = m\cdot\upsilon_{max}$ οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = -p_{max}\cdot\omega^2 A\cdot\eta\mu\omega t\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t \ \text{ή}\ \frac{\Delta K}{\Delta t} = -p_{max}\cdot\omega^2 A\cdot\frac{\eta\mu 2\omega t}{2} \ \text{ή}$$

$$\text{ή}\quad \frac{\Delta K}{\Delta t} = -\,4\cdot 10^{-2}\cdot 2^2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\,\frac{\eta\mu\left(2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{12}\right)}{2}\frac{J}{s} \quad \text{ή}$$

$$\text{ή}\quad \frac{\Delta K}{\Delta t} = -\,16\cdot\sqrt{3}\cdot 10^{-4}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{3}\frac{J}{s} = -\,16\cdot\sqrt{3}\cdot 10^{-4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{J}{s} \quad \text{ή}$$

$$\text{ή}\quad \frac{\Delta K}{\Delta t} = -\,24\cdot 10^{-4}\frac{J}{s}$$

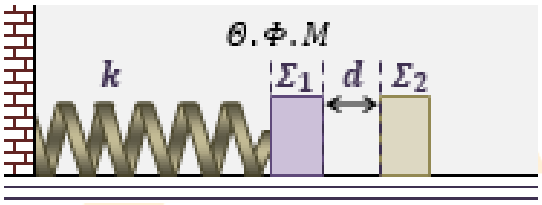
Μονάδες 9

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα Σ_1, αμελητέων διαστάσεων και μάζας $m_1 = 500\ \text{g}$, είναι στερεωμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου στηρίζεται σε ακλόνητο σημείο. Το σύστημα βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο λείο δάπεδο και αρχικά ισορροπεί με το ελατήριο στο φυσικό του μήκος.

Πάνω στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και σε απόσταση $d = 0{,}1 \cdot \sqrt{3}\ \text{m}$ από το Σ_1, βρίσκεται ακίνητο δεύτερο σώμα Σ_2 επίσης αμελητέων διαστάσεων και μάζας $m_2 = 4\ \text{kg}$.



Εκτρέπουμε το σύστημα ελατηρίου-σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του, μετατοπίζοντας το Σ_1 οριζόντια κατά $A = 0{,}2 \cdot \sqrt{3}\ \text{m}$ πάνω στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, έτσι ώστε το ελατήριο να συσπειρώνεται και από τη θέση αυτή το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 θα συγκρουστούν με πλαστική κρούση ασήμαντης χρονικής διάρκειας.

Να υπολογίσετε:

4.1. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση.

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1, ελάχιστα πριν την κρούση.

Μονάδες 6

4.3. Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Μονάδες 7

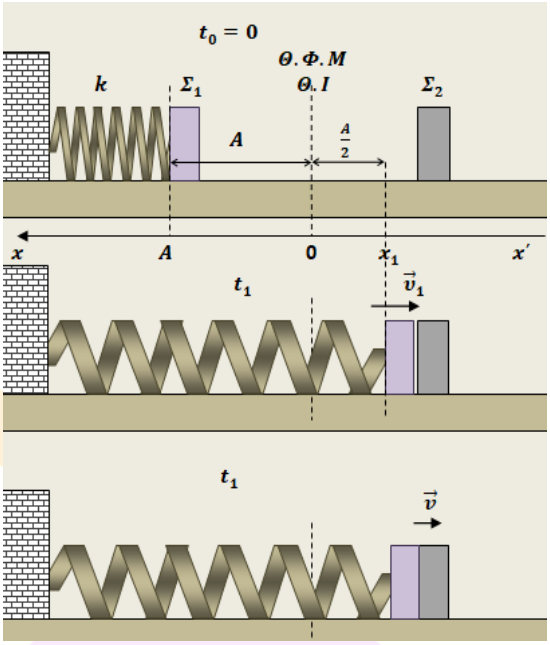
4.4. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος, αμέσως μετά την πλαστική κρούση.

