ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) – ΕΠΑ.Λ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 30

Α2. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο σελ. 22

Α3. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12$

Β2.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της f στο $x_0 = 1$ είναι $f'(1)$. Επειδή η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $\chi'\chi$ θα είναι

$$f'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 + 2a - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a = 6$$

$$\Leftrightarrow a = 3$$

Β3.

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1-3}{2}=-\frac{4}{2}=-2\\ \frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		+	**0**	−	**0**	+	
$f'(x)$		↗		↘		↗	

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-2$ το

$$f(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+10=-16+12+24+10=30$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=1$ το

$$f(1)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-12\cdot 1+10=2+3-12+10=3$$

Β4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^2+6x-12}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6\cdot(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}[6(x+2)]=6\cdot(1+2)=18$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i\nu_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	ν_3	$18\nu_3$
[20, 24)	22	5	110
Σύνολο	-	$40+\nu_3$	$520+18\nu_3$

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = 14 \Leftrightarrow \frac{520 + 18\nu_3}{40 + \nu_3} = 14 \Leftrightarrow 520 + 18\nu_3 = 14 \cdot (40 + \nu_3)$$

$$\Leftrightarrow 520 + 18\nu_3 = 560 + 14\nu_3 \Leftrightarrow 18\nu_3 - 14\nu_3 = 560 - 520 \Leftrightarrow 4\nu_3 = 40 \Leftrightarrow$$

$$\nu_3 = 10$$

Γ2.

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	$18\nu_3$
[20, 24)	22	5	110
Σύνολο	-	50	700

Γ3.

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^{4}(x_i - \bar{x}) \cdot \nu_\iota}{\nu} = \frac{[(10-14)^2 \cdot 20 + (14-14)^2 \cdot 15 + (18-14)^2 \cdot 5 + (22-14)^2 \cdot 5]}{50} =$$

$$= \frac{16 \cdot 20 + 16 \cdot 10 + 64 \cdot 5}{50} = \frac{320 + 160 + 320}{50} = \frac{800}{50} = 16$$

Γ4.

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$$

$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \cdot 100\% = \frac{200}{7}\% > 10\%$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x) = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{x^4} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{x^4}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, απορρίπτεται

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^4} > 0 \overset{x^4>0}{\Longleftrightarrow} 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^4} < 0 \overset{x^4>0}{\Longleftrightarrow} 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖	$+$
$f'(x)$	↘	‖	↗

Η f είναι γνωσίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ2.

Ισχύει ότι: $-4 \leq x \leq -1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(-4) \geq f(x) \geq \ f(-1) \ \ (1)$

Είναι $f(-4) = \ -\frac{1}{(-4)^2} = -\frac{1}{16}$

$f(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1$

Άρα η σχέση (1) γράφεται: $-\frac{1}{16} \geq f(x) \geq \ -1 \ \ \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$

Δ3.

Έστω (ε): $y = \lambda\chi + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M\big(1, f(1)\big)$

$$\lambda = f'(1) = 2 \cdot \frac{1}{1^4} = 2$$

Άρα η (ε) γράφεται: $y = 2x + \beta$

$f(1) = -\frac{1}{1^4} = -1$, οπότε $M(1, -1)$

$M(1, -1) \in (\varepsilon)$ άρα $-1 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$

Οπότε (ε): $y = 2x - 3$

Δ.4

$y_i = 2x_i - 3, i = 1,2,3$

$\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$

$s_y = 2s_x = 2 \cdot 2 = 4$

Άρα $CV = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4}{5} \cdot 100\% = 80\%$

Επιμέλεια απαντήσεων: ΜΑΡΙΑ ΔΕΛΕΝΙΚΑ