ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά προσανατολισμού

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Σχ. βιβλίο σελ. 111

**Α2.** Σχ. βιβλίο σελ.104

**Α3.** Σχ. βιβλίο σελ.128

**Α4. α)** Λ

**β)** Λ

**γ)** Λ

**δ)** Σ

**ε)** Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** $A_{goh} = A_f = \{x \in A_h \;\; kai \;\; h(x) \in A_g\} = \{x > 0 \;\; kai \;\; lnx \in R\} = (0, +\infty)$

$f(x) = (goh)(x) = g\big(h(x)\big) = g(lnx) = \frac{4-e^{2lnx}}{e^{lnx}} = \frac{4-e^{lnx^2}}{x} = \frac{4-x^2}{x}$ άρα

$f(x) = \frac{4-x^2}{x}$ , $x > 0$

**Β2.** (i)Η f συνεχείς και παραγωγίσιμη στο (0,+ ∞) με

$f'(x) = \frac{-2x \cdot x - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2-4}{x^2} = \frac{-(x^2+4)}{x^2} < 0$ επομένως

η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x > 0$.

(ii) Ισχύει ότι $e < \pi \underset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi} \underset{(4-e^2)<0}{\Longleftrightarrow} \frac{\pi}{e} < \frac{4-\pi^2}{4-e^2}$

**Β3.** $\lim_{\chi \to 0^+} f(x) = \lim_{\chi \to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{\chi \to 0^+} (4 - x^2) \cdot \frac{1}{x} = +\infty$

Άρα η $x = 0$ (άξονας y'y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$ .

Έστω $y = \lambda \cdot x + \beta$ η πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$ επομένως προκύπτει $\lambda = -1$ .

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$$ επομένως $\beta = 0$ .

Άρα, η $C_f$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = -x$ .

**Β4.** Ισχύει ότι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \le \frac{1}{|f(x)|}$

Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ , προκύπτει ότι

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ *και* $\lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{f(x)}\right] = 0$ , οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$$

**<u>ΘΕΜΑ Γ</u>**

**Γ1.** Είναι:

$$\int_2^3 x \cdot f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x \cdot (\frac{1}{x} + \alpha)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx = 1 \Leftrightarrow \left[x + \alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$3 + \frac{9\alpha}{2} - 2 - \frac{4\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9\alpha}{2} - \frac{4\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

**Γ2. i.** Για $\alpha = 0$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, x < 1 \\ \frac{1}{x}, x \ge 1 \end{cases}$$

Για να ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ θα πρέπει η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ .Πράγματι:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-2)=-1(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=-1(2)$$

Από (1),(2) ισχύει: $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$,άρα υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $x_0=1$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ με $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$.΄Αρα $y-1=(-1)(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2$ και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ θα ικανοποιεί την σχέση $\varepsilon\varphi\omega=-1$,δηλαδή $\omega=135^o$.

**Γ3.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική και στο $(1,+\infty)$ ως ρητή. Επίσης αφού αποδείξαμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ είναι και συνεχής σε αυτό,άρα η $f$ είναι παραγωγίσιμη (και συνεχής) στο $\Re$.Τότε:

$f'(x)=2x-3<0, x\in(-\infty,1)$ άρα $f\downarrow(-\infty,1]$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0, x\in(1,+\infty)$ άρα $f\downarrow[1,+\infty)$ οπότε η $f\downarrow\Re$ άρα και 1-1 στο $\Re$.Αφού η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Re$ το σύνολο τιμών της είναι το $f(\Re)=(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x))=(0,+\infty)$ αφού

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=+\infty$

Επιμέλεια απαντήσεων: Αγοργιανίτης Ιωάννης, Βερέμης Δημήτριος, Δελενίκα Μαρία, Ιωσηφίδης Σταύρος, Κανελλόπουλος Γιώργος, Τσίμος Βασίλειος.