Μονάδες 6

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το σύστημα ιδανικού ελατηρίου-μάζας σε λείο οριζόντιο δάπεδο, αποτελεί πρότυπο αρμονικό ταλαντωτή. Το σώμα Σ_1, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με σταθερά επαναφοράς τη σταθερά του ελατηρίου. Η θέση από την οποία αφήσαμε το σώμα Σ_1 να κινηθεί, είναι ακραία θέση ταλάντωσης και η απόστασή της από τη θέση ισορροπίας, είναι το πλάτος της. Εφαρμόζουμε διατήρηση ενέργειας ταλάντωσης, από τη στιγμή που αφήσαμε ελεύθερο το σώμα Σ_1 να κινηθεί από ακραία θέση ταλάντωσης, μέχρι τη στιγμή που θα συγκρουστεί με το σώμα Σ_2, στη θέση $x_1 = d$ της ταλάντωσης που εκτελεί:



$$E_{\tau\alpha\lambda}^{A.\Theta} = E_{\tau\alpha\lambda}^{T.\Theta}, \quad \frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2 = \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_1^2 + \frac{1}{2}\cdot m_1\cdot \upsilon_1^2$$

$$|\upsilon_1| = \sqrt{\frac{k}{m_1}\cdot(A^2 - x_1^2)} = \sqrt{\frac{100}{0{,}5}\cdot(3\cdot 0{,}04 - 3\cdot 0{,}01)}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τελικά: $|\upsilon_1| = \sqrt{600\cdot 0{,}03}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3\cdot\sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1 είναι:

$$\left|\frac{dp}{dt}\right|_{\Sigma_1}^{\pi\rho\iota\nu} = |\sum F|_{\Sigma_1}^{\pi\rho\iota\nu} = |F_{\varepsilon\lambda}|_{\pi\rho\iota\nu} = k\cdot d = 100\cdot 0{,}1\cdot\sqrt{3}\ \text{N} = 10\cdot\sqrt{3}\ \text{kg}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Μονάδες 6

4.3. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής κατά την πλαστική κρούση και υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά από αυτή:

$$\vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma\tau}^{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma\tau}^{\mu\varepsilon\tau\alpha}, \qquad m_1\cdot\vec{\upsilon}_1 = (m_1 + m_2)\cdot\vec{\upsilon}$$

Τελικά: $|\upsilon| = \frac{0{,}5}{4{,}5}\cdot|\upsilon_1| = \frac{\sqrt{2}}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται σε τυχαία θέση της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί εξαιτίας του ελατηρίου. Εφαρμόζουμε και πάλι διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης για να υπολογίσουμε το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος:

$$\frac{1}{2}\cdot k\cdot x_1^2 + \frac{1}{2}\cdot(m_1 + m_2)\cdot\upsilon^2 = \frac{1}{2}\cdot k\cdot A'^2$$

ή $A' = \sqrt{x_1^2 + \frac{m_1+m_2}{k}\cdot\upsilon^2} = \sqrt{0{,}03 + \frac{4{,}5}{100}\cdot\frac{2}{9}}\ \text{m} = \sqrt{0{,}04}\ \text{m} = 0{,}2\ \text{m}$

Μονάδες 7

4.4. Θεωρώντας, αυθαίρετα, ως θετική την φορά προς τα αριστερά, η αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος, αμέσως μετά την πλαστική κρούση, είναι:

$$\frac{dK}{dt} = (\sum F)\cdot\upsilon = F_{\varepsilon\pi\alpha\nu\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha}\varsigma}\cdot\upsilon = -k\cdot x_1\cdot\upsilon = -100\cdot(-0{,}1\cdot\sqrt{3})\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\frac{\text{J}}{\text{s}} = -\frac{10\cdot\sqrt{6}}{3}\ \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

Σχόλιο: το πρόσημο του αποτελέσματος είναι αναμενόμενο, αφού κατά την κίνηση προς την ακραία θέση της ταλάντωσης, η κινητική ενέργεια μειώνεται.

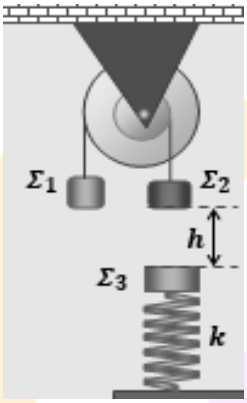
Παρατήρηση: Η αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας που υπολογίσαμε, δεν αλλάζει αν θεωρήσουμε θετική την φορά προς τα δεξιά. Και στην περίπτωση αυτή τα μεγέθη x_1 και υ θα είναι ομόσημα (θετικά) και ο ρυθμός μεταβολής θα προκύψει και πάλι αρνητικός.

Μονάδες 6

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Η διπλή τροχαλία του σχήματος αποτελείται από δύο ομοαξονικές τροχαλίες με ακτίνες R_1 και R_2, για τις οποίες ισχύει $R_1 = 2 \cdot R_2$. Οι δύο τροχαλίες αποτελούν ένα ενιαίο στερεό το οποίο μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον οριζόντιο άξονα στο κέντρο του. Στα αυλάκια της διπλής τροχαλίας έχουμε τυλίξει αβαρή νήματα και στο άκρο τους αντίστοιχα έχουμε δέσει τα σώματα Σ_1 μάζας m_1 και Σ_2 μάζας $m_2 = 1$ kg. Αρχικά η διπλή τροχαλία και τα σώματα Σ_1 και Σ_2 ισορροπούν ακίνητα, όπως στο σχήμα.



Κάποια στιγμή το νήμα που κρατάει το σώμα Σ_2 κόπηκε και το σώμα αυτό, με ελεύθερη πτώση, πέφτει και συγκρούεται με άλλο σώμα Σ_3, το κέντρο του οποίου βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με το κέντρο του Σ_2, σε απόσταση $h = 0{,}45$ m κάτω από αυτό. Το σώμα Σ_3 έχει μάζα $m_3 = 2$ kg και αρχικά ισορροπεί ακίνητο, δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\ \frac{N}{m}$, το κάτω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο, όπως στο σχήμα. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική, ασήμαντης χρονικής διάρκειας και το συσσωμάτωμα που δημιουργείται εκτελεί αμέσως μετά, κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση.

Να υπολογίσετε:

4.1. Τη μάζα m_1 του σώματος Σ_1.

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος που δημιουργείται από τα σώματα Σ_2 και Σ_3, αμέσως μετά την πλαστική κρούση μεταξύ τους.

Μονάδες 6

4.3. Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Μονάδες 7

4.4. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος, αμέσως μετά την πλαστική κρούση.

Μονάδες 6

Να υποθέσετε ασήμαντες τις αντιστάσεις αέρα και το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

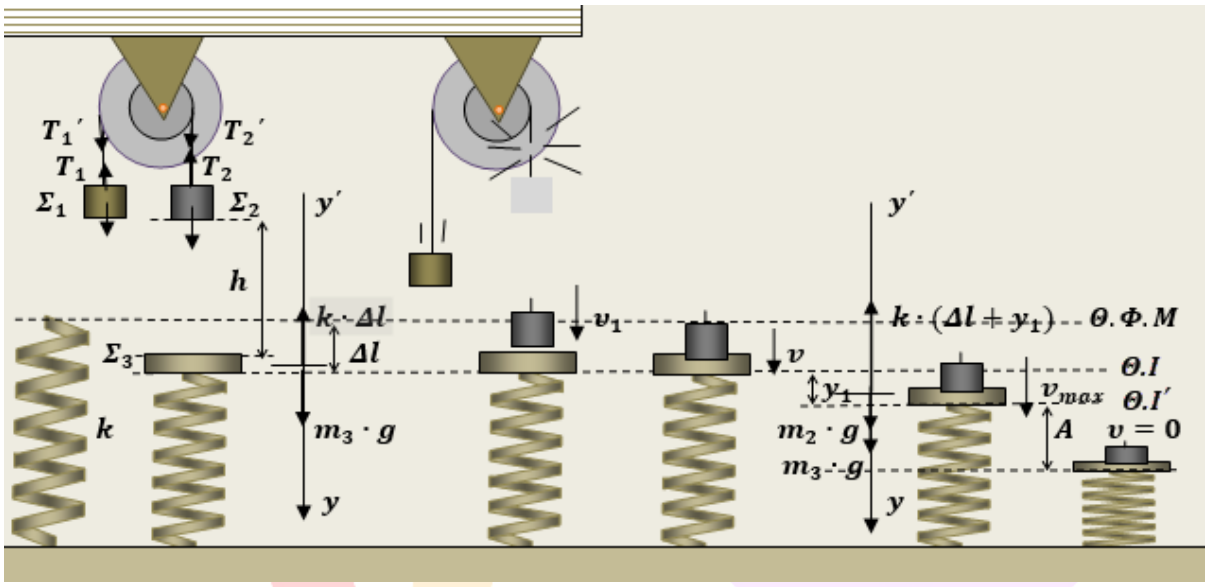
4.1. Κάθε ένα από τα σώματα Σ_1, Σ_2, ισορροπεί με την επίδραση του βάρους του και της δύναμης (τάσης) του νήματος που το κρατάει. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων για κάθε σώμα:

$$\Sigma_1: \quad \sum F = 0, \ T_1 = m_1 \cdot g$$

$$\Sigma_2: \quad \sum F = 0, \ T_2 = m_2 \cdot g$$

Τα τεντωμένα αβαρή νήματα, ασκούν στα άκρα τους αντίθετες δυνάμεις. Έτσι κατά μέτρο, για τις δυνάμεις που δέχεται η διπλή τροχαλία από τα νήματα ισχύουν:

$$T_1{}' = T_1 = m_1 \cdot g \quad \text{και} \quad T_2{}' = T_2 = m_2 \cdot g$$



Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας ροπών των δυνάμεων που δέχεται η διπλή τροχαλία, ως προς τον άξονα περιστροφής της:

$$\sum \tau = 0\,, \text{ ή } \quad T_2{}' \cdot R_2 = T_1{}' \cdot R_1, \ \ m_2 \cdot g \cdot R_2 = m_1 \cdot g \cdot R_1$$

$$\text{Τελικά:} \quad m_1 = m_2 \cdot \frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2}{2} = 0{,}5 \text{ kg}$$

Μονάδες 6

4.2. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, για την πτώση του σώματος Σ_2, από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα, μέχρι να φτάσει να συγκρουστεί με το σώμα Σ_3:

$$\Delta K = W_{\beta\acute{\alpha}\rho o\upsilon\varsigma}, \quad \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \upsilon_1^2 = m_2 \cdot g \cdot h, \qquad \upsilon_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής στο σύστημα των δυο σωμάτων κατά την πλαστική μεταξύ τους κρούση (ασήμαντης χρονικής διάρκειας):

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}, \ \ m_2 \cdot \upsilon_1 = (m_3 + m_2) \cdot \upsilon \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{m_2}{m_3 + m_2} \cdot \upsilon_1 = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Μονάδες 6

4.3. Αρχικά το σώμα Σ_3 ισορροπεί (Θ.Ι), έχοντας προκαλέσει με το βάρος του συσπείρωση κατά Δl στο ελατήριο. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων:

$$\sum F = 0, m_3 \cdot g = k \cdot \Delta l \qquad (1)$$

και υπολογίζουμε: $\Delta l = \frac{m_3 \cdot g}{k} = 0{,}2\ \mathrm{m}$

Το συσσωμάτωμα έχει μεγαλύτερο βάρος και η θέση ισορροπίας του (Θ.Ι΄), είναι πιο κάτω από τη θέση ισορροπίας του Σ_3 κατά y_1, όπου ισχύει και πάλι συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων:

$$\sum F = 0, (m_3 + m_2) \cdot g = k \cdot (\Delta l + y_1) \qquad (2)$$

Και υπολογίζουμε: $\Delta l + y_1 = \frac{(m_3+m_2)\cdot g}{k} = 0{,}3\ \mathrm{m},\ y_1 = 0{,}1\ \mathrm{m}$

Αμέσως μετά την πλαστική κρούση, για τη συνισταμένη των δυνάμεων, ισχύει:

$$\sum F = k \cdot \Delta l - (m_2 + m_3) \cdot g \overset{(2)}{\Rightarrow} \sum F = k \cdot \Delta l - k \cdot (\Delta l + y_1) = -k \cdot y_1$$

Άρα το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, με σταθερά επαναφοράς τη σταθερά k του ελατηρίου.

Η θέση της κρούσης αποτελεί τυχαία θέση της ταλάντωσης. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης ενέργειας ταλάντωσης:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot y_1^2 + \frac{1}{2} \cdot (m_2 + m_3) \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

$$A = \sqrt{y_1^2 + \frac{m_2 + m_3}{k} \cdot v^2} = 0{,}2\ \mathrm{m}$$

Μονάδες 7

4.4. Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργεια του συσσωματώματος, αμέσως μετά την πλαστική κρούση ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = (\sum F) \cdot v = F_{\varepsilon\pi} \cdot v = -k \cdot y_1 \cdot v = -100 \cdot (-0{,}1) \cdot 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 10\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$$

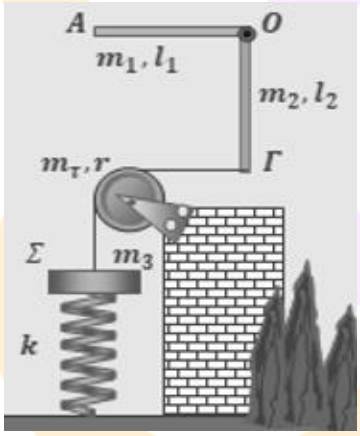
Μονάδες 6

<u>Παρατήρηση</u>: Για το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας, δεν παίζει ρόλο η θετική φορά που έχουμε θεωρήσει. Αν αλλάξουμε θετική φορά, θα αλλάξει το πρόσημο και στην ταχύτητα αλλά και στην απομάκρυνση και ο ρυθμός μεταβολής θα προκύψει και πάλι θετικός

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Δύο λεπτές, ισοπαχείς και ομογενείς ράβδοι (OA) και ($O\Gamma$), έχουν συγκολληθεί στο κοινό τους άκρο O, έτσι ώστε να κινούνται σαν ένα σώμα και να είναι κάθετες μεταξύ τους. Στο κοινό άκρο O των δύο ράβδων προσαρμόσαμε σταθερό άξονα, οριζόντιο και κάθετο στο επίπεδό τους, γύρω από τον οποίο μπορούν να περιστρέφονται ελεύθερα, χωρίς τριβές, όπως στο σχήμα. Οι δύο ράβδοι έχουν μάζες $m_{(OA)} = m_1 = 6\ \text{kg}$ και $m_{(O\Gamma)} = m_2 = 3\ \text{kg}$. Τα μήκη των δύο ράβδων είναι ίσα και δίνονται $l_1 = l_2 = l = 2{,}5\ \text{m}$. Στο άκρο Γ της ράβδου $O\Gamma$, δέσαμε το ένα άκρο αβαρούς και μη ελαστικού νήματος. Το νήμα τεντωμένο και οριζόντιο περνάει στο αυλάκι μιας τροχαλίας μάζας $m_\tau = 1\ \text{kg}$ και ακτίνας r, η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα στο κέντρο της. Το νήμα μετά την τροχαλία τεντωμένο και κατακόρυφο, δένεται σε σώμα Σ, μάζας $m_3 = 3\ \text{kg}$, το οποίο είναι στερεωμένο στο πάνω άκρο ιδανικού, κατακόρυφου και αβαρούς ελατηρίου, σταθεράς $k = 300\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$, το κάτω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο, όπως στο σχήμα. Το κέντρο μάζας του Σ βρίσκεται στην κατακόρυφη ευθεία του άξονα του ελατηρίου.



Αρχικά η διάταξη ισορροπεί, με όλα τα σώματα ακίνητα και τα κέντρα τους στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

4.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης ($\vec{T}$) του νήματος, την οποία δέχεται η ράβδος ($O\Gamma$) στο άκρο Γ.

Μονάδες 6

4.2 Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης ($\vec{F}$), την οποία δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της.

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, κόψαμε το νήμα, με αποτέλεσμα το σώμα Σ να τεθεί σε κατακόρυφη ταλάντωση.

4.3 Να δείξετε ότι η ταλάντωση του σώματος Σ είναι απλή αρμονική και να υπολογίσετε την περίοδό της.

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του συστήματος εξαιτίας του παραμορφωμένου ελατηρίου.

νέο φροντιστήριο

Μονάδες 7

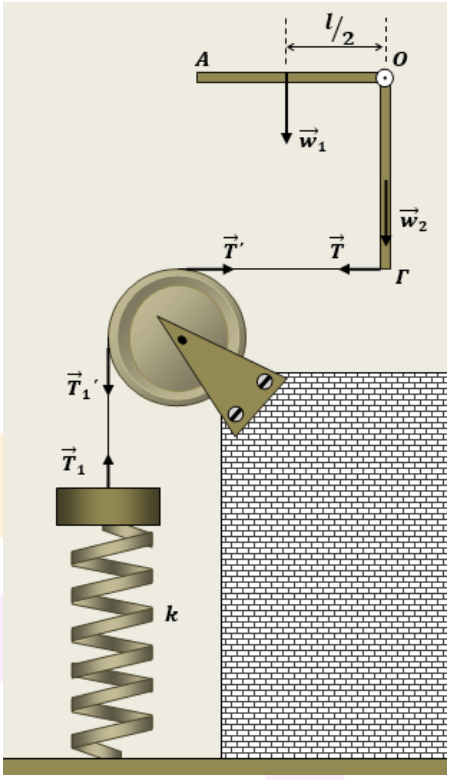
Οι αντιστάσεις αέρα αγνοούνται και το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας θεωρείται $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

4.1. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα των δύο ράβδων, ως προς τον άξονα στο O:

$$(\sum \tau)_o = 0\,, \quad w_1 \cdot \frac{l}{2} = T \cdot l, \quad T = \frac{w_1}{2} = \frac{m_1 \cdot g}{2} = 30\ \text{N}$$



Μονάδες 6

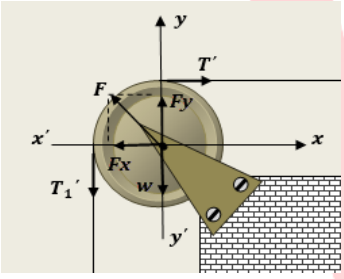
4.2. Το τεντωμένο οριζόντιο τμήμα του αβαρούς νήματος, ασκεί στα άκρα του δυνάμεις αντίθετες. Δηλαδή κατά μέτρο ισχύει:

$$T' = T = 30\ \text{N}$$

Εφαρμόζουμε στην τροχαλία συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής στο κέντρο της:

$$(\sum \tau)_{\alpha\xi} = 0, \quad T_1{}' \cdot r = T \cdot r\,, \quad T_1{}' = T = 30\ \text{N}$$

Αναλύουμε τη δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_x, \vec{F}_y$ οριζόντια και κατακόρυφα, όπως στο σχήμα. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων κατά άξονες:



$$\sum F_x = 0\ , \quad T' - F_x = 0\ , \quad F_x = T' = 30\ \text{N}$$

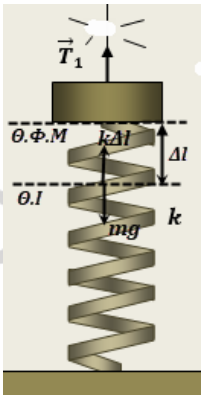
$$\sum F_y = 0\ , \quad F_y - T_1{}' - w = 0\ , \quad F_y = T_1{}' + w = 40\ \text{N}$$

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα για να υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης F που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 50\ \text{N}$$

Μονάδες 6

4.3. Το τεντωμένο κατακόρυφο τμήμα του αβαρούς νήματος, ασκεί στα άκρα του αντίθετες δυνάμεις. Δηλαδή κατά μέτρο ισχύει: $T_1 = T_1{}' = 30\ \text{N}$



Παρατηρούμε ότι το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκείται κατακόρυφα και προς τα πάνω στο σώμα Σ είναι ίσο με το μέτρο του βάρους του $w_3 = m_3 \cdot g = 30\ \text{N}$.

Άρα το σώμα Σ ισορροπεί αρχικά στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Ακόμη και αν δεν κάνουμε αυτή την παρατήρηση, θα καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα εφαρμόζοντας συνθήκη ισορροπίας για το Σ.

Όταν κοπεί το νήμα το σώμα αρχίζει να ταλαντώνεται κατακόρυφα γύρω από τη θέση ισορροπίας του $(\Theta.I)$, στην οποία το ελατήριο έχει συσπείρωση κατά Δl και ισχύει:

$$(\sum F)_{\Theta.I} = 0\,, \ k \cdot \Delta l = m_3 \cdot g\,, \ \Delta l = \frac{m_3 \cdot g}{k} = \frac{30}{300}\ \text{m} = 0{,}1\ \text{m}$$

Στην τυχαία θέση καθώς κατεβαίνει το σώμα Σ και είναι κατά x πάνω από τη θέση ισορροπίας του, ισχύει:

$$\sum F' = k \cdot (\Delta l - x) - m_3 \cdot g = k \cdot \Delta l - k \cdot x - m_3 \cdot g = -k \cdot x$$

Άρα η ταλάντωση του σώματος είναι απλή αρμονική.

Μονάδες 7

4.4. Τη στιγμή που κόπηκε το νήμα και άρχισε η απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος, η ταχύτητά του Σ ήταν μηδέν. Άρα η αρχική του θέση ήταν ακραία θέση της ταλάντωσης που ακολουθεί, συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με την συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος:

$$A = \Delta l = 0{,}1\ \mathrm{m}$$

Η μέγιστη συσπείρωση ελατηρίου θα εμφανίζεται στο κάτω άκρο της ταλάντωσης, θα είναι:

$$\Delta l_{max} = 2 \cdot A = 0{,}2\ \mathrm{m}\ ,$$

με αποτέλεσμα η μέγιστη δυναμική ενέργεια ελατηρίου να είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda}^{max} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (2 \cdot A)^2 = 2 \cdot k \cdot A^2 = 2 \cdot 300 \cdot 0{,}01\ \mathrm{J} = 6\ \mathrm{J}$$

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης εμφανίζεται στις ακραίες θέσεις της και είναι:

$$U_{\tau\alpha\lambda}^{max} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 0{,}01\ \mathrm{J} = 1{,}5\ \mathrm{J}$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο