Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Γ Λυκείου

Μαθηματικά

Κεφάλαιο: 1 Πιθανότητες

Θέμα 4

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα σχολείο στη Γ΄ Λυκείου φοιτούν 100 μαθητές. Στην τάξη αυτή δεν υπάρχουν αδέρφια, οπότε οι 100 μαθητές αντιστοιχούν σε 100 διαφορετικές οικογένειες.

Ρωτήσαμε τους 100 μαθητές το πλήθος των παιδιών της οικογένειας τους. Από τις απαντήσεις τους προέκυψε ότι οι οικογένειες των μαθητών έχουν το πολύ τέσσερα παιδιά. Συγκεκριμένα, οι 56 οικογένειες έχουν δύο παιδιά, 20 οικογένειες έχουν τρία παιδιά, 8 οικογένειες έχουν τέσσερα παιδιά και οι υπόλοιπες έχουν ένα παιδί.

α) Αν επιλέξουμε στην τύχη μια από τις παραπάνω οικογένειες των μαθητών, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου :

i. «Η οικογένεια του μαθητή έχει τέσσερα παιδιά». (Μονάδες 5)

ii. «Η οικογένεια του μαθητή έχει λιγότερα από τρία παιδιά». (Μονάδες 5)

β) Στην γιορτή αποφοίτησης συμμετείχαν όλοι οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου με τις οικογένειές τους. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα από τα παρευρισκόμενα παιδιά, ποια είναι η πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τέσσερα παιδιά; (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα α)i. και β) και στην περίπτωση που είναι διαφορετικές να δικαιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό. (Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Μεταξύ των 100 μαθητών της Γ' Λυκείου του σχολείου δεν υπάρχουν αδέρφια, άρα στις αντίστοιχες 100 οικογένειες των μαθητών αυτών οι 100 – (56 + 20 + 8) = 16 οικογένειες έχουν ένα παιδί. Αφού επιλέγουμε στην τύχη μία από τις οικογένειες καθεμιά από αυτές έχει ίδια πιθανότητα να επιλεγεί οπότε :

i. Η πιθανότητα του ενδεχομένου : «Η οικογένεια του μαθητή έχει τέσσερα παιδιά», ισούται με $\frac{\text{πλήθος των οικογενειών με τέσσερα παιδιά}}{\text{πλήθος όλων των οικογενειών}} = \frac{8}{100} = 0{,}08$.

ii. Η πιθανότητα του ενδεχομένου : «Η οικογένεια του μαθητή έχει λιγότερα από τρία παιδιά», ισούται με $\frac{\text{πλήθος των οικογενειών με ένα ή δύο παιδιά}}{\text{πλήθος όλων των οικογενειών}} = \frac{16+56}{100} = 0{,}72$.

β) Στη γιορτή για την αποφοίτηση συμμετείχαν όλα τα παιδιά των οικογενειών, οπότε το πλήθος των παιδιών στη γιορτή είναι $16 \cdot 1 + 56 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 220$ παιδιά. Από αυτά τα $8 \cdot 4 = 32$ είναι παιδιά που ανήκουν σε οικογένειες με τέσσερα παιδιά. Επειδή επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα παιδιά καθένα από αυτά έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Οπότε, η πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τέσσερα παιδιά ισούται με $\frac{\text{πλήθος των παιδιών που είναι μέλη οικογενειών με τέσσερα παιδιά}}{\text{πλήθος όλων των παιδιών}} = \frac{32}{220} = \frac{8}{55}$.

γ) Στη γιορτή για την αποφοίτηση κάθε οικογένεια εκπροσωπείται στον δειγματικό χώρο με τόσα στοιχεία όσα είναι και τα παιδιά της. Αντίθετα, στην τυχαία επιλογή από τους μαθητές του σχολείου, κάθε οικογένεια, όσα παιδιά και αν έχει, εκπροσωπείται από ένα στοιχείο του δειγματικού χώρου. Για αυτό και όταν επιλέγουμε ένα παιδί που συμμετέχει στη γιορτή αποφοίτησης είναι πιο πιθανό να επιλέξουμε παιδί από μια πολυμελή οικογένεια από όταν επιλέγουμε μαθητή του σχολείου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις οικογένειες που είναι δυνατό να σχηματιστούν με τρία παιδιά. Εξετάζουμε τα παιδιά των οικογενειών αυτών ως προς το φύλο και τη σειρά γέννησής τους. Για παράδειγμα η τριάδα (α,κ,α) αντιστοιχεί σε οικογένεια με πρώτο παιδί αγόρι, δεύτερο παιδί κορίτσι και τρίτο παιδί αγόρι.

α) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα :

Α: «Το πρώτο παιδί της οικογένειας είναι κορίτσι».

Β: «Και τα τρία παιδιά είναι ίδιου φύλου».

Γ: «Το φύλο του δεύτερου παιδιού είναι διαφορετικό από το φύλο του πρώτου και του τρίτου παιδιού».

(Μονάδες 9)

β) Αν μία οικογένεια αποκτήσει τρία παιδιά :

i. Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο παιδί της οικογένειας να είναι κορίτσι;

(Μονάδες 5)

ii. Ποια είναι η πιθανότητα και τα τρία παιδιά της οικογένειας να είναι ίδιου φύλου;

(Μονάδες 5)

iii. Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι το ενδεχόμενο Γ έχει ίδια πιθανότητα να συμβεί με το ενδεχόμενο να φέρει κάποιος 2 φορές κεφαλή αν στρίψει δυο φορές ένα αμερόληπτο κέρμα. Συμφωνείτε με την άποψή του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Αν συμβολίσουμε με «κ» το κορίτσι και με «α» το αγόρι τότε τα τρία παιδιά της οικογένειας με σειρά γέννησης παριστάνονται από τριάδες. Αν η τριάδα (α,κ,α) αντιστοιχεί σε οικογένεια με πρώτο παιδί αγόρι, δεύτερο παιδί κορίτσι και τρίτο παιδί αγόρι, τότε, τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ με αναγραφή των στοιχείων τους είναι :

Α= {(κ,κ,κ), (κ,κ,α), (κ,α,κ), (κ,α,α)}

Β= {(κ,κ,κ), (α,α,α)}

Γ={(κ,α,κ), (α,κ,α)}

β) Το πλήθος των οικογενειών που είναι δυνατόν να σχηματιστούν με τρία παιδιά, αν εξετάσουμε τα παιδιά των οικογενειών αυτών ως προς το φύλο και τη σειρά γέννησής τους, είναι 2·2·2= 8. Για το φύλο του 1ου παιδιού έχουμε 2 δυνατά αποτελέσματα. Για καθένα από τα αποτελέσματα αυτά έχουμε επίσης 2 δυνατά αποτελέσματα για το φύλο του 2ου παιδιού. Τέλος για καθένα από τα 4 αποτελέσματα που προέκυψαν από τις δύο πρώτες γεννήσεις έχουμε 2 δυνατά αποτελέσματα και για την 3η γέννηση. Θεωρούμε ότι όλες οι δυνατές τριάδες των παιδιών είναι εξίσου πιθανές, οπότε:

i. Η πιθανότητα το πρώτο παιδί της οικογένειας να είναι κορίτσι, δηλαδή η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α, ισούται με

$$\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } A}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ii. Η πιθανότητα και τα τρία παιδιά της οικογένειας να είναι ίδιου φύλου, δηλαδή η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β, ισούται με

$$\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } B}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

iii. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Γ ισούται με

$$\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } \Gamma}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Το ενδεχόμενο να φέρει κάποιος 2 φορές κεφαλή αν στρίψει δυο φορές ένα αμερόληπτο κέρμα έχει πιθανότητα να συμβεί ίση με $\frac{1}{4}$, αφού τα δυνατά αποτελέσματα δύο ρίψεων ενός αμερόληπτου κέρματος είναι τα :

{(Κ,Κ), (Κ,Γ), (Γ,Κ), (Γ,Γ)} και από αυτά το ευνοϊκό για το ενδεχόμενό μας είναι μόνο το (Κ,Κ).

Οπότε πράγματι είναι σωστός ο ισχυρισμός του μαθητή. Τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, με πιθανότητα καθενός να πραγματοποιηθεί ίση με $\frac{1}{4}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Η Μαρία έχει έναν προσωπικό κωδικό πρόσβασης για το ηλεκτρονικό της ταχυδρομείο, τον οποίο επέλεξε τυχαία. Ο κωδικός αποτελείται από τέσσερις μονοψήφιους αριθμούς (τέσσερα ψηφία), σε τέσσερις αντίστοιχες θέσεις όπως παρακάτω:

_ _ _ _

Η Μαρία δε θυμάται το τελευταίο ψηφίο του προσωπικού κωδικού της.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να πληκτρολογήσει σωστά τον προσωπικό της κωδικό, επιλέγοντας τυχαία το τελευταίο ψηφίο;

(Μονάδες 8)

β) Επειδή δεν πληκτρολόγησε σωστά τον κωδικό της, αποφάσισε να τον αλλάξει. Ο νέος κωδικός θα έχει επίσης τέσσερα ψηφία σε τέσσερις θέσεις. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 10000 διαφορετικοί κωδικοί που μπορεί να δημιουργήσει η Μαρία.

(Μονάδες 10)

γ) Για να αλλάξει τον κωδικό της επέλεξε τυχαία τον αριθμό κάθε θέσης. Ποια είναι η πιθανότητα στον προσωπικό κωδικό της να μην επαναλαμβάνεται κάποιος από τους αριθμούς;

(Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η Μαρία επέλεξε τυχαία τον προσωπικό της κωδικό. Άρα κάθε ένας από τους δυνατούς κωδικούς είχε την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με το τελευταίο του ψηφίο. Δεν υπάρχει κάποιο ψηφίο που να είναι πιθανότερο να έχει επιλέξει η Μαρία, ως τελευταίο.

Για να πληκτρολογήσει σωστά τον προσωπικό της κωδικό, με δεδομένο ότι τα τρία πρώτα ψηφία τα θυμάται, χρειάζεται να επιλέξει τυχαία το τέταρτο.

Έστω ότι επιλέγει τυχαία το τέταρτο ψηφίο.

Όλες οι πιθανές εκβάσεις (δυνατές περιπτώσεις) είναι 10, δηλαδή θα επιλέξει ένα από τα $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Από αυτές ευνοϊκή είναι μία, αυτή που αντιστοιχεί στο σωστό ψηφίο.

Επομένως η πιθανότητα να πετύχει τυχαία το σωστό τέταρτο ψηφίο, άρα και τον σωστό κωδικό είναι $\frac{1}{10}$.

β) Για κάθε θέση, η Μαρία έχει 10 επιλογές ψηφίου.

Επομένως, υπάρχουν $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ διαφορετικοί κωδικοί.

γ) Η Μαρία επιλέγει τυχαία έναν κωδικό, κάτι που αντιστοιχεί σε 10000 διαφορετικές επιλογές κωδικού, όπως είδαμε στο β) ερώτημα.

Αν θεωρήσουμε το ενδεχόμενο "στον κωδικό που επέλεξε η Μαρία κανένα ψηφίο δεν επαναλαμβάνεται", τότε για τα ευνοϊκά αποτελέσματα του ενδεχομένου έχουμε:

Υπάρχουν 10 επιλογές για το πρώτο ψηφίο, 9 επιλογές για το δεύτερο, 8 για το τρίτο και 7 για το τέταρτο. Άρα υπάρχουν $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ διαφορετικοί κωδικοί.

Επομένως η πιθανότητα του παραπάνω ενδεχομένου είναι $\frac{5040}{10000} = \frac{504}{1000} = 0{,}504$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρίψη ενός μεροληπτικού ζαριού» με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Δίνεται ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 1» είναι $\mathrm{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$ και ότι τα ενδεχόμενα $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ και $\{6\}$ είναι ισοπίθανα.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{P}(\{2\}) = \mathrm{P}(\{3\}) = \mathrm{P}(\{4\}) = \mathrm{P}(\{5\}) = \mathrm{P}(\{6\}) = \frac{1}{10}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. A: «Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 1 ή 5» (Μονάδες 6)

ii. B: «Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος αριθμός». (Μονάδες 6)

γ) Έστω ένα δεύτερο πείραμα τύχης «ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού» με τον ίδιο δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του οποίου όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Να βρείτε για το δεύτερο πείραμα τύχης τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B του ερωτήματος β) και να τις συγκρίνετε μεταξύ τους. (Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έστω $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = p$, με $0 \leq p \leq 1$.

Από τον αξιωματικό ορισμό πιθανότητας προκύπτει ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων των απλών ενδεχομένων είναι ίσο με 1, άρα

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$$

$$\frac{1}{2} + 5p = 1$$

$$5p = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{10}$$

Επομένως

$$P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{10}.$$

β) i) Είναι $A = \{1, 5\}$ άρα

$$P(A) = P(\{1\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

ii) Είναι $B = \{2, 4, 6\}$, άρα

$$P(B) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

γ) Αφού όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, από τον κλασικό ορισμό πιθανότητας θα έχουμε

$$P'(\{1\}) = P'(\{2\}) = P'(\{3\}) = P'(\{4\}) = P'(\{5\}) = P'(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Είναι $A = \{1, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$, άρα

$$P'(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ και } P'(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Όμως είναι $P(A) = \frac{3}{5}$ και $P(B) = \frac{3}{10}$, άρα

$$P'(A) < P(A) \text{ και } P'(B) > P(B).$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις φυλές: τις κούπες, τα καρό, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή έχει 13 φύλλα με τις παρακάτω ενδείξεις:

$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, βαλές (J), ντάμα (Q), ρήγας (K) και άσος (A).

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των συνδυασμών των 52 φύλλων ανά 4 είναι 270.725. (Μονάδες 9)

β) Από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα επιλέγουμε τυχαία τέσσερα φύλλα. Να βρείτε τις πιθανότητες να πάρουμε:

i. τέσσερα 10 (δεκάρια), (Μονάδες 8)

ii. τέσσερα φύλλα με την ίδια ένδειξη. (Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το πλήθος των συνδυασμών των 52 φύλλων ανά 4 είναι

$$\binom{52}{4} = \frac{52!}{4!\cdot(52-4)!} = \frac{52!}{4!\cdot 48!} = \frac{\cancel{48!}\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cancel{48!}} = 49\cdot 25\cdot 17\cdot 13 = 270.725.$$

β) Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο που αποτελείται από όλες τις δυνατές τετράδες των 52 φύλλων, όπου η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία. Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι τότε το πλήθος των συνδυασμών των 52 φύλλων ανά 4, που είναι 270.725.

i) Έστω το ενδεχόμενο Α: «Τα τέσσερα φύλλα που επιλέγουμε είναι 10 (δεκάρια)».

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 1, η τετράδα των δεκαριών: 10 κούπα, 10 καρό, 10 μπαστούνι και 10 σπαθί.

Σε μια καλά ανακατεμένη τράπουλα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλες οι τετράδες φύλλων είναι εξίσου πιθανές. Άρα από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{270.725}.$$

ii) Έστω το ενδεχόμενο Β: «Τα τέσσερα φύλλα που επιλέγουμε έχουν την ίδια ένδειξη».

Υπάρχουν 13 τετράδες φύλλων με την ίδια ένδειξη. Για παράδειγμα, η τετράδα με ένδειξη 10: 10 κούπα, 10 καρό, 10 μπαστούνι και 10 σπαθί, επίσης η τετράδα με ένδειξη ντάμα (Q): ντάμα κούπα, ντάμα καρό, ντάμα μπαστούνι και ντάμα σπαθί κλπ..

Επομένως το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο Β είναι 13.

Όπως προηγουμένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλες οι τετράδες φύλλων είναι εξίσου πιθανές. Άρα από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$\mathrm{P(B)} = \frac{13}{270.725} = \frac{1}{20.825}.$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σ΄ ένα διαγώνισμα δύο ερωτήσεις είναι πολλαπλής επιλογής, με τέσσερις δυνατές απαντήσεις η καθεμία τις α , β , γ και δ. Η σωστή απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η α και στη δεύτερη η δ. Ένας μαθητής επιλέγει τυχαία την απάντηση για καθεμία από τις δύο ερωτήσεις.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές απαντήσεις στις δύο ερωτήσεις. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

i. ο μαθητής απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση, (Μονάδες 5)

ii. ο μαθητής απάντησε σωστά στη δεύτερη ερώτηση, (Μονάδες 5)

iii. ο μαθητής απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις, (Μονάδες 5)

iv. ο μαθητής δεν απάντησε σωστά σε καμία από τις δύο ερωτήσεις. (Μονάδες 5)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ένας δειγματικός χώρος περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα, όπου για παράδειγμα η επιλογή βγ (απλό ενδεχόμενο) σημαίνει ότι η απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η β και στη δεύτερη η γ.

αα	βα	γα	δα
αβ	ββ	γβ	δβ
αγ	βγ	γγ	δγ
αδ	βδ	γδ	δδ

β) Έστω τα ενδεχόμενα:

A: «ο μαθητής απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση»,

B: «ο μαθητής απάντησε σωστά στη δεύτερη ερώτηση»,

A∩B: «ο μαθητής απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις».

Επειδή η σωστή απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η α και στη δεύτερη η δ, θα έχουμε

$$A = \{\alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta\},\ B = \{\alpha\delta, \beta\delta, \gamma\delta, \delta\delta\} \quad \text{και} \quad A \cap B = \{\alpha\delta\}.$$

Το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 16. Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για τα ενδεχόμενα A , B και A∩B είναι αντίστοιχα 4, 4 και 1.

Επομένως θα έχουμε

$$\text{i) } P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ii) } P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{iii) } P(A \cap B) = \frac{1}{16}.$$

iv)

Το ενδεχόμενο «ο μαθητής απάντησε σωστά σε μία τουλάχιστον ερώτηση» είναι το $A \cup B$.

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}.$$

Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του $A \cup B$ είναι το ενδεχόμενο

$(A \cup B)'$: «ο μαθητής δεν απάντησε σωστά σε καμία από τις δύο ερωτήσεις»

Επομένως θα είναι

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}.$$

ΘΕΜΑ 4

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Για παράδειγμα, ένα αποτέλεσμα του παραπάνω πειράματος θα μπορούσε να είναι της μορφής 34, που σημαίνει ότι η ένδειξη της $1^η$ ρίψης είναι 3 και της $2^{ης}$ είναι 4.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: «Το γινόμενο των 2 ενδείξεων να είναι 6»

Β: «Η ένδειξη στη $2^η$ ρίψη είναι μεγαλύτερη από την ένδειξη στην $1^η$ ρίψη»

Γ: «Το άθροισμα των 2 ενδείξεων να είναι 5»

α)

i. Να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο για το παραπάνω πείραμα τύχης. (Μονάδες 04)

ii. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ. (Μονάδες 06)

iii. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup Γ$ και Β-Γ. (Μονάδες 06)

β) Μετά τη $2^η$ ρίψη, κάνουμε και $3^η$ ρίψη με το ίδιο ζάρι.

i. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα στις 3 ρίψεις του ζαριού; (Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου, να έχουμε την ίδια ένδειξη και στις 3 ρίψεις. (Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης «Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης», περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα.

$1^η$ \ $2^η$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ο δ.χ. αποτελείται από τα παραπάνω 36 διατεταγμένα ζεύγη.

ii. Ο αριθμός 6 γράφεται: 6 = 1·6 ή 6 = 2·3. Οπότε θα πρέπει να έχουμε στις 2 ρίψεις του ζαριού τις ενδείξεις (1,6) ή (6,1) και (2,3) ή (3,2). Δηλαδή:

A = { (1,6), (6,1), (2,3), (3,2)}

Για το ενδεχόμενο Β θα πρέπει το 2° στοιχείο κάθε ζεύγους να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο 1° στοιχείο, δηλαδή είναι τα σκιασμένα γκρι κελιά του παραπάνω πίνακα.

B = { (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)}

Γ = {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)}

iii. A∪Γ = { (1,6), (6,1), (2,3), (3,2), (1,4), (4,1)} και

B-Γ= { (1,2), (1,3), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)}.

Επειδή πρόκειται για ένα συνηθισμένο ζάρι, θεωρούμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι εξίσου πιθανά.

Επομένως $P(A\cup\Gamma) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } A\cup\Gamma}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(B-\Gamma) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } B-\Gamma}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{13}{36}$

β)

i. Ο δ.χ. του προηγούμενου πειράματος έχει 36 στοιχεία, αφού στην $1^η$ ρίψη έχουμε 6 δυνατά αποτελέσματα και κάθε ένα από αυτά τα 6 αποτελέσματα υπάρχουν επίσης 6 δυνατά αποτελέσματα στην $2^η$ ρίψη.

Όταν ρίχνουμε και $3^η$ φορά το ζάρι, τα 36 δυνατά αποτελέσματα των 2 πρώτων ρίψεων έχουν, κάθε ένα από αυτά, 6 δυνατά αποτελέσματα για την ένδειξη του ζαριού της $3^{ης}$ ρίψης. Άρα σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης έχουμε $36 \cdot 6 = 216$ συνολικά δυνατά αποτελέσματα.

ii. Ένα αποτέλεσμα με την ίδια ένδειξη και στις 3 ρίψεις του ζαριού είναι για παράδειγμα το (4,4,4). Στον παραπάνω πίνακα, που αναφέρεται στις δύο πρώτες ρίψεις, έχουμε 6 αποτελέσματα με την ίδια ένδειξη στη $1^η$ και $2^η$ ρίψη, που είναι τα ζεύγη της διαγωνίου. Κάθε ζεύγος από αυτά θα φτιάχνει τριάδες με τον ίδιο αριθμό στην $3^η$ θέση και αυτό πραγματοποιείται για κάθε αριθμό από το 1 έως το 6 με έναν τρόπο. Άρα τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι $6 \cdot 1 = 6$, στο σύνολο των 216 δυνατών αποτελεσμάτων.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα μη αμερόληπτο ζάρι με δειγματικό χώρο Ω={1,2,3,4,5,6} είναι φτιαγμένο έτσι, ώστε η πιθανότητα του απλού ενδεχομένου {6} να είναι ίση με $\frac{1}{3}$. Για τις άλλες 5 έδρες του ισχύουν τα εξής: Τα απλά ενδεχόμενα {1}, {3}, {5} είναι ισοπίθανα και η πιθανότητα του ενδεχομένου A={1,3,5} είναι ίση με $\frac{1}{6}$. Τα απλά ενδεχόμενα {2} και {4} είναι επίσης ισοπίθανα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{18}$

ii. $P(\{2\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$

(Μονάδες 10)

β) Σε μία τυχαία ρίψη του ζαριού, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

i. A: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος»

ii. B: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 3 ή 4»

(Μονάδες 10)

γ) Αν το ζάρι είναι αμερόληπτο με δειγματικό χώρο Ω={1,2,3,4,5,6}, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου B του ερωτήματος β) ii. και να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα. (Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

i. Έστω Α το ενδεχόμενο «εμφανίζεται περιττή ένδειξη», δηλαδή Α={1,3,5}. Γνωρίζουμε ότι P(A)=$\frac{1}{6}$, με $P(A)=P(\{1\})+P(\{3\})+P(\{5\}$. Έστω $P(\{1\})=P(\{3\})=P(\{5\}$ = P.

Άρα $\frac{1}{6}$ = 3P ή P = $\frac{1}{18}$. Επομένως $P(\{1\})=P(\{3\})=P(\{5\})$ = $\frac{1}{18}$.

ii. Ισχύει ότι $P(\{2\})=P(\{4\})=P'$. Τότε από τον Αξιωματικό ορισμό της Πιθανότητας έχουμε ότι $P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})=1$ ή

$\frac{1}{18}+P'+\frac{1}{18}+P'+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}=1$

ή $\frac{3}{18}+\frac{1}{3}+2P'=1$ ή $2P'=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$ ή $2P'=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, άρα $P'=\frac{1}{4}$.

Άρα P({2}) = P({4}) = $\frac{1}{4}$

β)

i. Για το ενδεχόμενο Α έχουμε, Α={2,4,6}.

Άρα $P(A)=P(\{2\})+P(\{4\})+P(\{6\})=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

ii. Για το ενδεχόμενο Β έχουμε, $P(B)=P(\{3\})+P(\{4\})=\frac{1}{18}+\frac{1}{4}=\frac{11}{36}$

γ) Αν το ζάρι είναι αμερόληπτο, τότε ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από τα στοιχειώδη ισοπίθανα ενδεχόμενα {1},{2},{3},{4},{5},{6} και ισχύει ότι:

$P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=P(\{5\})=P(\{6\})=\frac{1}{6}$.

Άρα $P(B)=P(\{3\})+P(\{4\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

Ισχύει ότι: $\frac{1}{3}>\frac{11}{36}$ γιατί $\frac{12}{36}>\frac{11}{36}$, επομένως, η πιθανότητα να φέρουμε 3 ή 4 είναι μεγαλύτερη με το αμερόληπτο ζάρι από ότι το μη αμερόληπτο ζάρι.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σ΄ ένα εκπτωτικό κατάστημα, ένας πελάτης θέλει να αγοράσει ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν. Τα διαθέσιμα μεγέθη και για τα δύο είδη είναι μικρό (s), μεσαίο (m), και μεγάλο (L). Τα σωστά μεγέθη που φοράει ο πελάτης, για το πουκάμισο είναι μεσαίο (m), ενώ για το μπουφάν, είναι μεγάλο (L). Ο πελάτης επιλέγει τυχαία ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν χωρίς να κοιτάξει τα μεγέθη τους.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές επιλογές για το μέγεθος των δύο ειδών (πουκάμισο και μπουφάν) που επιλέγει ο πελάτης. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

i. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το πουκάμισο. (Μονάδες 05)

ii. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το μπουφάν. (Μονάδες 05)

iii. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για ένα τουλάχιστον από τα δύο είδη. (Μονάδες 05)

iv. Ο πελάτης δεν επέλεξε το σωστό μέγεθος σε κανένα από τα δύο είδη. (Μονάδες 05)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος για το πείραμα τύχης «Επιλογή πουκαμίσου και μπουφάν» περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα. Η επιλογή sm σημαίνει ότι επιλέγει μέγεθος μικρό (s) για το πουκάμισο και μεσαίο (m) για το μπουφάν.

ss	sm	sL
ms	mm	mL
Ls	Lm	LL

β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το πουκάμισο, δηλαδή (m)»

B: «ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το μπουφάν, δηλαδή (L)»

Τότε $A = \{ms, mm, mL\}$ και $B = \{sL, mL, LL\}$

Θεωρούμε ότι οι 9 επιλογές που περιγράφονται στον παραπάνω πίνακα είναι εξίσου πιθανές, οπότε από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, έχουμε:

i. $P(A)=\dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

ii. $P(B)=\dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

iii. Το ενδεχόμενο, «ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για ένα τουλάχιστον από τα δύο είδη» είναι το $A \cup B$, με

$A \cup B = \{ms, mm, mL, sL, LL\}$,

οπότε $P(A \cup B) = \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}}=\dfrac{5}{9}$

iv. Το ενδεχόμενο «ο πελάτης δεν επέλεξε το σωστό μέγεθος σε κανένα από τα δύο είδη» είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο $(A \cup B)'$, του $A \cup B$.

Επομένως $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα σχολείο φοιτούν 600 μαθητές. Οι γυμναστές του σχολείου ανά μήνα προσπαθούν να εξοικειώνουν τους μαθητές τους με διαφορετικές αθλητικές δραστηριότητες. Ο μήνας Φεβρουάριος είναι αφιερωμένος στη Γιόγκα και το Χορό. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να επιλέξει τουλάχιστον μια από τις δραστηριότητες Χορό ή Γιόγκα. 420 μαθητές επέλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν με Γιόγκα και 330 με Χορό.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή του σχολείου. Ονομάζουμε Γ το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει Γιόγκα» και Χ το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει Χορό».

α)

i. Υπάρχουν μαθητές του σχολείου που διάλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν και με τις δύο δραστηριότητες (Χορό και Γιόγκα); (Μονάδες 4)

ii. Είναι τα ενδεχόμενα Γ και Χ ασυμβίβαστα; (Μονάδες 3)

β) Τα ενδεχόμενα: «ο μαθητής επιλέγει μόνο Χορό» και «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» είναι ασυμβίβαστα; (Μονάδες 4)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» ισούται με $\frac{270}{600}$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο μια από τις προτεινόμενες αθλητικές δραστηριότητες του μήνα». (Μονάδες 7)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α)

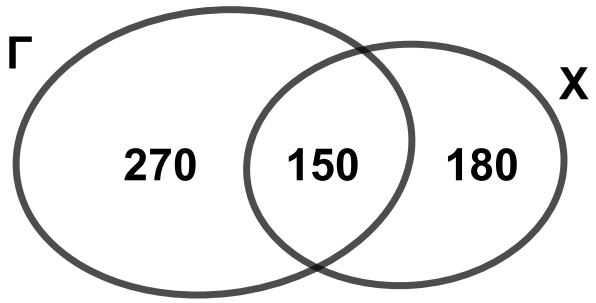
i. Το σχολείο έχει 600 μαθητές και κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να επιλέξει τουλάχιστον μια από τις δραστηριότητες Χορό ή Γιόγκα. Αν όλοι οι μαθητές επέλεγαν μόνο μία από τις προτεινόμενες δραστηριότητες (Χορό ή Γιόγκα), θα έπρεπε οι μαθητές του σχολείου να είναι 420 + 330 = 750. Όμως 750 > 600, άρα υπάρχουν μαθητές που επέλεξαν και τις δύο δραστηριότητες.

ii. Τα ενδεχόμενα Γ και Χ έχουν κοινά στοιχεία τους μαθητές που επέλεξαν και τις δύο δραστηριότητες. Άρα δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) Το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει μόνο Χορό» είναι το Χ – Γ και έχει ως στοιχεία τους μαθητές που επέλεξαν Χορό και όχι Γιόγκα. Ενώ το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» είναι το Γ – Χ και έχει ως στοιχεία τους μαθητές που επέλεξαν Γιόγκα και όχι Χορό. Τα δύο ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά στοιχεία, άρα είναι ασυμβίβαστα.

γ) Ας συμβολίσουμε με ν τους μαθητές που επέλεξαν να ασχοληθούν και με τις δύο δραστηριότητες, Χορό και Γιόγκα. Τότε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Γ – Χ, δηλαδή το πλήθος των μαθητών που επιλέγουν μόνο Γιόγκα είναι 420 – ν. Ομοίως το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Χ – Γ, δηλαδή το πλήθος των μαθητών που επιλέγουν μόνο Χορό είναι 330 – ν. Για το σύνολο όλων των μαθητών ισχύει : 420 – ν + 330 – ν + ν = 600. Άρα ν = 150.

Οπότε 150 μαθητές διάλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν με το Χορό και τη Γιόγκα. Έτσι 420 – 150 = 270 μαθητές διάλεξαν να ασχοληθούν μόνο με Γιόγκα και 330 – 150 = 180 μαθητές διάλεγαν να ασχοληθούν μόνο με το Χορό. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί:



Επειδή επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή του σχολείου, καθένας έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί. Οπότε :

i. Η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα», δηλαδή του ενδεχομένου Γ-Χ, είναι : $P(Γ - Χ) = \frac{270}{600}$

ii. Το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει μόνο μια από τις προτεινόμενες αθλητικές δραστηριότητες του μήνα» είναι το $(Γ - Χ) \cup (Χ - Γ)$. Τα ενδεχόμενα αυτά από το ερώτημα β) είναι ασυμβίβαστα οπότε για την πιθανότητά του ενδεχομένου αυτού έχουμε :

$P[(Γ - Χ) \cup (Χ - Γ)] = P(Γ - Χ) + P(Χ - Γ) = \frac{270}{600} + \frac{180}{600} = \frac{450}{600}$.

Εναλλακτική λύση

Το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει μόνο μια από τις προτεινόμενες αθλητικές δραστηριότητες του μήνα» είναι το $(Γ \cap Χ)'$ (αφού $Ω = Γ \cup Χ$). Οπότε η πιθανότητα του ενδεχομένου $(Γ \cap Χ)'$ είναι $P(Γ \cap Χ)' = 1 - P(Γ \cap Χ) = 1 - \frac{150}{600} = \frac{450}{600}$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ο σύλλογος γονέων και κηδεμόνων ενός σχολείου διοργανώνει λαχειοφόρο αγορά, με σκοπό τα έσοδα των λαχνών να διατεθούν για την αγορά εξοπλισμού του σχολείου. Οι αριθμοί των λαχνών είναι όλοι οι τετραψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται με τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5$ και 6.

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος όλων των λαχνών είναι 1296. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. να κληρωθεί ένας λαχνός με τέσσερα ίδια ψηφία, (Μονάδες 8)

ii. να κληρωθεί ένας λαχνός με τέσσερα διαφορετικά ψηφία. (Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Κάθε λαχνός είναι ένας τετραψήφιος αριθμός που σχηματίζεται με τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5$ και 6.

Η πρώτη θέση από αριστερά (το ψηφίο των χιλιάδων) μπορεί να συμπληρωθεί με 6 τρόπους: με ένα από τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5$ και 6. Το ίδιο και οι υπόλοιπες τρεις θέσεις.

Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

Εναλλακτικά: Κάθε τετραψήφιος αριθμός που σχηματίζεται με τα ψηφία 1 , 2 , 3 , 4 , 5 και 6 είναι μια διάταξη των έξι ψηφίων $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ανά τέσσερα, με δυνατές τις επαναλήψεις. Άρα το πλήθος όλων των λαχνών είναι άρα $6^4 = 1296$.

β) Κάθε λαχνός είναι εξίσου πιθανό να κληρωθεί, επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας στον δειγματικό χώρο που αποτελείται από όλους τους λαχνούς. Το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων, δηλαδή όλων των λαχνών είναι 1296, από το α) ερώτημα.

i. Έστω το ενδεχόμενο Α: «να κληρωθεί ένας λαχνός με τέσσερα ίδια ψηφία». Είναι

$$A = \{1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666\},$$

επομένως το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Α, είναι 6. Άρα, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = \frac{6}{1296} = \frac{1}{216} \cong 0{,}0046 .$$

ii. Έστω το ενδεχόμενο Β: «να κληρωθεί ένας λαχνός με τέσσερα διαφορετικά ψηφία».

Η πρώτη θέση από αριστερά (το ψηφίο των χιλιάδων) μπορεί να συμπληρωθεί με 6 τρόπους: με ένα από τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5$ και 6. Η δεύτερη θέση (το ψηφίο των εκατοντάδων) μπορεί να συμπληρωθεί με 5 τρόπους, όσα είναι και τα ψηφία που απέμειναν ύστερα από την συμπλήρωση της πρώτης θέσης. Η τρίτη θέση (το ψηφίο των δεκάδων) μπορεί να συμπληρωθεί με 4 τρόπους, όσα είναι και τα ψηφία που απέμειναν ύστερα από την συμπλήρωση της πρώτης και της δεύτερης θέσης. Η τέταρτη θέση (το ψηφίο των μονάδων) μπορεί να συμπληρωθεί με 3 τρόπους, όσα είναι και τα ψηφία που απέμειναν ύστερα από την συμπλήρωση της πρώτης, της δεύτερης και της τρίτης θέσης. Σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος όλων των λαχνών με τέσσερα διαφορετικά ψηφία είναι

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Εναλλακτικά: Κάθε λαχνός με διαφορετικά ψηφία, είναι μια διάταξη των 6 ψηφίων ανά 4, χωρίς επαναλήψεις. Άρα το πλήθος όλων των λαχνών με τέσσερα διαφορετικά ψηφία είναι

$$(6)_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Β, είναι 360. Άρα, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$\mathrm{P(B)} = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18} \cong 0{,}28.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Στον τελικό των 100 μέτρων ανδρών σε μια αθλητική διοργάνωση, προκρίθηκαν 8 αθλητές και θα διεκδικήσουν τα τρία μετάλλια: χρυσό, αργυρό και χάλκινο. Υποθέτουμε ότι κάθε αθλητής είναι εξίσου πιθανό να τερματίσει σε μία οποιαδήποτε θέση από την $1^η$ έως την $8^η$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η κατάταξη των 8 αθλητών μπορεί να προκύψει με 40320 τρόπους, (Μονάδες 7)

ii. η τριάδα των νικητών μπορεί να προκύψει με 336 τρόπους. (Μονάδες 6)

β) Από τους 8 αθλητές που θα πάρουν μέρος στον τελικό, ακριβώς 2 είναι Ευρωπαίοι.

i. Πόσες είναι οι δυνατές τριάδες που αποτελούνται από μη Ευρωπαίους αθλητές; (Μονάδες 6)

ii. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει μετάλλιο, Ευρωπαίος αθλητής; (Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i. Η πρώτη θέση μπορεί να προκύψει με 8 τρόπους, όσοι είναι όλοι οι αθλητές. Η δεύτερη θέση μπορεί να προκύψει με 7 τρόπους, όσοι είναι οι αθλητές που απέμειναν. Η τρίτη θέση μπορεί να προκύψει με 6 τρόπους όσοι είναι οι αθλητές που απέμειναν μετά τη συμπλήρωση των δύο πρώτων θέσεων. Όμοια για τις άλλες θέσεις. Σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης υπάρχουν $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ τρόποι.

Εναλλακτικά: Κάθε κατάταξη των 8 αθλητών είναι ένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τους βάλουμε σε σειρά δηλαδή μια μετάθεση των 8.

Άρα η κατάταξη των 8 αθλητών μπορεί να προκύψει με

$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ τρόπους.

ii. Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, η πρώτη θέση μπορεί να προκύψει με 8 τρόπους, η δεύτερη θέση με 7 τρόπους και η τρίτη θέση με 6 τρόπους. Άρα, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης η πρώτη τριάδα αθλητών μπορεί να προκύψει $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ τρόπους.

Εναλλακτικά: Οι τρεις πρώτοι μπορεί να είναι κάθε τριάδα αθλητών, η οποία είναι μία διάταξη των 8 αθλητών ανά 3 χωρίς επαναλήψεις. Άρα η τριάδα των νικητών που θα ανέβει στο βάθρο να πάρει τα μετάλλια, μπορεί να προκύψει με $(8)_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ τρόπους.

β) i. Η πρώτη θέση μπορεί να προκύψει με 6 τρόπους, όσοι είναι οι μη Ευρωπαίοι αθλητές. Η δεύτερη θέση μπορεί να προκύψει με 5 τρόπους, όσοι είναι οι μη Ευρωπαίοι αθλητές που απέμειναν. Η τρίτη θέση μπορεί να προκύψει με 4 τρόπους όσοι είναι οι μη Ευρωπαίοι αθλητές που απέμειναν μετά τη συμπλήρωση των δύο πρώτων θέσεων. Σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, υπάρχουν $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ δυνατές τριάδες, που αποτελούνται μόνο από μη Ευρωπαίους αθλητές.

ii. Θεωρούμε το ενδεχόμενο Α: «τα τρία μετάλλια να πάρουν μη Ευρωπαίοι αθλητές».

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας θα έχουμε

$$\mathrm{P(A)} = \frac{120}{336} = \frac{5}{14}.$$

Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του Α, είναι το Α′: «να πάρει μετάλλιο, Ευρωπαίος αθλητής».

Επομένως η πιθανότητα να πάρει μετάλλιο, Ευρωπαίος αθλητής είναι

$$\mathrm{P(A')} = 1 - \mathrm{P(A)} = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}.$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρίψη τριών συνηθισμένων ζαριών» με δειγματικό χώρο όλες τις διατεταγμένες τριάδες που σχηματίζονται με τους αριθμούς 1 , 2 , 3 , 4 , 5 και 6.

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 216. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων A , B και Γ :

i. A: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τρεις ίσοι αριθμοί», (Μονάδες 6)

ii. B: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί», (Μονάδες 6)

iii. Γ: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τουλάχιστον δύο ίδιοι αριθμοί». (Μονάδες 6)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η πρώτη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 6 τρόπους: με $1, 2, 3, 4, 5$ ή 6. Το ίδιο και οι άλλες δύο θέσεις. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Εναλλακτικά: Κάθε διατεταγμένη τριάδα που σχηματίζεται με τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5$ και 6 είναι μια διάταξη των έξι αριθμών $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ανά τρία, με δυνατές τις επαναλήψεις. Άρα το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι άρα $6^3 = 216$.

β) Επειδή πρόκειται για συνηθισμένα ζάρια, θεωρούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης, είναι εξίσου πιθανά.

i. Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 6, οι διατεταγμένες τριάδες:

$$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6).$$

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}.$$

ii. Η πρώτη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 6 τρόπους: με $1, 2, 3, 4, 5$ ή 6. Η δεύτερη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 5 τρόπους , όσοι είναι οι αριθμοί που απέμειναν ύστερα από την συμπλήρωση της πρώτης θέσης. Η τρίτη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 4 τρόπους , όσοι είναι οι αριθμοί που απέμειναν ύστερα από την συμπλήρωση της πρώτης και της δεύτερης θέσης. Άρα, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Εναλλακτικά: Κάθε ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι μία διάταξη των έξι αριθμών $1, 2, 3, 4, 5$ και 6 ανά τρία, χωρίς επαναλήψεις, άρα $(6)_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Επομένως από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{20}{6^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

iii. Το ενδεχόμενο Γ είναι το συμπληρωματικό του Β, άρα έχουμε

$$P(\Gamma) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Ένα κουτί περιέχει 2 κόκκινες γραβάτες και 3 πράσινες γραβάτες, από τις οποίες ο Γιώργος για κάθε μέρα από τις επόμενες πέντε μέρες, θα παίρνει τυχαία μία γραβάτα να φορέσει.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω, όπου το αποτέλεσμα ΠΚΚΠΠ για παράδειγμα, σημαίνει ότι την πρώτη, την τέταρτη και την πέμπτη μέρα ο Γιώργος θα φορέσει πράσινη γραβάτα, ενώ τη δεύτερη και την τρίτη μέρα θα φορέσει κόκκινη γραβάτα. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων, ο Γιώργος:

i. να φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα,

ii. να μη φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα,

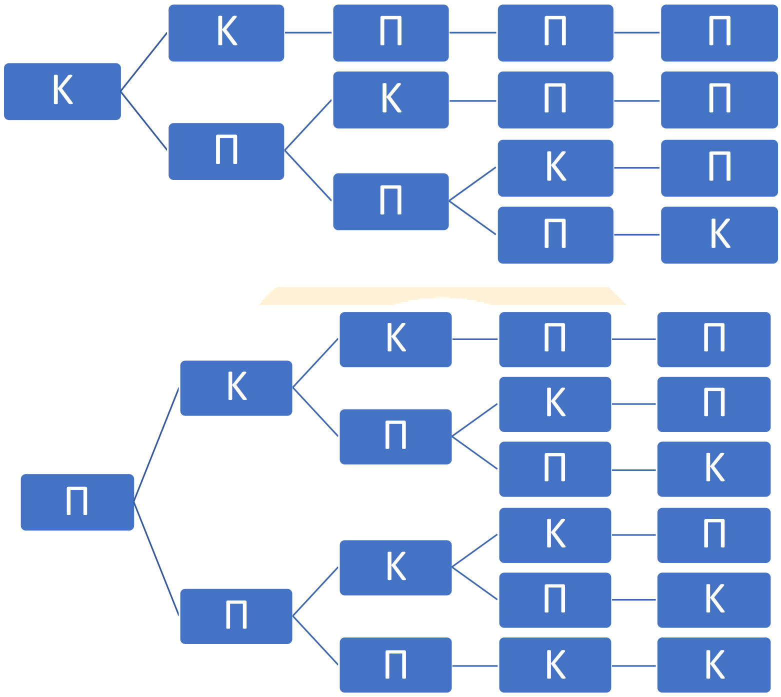
iii. να φορέσει κάθε μέρα, διαφορετικό χρώμα γραβάτας από την προηγούμενη μέρα.

(Μονάδες 18)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε τον δειγματικό χώρο Ω, κατασκευάζουμε το παρακάτω δενδροδιάγραμμα:



Επομένως έχουμε

$\Omega =$

$\{ΚΚΠΠΠ\,,ΚΠΚΠΠ\,,ΚΠΠΚΠ\,,ΚΠΠΠΚ,ΠΚΚΠΠ\,,ΠΚΠΚΠ\,,ΠΚΠΠΚ\,,ΠΠΚΚΠ\,,ΠΠΚΠΚ\,,ΠΠΠΚΚ\}$.

β) Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων, είναι το πλήθος των στοιχείων του Ω, το οποίο είναι 10, από το α) ερώτημα.

Εναλλακτικά: Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων, είναι όσοι και οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε τις 2 μέρες από τις 5, στις οποίες ο Γιώργος θα φορέσει κόκκινη γραβάτα, τις άλλες 3 μέρες αναγκαστικά θα φορέσει πράσινη γραβάτα (αφού οι κόκκινες γραβάτες είναι δύο και οι πράσινες γραβάτες τρεις). Επομένως το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι όσοι και οι συνδυασμοί των πέντε μερών ανά δύο, άρα

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{\cancel{3!}\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot \cancel{3!}} = 10.$$

Επειδή ο Γιώργος κάθε μέρα θα παίρνει τυχαία μία γραβάτα να φορέσει, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

i. Θεωρούμε το ενδεχόμενο Α: «ο Γιώργος να φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα».

Είναι $A = \{ΠΚΚΠΠ\,,ΠΚΠΚΠ\,,ΠΚΠΠΚ\,,ΠΠΚΚΠ\,,ΠΠΚΠΚ\,,ΠΠΠΚΚ\,\}$.

νέο φροντιστήριο

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Α είναι 6.

Εναλλακτικά: Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι όσοι και οι συνδυασμοί των τεσσάρων μερών (εκτός της πρώτης) ανά δύο, στις οποίες θα φορέσει κόκκινη γραβάτα, άρα

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{\cancel{2!}\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot \cancel{2!}} = 6.$$

Επομένως, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$\mathrm{P(A)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

ii. Το συμπληρωματικό του ενδεχομένου Α: «ο Γιώργος να φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα», είναι το ενδεχόμενο A': «ο Γιώργος να μη φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα», άρα έχουμε

$$\mathrm{P(A')} = 1 - \mathrm{P(A)} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

iii. Θεωρούμε το ενδεχόμενο:

Β: «ο Γιώργος να φορέσει κάθε μέρα, διαφορετικό χρώμα γραβάτας από την προηγούμενη μέρα». Είναι $\mathrm{B} = \{\Pi\mathrm{K}\Pi\mathrm{K}\Pi\}$.

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Β είναι 1. Άρα από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$\mathrm{P(B)} = \frac{1}{10}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Κάθε άνθρωπος ανήκει σε μία μόνο, από τις τέσσερις κύριες ομάδες αίματος Ο, Α, Β ή ΑΒ. Είναι γνωστό ότι η ομάδα Ο μπορεί να δώσει αίμα σε όλες τις ομάδες (Ο, Α, Β και ΑΒ). Η ομάδα Α μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις Α και ΑΒ. Η ομάδα Β μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις Β και ΑΒ. Τέλος, η ομάδα ΑΒ μπορεί να δώσει αίμα μόνο στην ΑΒ. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνεται η ποσοστιαία κατανομή των ομάδων αίματος σε μία πόλη.

Ένα άτομο από αυτή την πόλη, επιλέγεται τυχαία. Να βρείτε την πιθανότητα, αυτό να μπορεί:

α) να δώσει αίμα σε οποιοδήποτε άτομο,

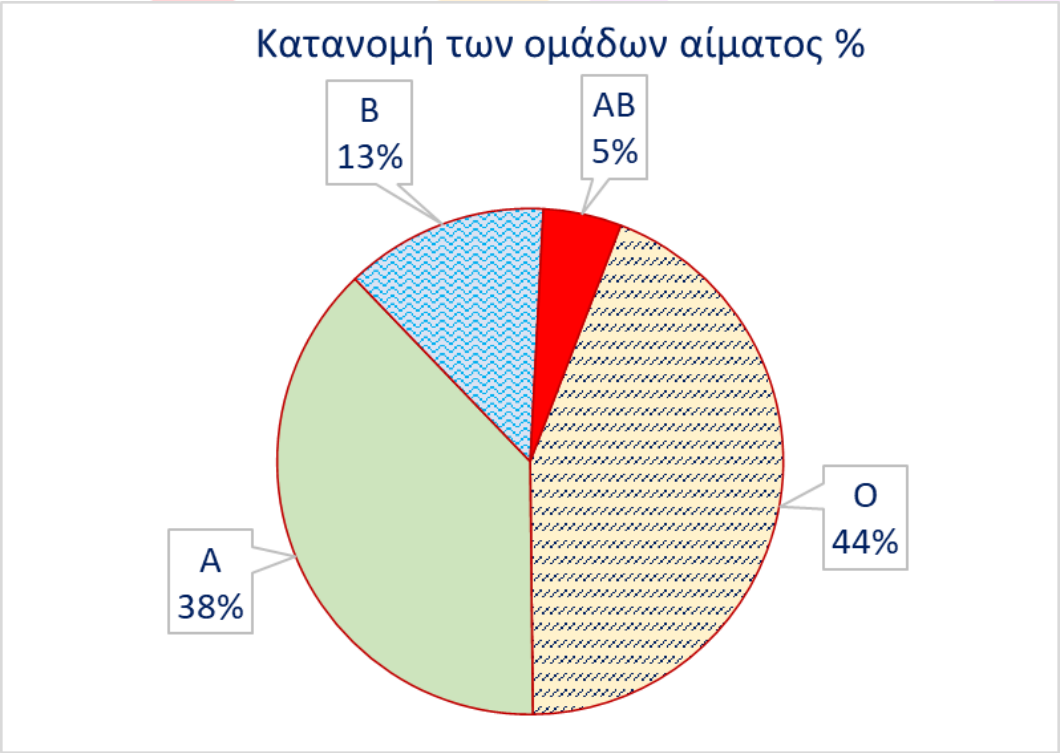
β) να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα Α,

γ) να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα Α ή σ' ένα που ανήκει στην ομάδα Β,

δ) να δεχθεί αίμα από ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα Β,

ε) να δεχθεί αίμα από οποιοδήποτε άτομο.

(Μονάδες 25)



ΛΥΣΗ

α) Μόνο άτομα με ομάδα αίματος Ο, μπορούν να δώσουν αίμα σε άτομα όλων των ομάδων (Ο, Α, Β και ΑΒ). Δίνεται ότι το 44% του πληθυσμού της πόλης είναι άτομα με ομάδα αίματος Ο. Άρα, για ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο, η πιθανότητα αυτό, να μπορεί να δώσει αίμα σε οποιοδήποτε άτομο, είναι $p_1 = 0{,}44$.

β) Ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα Α, μπορεί να δεχθεί αίμα από άλλο άτομο που ανήκει στην ίδια ομάδα Α ή από άτομο που ανήκει στην ομάδα Ο. Το $38\% + 44\% = 82\%$ του πληθυσμού της πόλης είναι άτομα με ομάδα αίματος Α ή Ο. Άρα, για ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο, η πιθανότητα αυτό, να μπορεί να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα Α, είναι $p_2 = 0{,}82$.

γ) Ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα Α ή που ανήκει στην ομάδα Β, μπορεί να δεχθεί αίμα από άτομο που ανήκει στην ίδια ομάδα Α ή Β ή από άτομο που ανήκει στην ομάδα Ο. Το $38\% + 13\% + 44\% = 95\%$ του πληθυσμού της πόλης είναι άτομα με ομάδα αίματος Α, Β ή Ο. Άρα, για ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο, η πιθανότητα αυτό, να μπορεί να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα Α ή σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα Β, είναι $p_2 = 0{,}95$.

δ) Η ομάδα Β μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις ομάδες Β και ΑΒ. Το $13\% + 5\% = 18\%$ του πληθυσμού της πόλης είναι άτομα με ομάδα αίματος Β ή ομάδα αίματος ΑΒ. Άρα, για ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο, η πιθανότητα αυτό, να μπορεί να δεχθεί αίμα από ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα Β, είναι $p_2 = 0{,}18$.

ε) Μόνο άτομα με ομάδα αίματος ΑΒ, μπορούν να δεχθούν αίμα από άτομα όλων των ομάδων (Α, Β, Ο και ΑΒ). Δίνεται ότι το 5% του πληθυσμού της πόλης είναι άτομα με ομάδα αίματος ΑΒ. Άρα, για ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο, η πιθανότητα αυτό, να μπορεί να δεχθεί αίμα από οποιοδήποτε άτομο, είναι $p_2 = 0{,}05$.

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 4

Σ' ένα δείγμα 20 φορολογούμενων πολιτών, οι 4 έχουν ελεγχθεί κατά το παρελθόν, από την Ανεξάρτητη Αρχή Δημοσίων Εσόδων (ΑΑΔΕ). Το τρέχον έτος, από το παραπάνω δείγμα των 20 φορολογουμένων, η ΑΑΔΕ επιλέγει τυχαία δύο φορολογούμενους, για έλεγχο.

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των συνδυασμών των 20 φορολογουμένων ανά 2, είναι 190.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων, για τους δύο, τυχαία επιλεγμένους φορολογούμενους από την ΑΑΔΕ:

i. Α: «και οι δύο φορολογούμενοι έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν»,
ii. Β: «και οι δύο φορολογούμενοι δεν έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν»,
iii. Γ: «μόνο ένας από τους δύο φορολογούμενους, έχει ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν».

(Μονάδες 18)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Το πλήθος των συνδυασμών των 20 φορολογουμένων ανά 2 είναι

$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\cdot(20-2)!} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{\cancel{18!}\cdot 19\cdot 20}{2\cdot\cancel{18!}} = 190.$$

β) Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο Ω, που αποτελείται από όλες τις δυνατές δυάδες των 20 φορολογουμένων, όπου η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία (μη διατεταγμένες δυάδες). Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι τότε, το πλήθος των συνδυασμών των 20 φορολογουμένων ανά 2, που είναι 190.

Αφού η επιλογή των δύο φορολογουμένων γίνεται τυχαία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι δυάδες των 20 φορολογουμένων, είναι εξίσου πιθανές να επιλεγούν, άρα θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

i. Είναι Α: «και οι δύο φορολογούμενοι έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν».

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Α, είναι το πλήθος των συνδυασμών των 4 φορολογούμενων (που έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν), ανά 2. Άρα

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{\cancel{2!}\cdot 3\cdot 4}{2\cdot\cancel{2!}} = 6.$$

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$\mathrm{P(A)} = \frac{6}{190} = \frac{3}{95} \cong 0{,}03.$$

ii. Είναι Β: «και οι δύο φορολογούμενοι δεν έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν».

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Β, είναι το πλήθος των συνδυασμών των $20-4=16$ φορολογούμενων (που δεν έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν), ανά 2. Άρα

$$\binom{16}{2} = \frac{16!}{2!\cdot(16-2)!} = \frac{16!}{2!\cdot 14!} = \frac{\cancel{14!}\cdot 15\cdot 16}{2\cdot\cancel{14!}} = 120.$$

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$\mathrm{P(B)} = \frac{120}{190} = \frac{60}{95} = \frac{12}{19} \cong 0{,}63.$$

iii. Είναι Γ: «μόνο ένας από τους δύο φορολογούμενους, έχει ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν». Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Γ, προκύπτει αν από το πλήθος όλων των δυάδων των 20 φορολογουμένων ανά 2, αφαιρέσουμε το πλήθος των δυάδων των 4 φορολογουμένων (που έχουν ελεγχθεί) ανά 2 και το πλήθος των δυάδων των 16 φορολογουμένων (που δεν έχουν ελεγχθεί) ανά 2. Επομένως είναι $190-(6+120)=64$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστηριο

Εναλλακτικά: Υπάρχουν 4 τρόποι, να επιλεγεί ο φορολογούμενος που ελέγχθηκε και 16 τρόποι, να επιλεγεί ο φορολογούμενος που δεν ελέγχθηκε. Άρα από τη βασική αρχή απαρίθμησης υπάρχουν $4 \cdot 16 = 64$ τρόποι.

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(\Gamma) = \frac{64}{190} = \frac{32}{95} \cong 0{,}34.$$

Εναλλακτικά: Τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $A \cup B \cup \Gamma = \Omega$. Από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$$

$$P(\Gamma) = P(\Omega) - P(A) - P(B)$$

$$P(\Gamma) = 1 - \frac{6}{190} - \frac{120}{190} = \frac{64}{190} \cong 0{,}34.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο