Νέο Φροντιστήριο

Τράπεζα Θεμάτων Α Λυκείου

Άλγεβρα

Κεφάλαιο 2: Οι Πραγματικοί Αριθμοί

Θέμα 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x\geq 2$, $A=3x-4$

ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$$ (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) i) Ισχύει ότι:

$$x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 3\cdot 2 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0$$

Άρα $|3x - 6| = 3x - 6$

Τότε:

$$A = |3x - 6| + 2 = 3x - 6 + 2 = 3x - 4$$

ii) Ισχύει ότι:

$$x < 2 \Leftrightarrow 3x < 3\cdot 2 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0$$

Άρα $|3x - 6| = -(3x - 6) = 6 - 3x$

Τότε:

$$A = |3x - 6| + 2 = 6 - 3x + 2 = 8 - 3x$$

β) Για κάθε $x \geq 2$ είναι $|3x - 6| = 3x - 6$. Τότε:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = \frac{(3x)^2 - 4^2}{3x - 6 + 2} = \frac{(3x - 4)(3x + 4)}{3x - 4} = 3x + 4$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί *α, β, γ, δ* με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι *α=3β* και *δ=5γ* (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$ (Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4\beta \Leftrightarrow \alpha = 3\beta \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma = \delta - \gamma \Leftrightarrow \delta = 5\gamma$$

β) Για $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$ η παράσταση Π γράφεται:

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma} = \frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{\beta 5\gamma-\beta\gamma} = \frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma} = 1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Έστω *x, y* πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: *y=2x*. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης;

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$ (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$\frac{4x+5y}{x-4y} = -2 \Leftrightarrow 4x + 5y = -2(x-4y) \Leftrightarrow 4x + 5y = -2x + 8y \Leftrightarrow 6x = 3y \Leftrightarrow y = 2x$$

β) Για $y = 2x$ η παράσταση Α γράφεται:

$$A = \frac{2x^2+3y^2+xy}{xy} = \frac{2x^2+3(2x)^2+x\cdot 2x}{x\cdot 2x} = \frac{2x^2+3\cdot 4x^2+2x^2}{2x^2} = \frac{16x^2}{2x^2} = 8$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

α) Ισχύει ότι:

$$5 < x < 10 \Leftrightarrow (5 < x \text{ και } x < 10) \Leftrightarrow (0 < x - 5 \text{ και } x - 10 < 0)$$

Τότε:

$$|x - 5| = x - 5 \text{ και } |x - 10| = -(x - 10)$$

β) Είναι:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-(x-10)}{x-10} = 1 + (-1) = 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $K = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το *x*, ώστε η παράσταση *K* να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν -2<x<3, να αποδείξετε ότι παράσταση *K* σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α)

$$K=\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}-\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\frac{|x+2|}{x+2}-\frac{|x-3|}{x-3}$$

Η παράσταση Κ έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x+2\neq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ \kappa\alpha\iota \\ x\neq 3 \end{cases}$$

β) Ισχύει: $-2<x<3$, οπότε $x+2>0$ και $x-3<0$.

Άρα $|x+2|=x+2$ και $|x-3|=-(x-3)$.

Οπότε: $K=\frac{|x+2|}{x+2}-\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{x+2}{x+2}-\frac{-(x-3)}{x-3}=1+1=2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2)<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$. (Μονάδες 10)

β) $x^2+4x+3<0$. (Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$d(x, -2) < 1 \Leftrightarrow |x - (-2)| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x + 2| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < x + 2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 - 2 < x + 2 - 2 < 1 - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 < x < -1$$

β) Από το σκέλος (α) ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x + 2| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x + 2|^2 < 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 < 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A=\left(\sqrt{2}\right)^6, \qquad B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6, \qquad \Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6 \quad .$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A+B+\Gamma=23 \ .$$ (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3} \quad \text{και} \quad \sqrt[6]{6} \quad .$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$A + B + \Gamma = \left(\sqrt{2}\right)^6 + \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 + \left(\sqrt[6]{6}\right)^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 + \left(6^{\frac{1}{6}}\right)^6 =$$

$$= 2^{\frac{6}{2}} + 3^{\frac{6}{3}} + 6^{\frac{6}{6}} = 2^3 + 3^2 + 6 = 8 + 9 + 6 = 23$$

β) Είναι: $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{9}$. Τότε:

$$6 < 9 \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{9} \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Έχουμε:

$K \geq \Lambda \quad \Leftrightarrow$

$K - \Lambda \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha^2 + \alpha^2) + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Άρα $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

β) Ισχύει $K = \Lambda \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2 = 0$ και $(\alpha - \beta)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha = 0$ και $\alpha = \beta$

Τελικά $K = \Lambda$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος *x* εκατοστά και πλάτος *y* εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη *x* και *y* ισχύει: $4 \le x \le 7$ και $2 \le y \le 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β) Αν το *x* μειωθεί κατά 1 και το *y* τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2x + 2y$. Τότε:

$$4 \le x \le 7 \Leftrightarrow 2\cdot 4 \le 2x \le 2\cdot 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14 \ (1) \quad \text{και}$$

$$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 2\cdot 2 \le 2y \le 2\cdot 3 \Leftrightarrow 4 \le 2y \le 6 \ \ (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$8 \quad + 4 \le 2x + 2y \le 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \le \Pi \le 20$$

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$$P = 2(x - 1) + 2\cdot 3y = 2x + 6y - 2$$

Τότε:

$$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 6\cdot 2 \le 6y \le 6\cdot 3 \Leftrightarrow 12 \le 6y \le 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 \le 6y - 2 \le 18 - 2 \Leftrightarrow 10 \le 6y - 2 \le 16 \ (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$$8 + 10 \le 2x + 6y - 2 \le 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \le P \le 30$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = |2x-4| \quad \text{και} \quad B = |x-3|,$$ όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \le x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$. (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$2 \le x < 3 \Leftrightarrow (2 \le x$ και $x < 3) \Leftrightarrow (4 \le 2x$ και $x - 3 < 0) \Leftrightarrow (0 \le 2x - 4$ και $x - 3 < 0)$

Τότε:

$$A = |2x - 4| = 2x - 4 \text{ και } B = |x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$$

Άρα:

$$A + B = 2x - 4 + 3 - x = x - 1$$

β) Είναι:

$$A + B = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3,$$

αδύνατο διότι $x \in [2, 3)$. Επομένως δεν υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε $A + B = 2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A=4$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$. (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{5}\sqrt{5}-\sqrt{5}\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{\sqrt{9}+\sqrt{25}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{3+5}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$$

β) Η εξίσωση γράφεται:

$$|x + A| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x + 4| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 4 = 1 \text{ ή } x + 4 = -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 \text{ ή } x = -5)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \quad \text{και} \quad -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι $2 \le \alpha \le 4$ (1) και

$$-4 \le \beta \le -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 \cdot (-2) \ge -2\beta \ge -3 \cdot (-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \ge -2\beta \ge 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \le -2\beta \le 8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$2 + 6 \le \alpha - 2\beta \le 4 + 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \le \alpha - 2\beta \le 12$$

β) Ισχύει ότι:

$$2 \le \alpha \le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2 \le \alpha^2 \le 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \le \alpha^2 \le 16 \ (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$6 \cdot 2 \le -2\alpha\beta \le 8 \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 \le -2\alpha\beta \le 32 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$4 + 12 \le \alpha^2 - 2\alpha\beta \le 16 + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 \le \alpha^2 - 2\alpha\beta \le 48$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K= 2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$ (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3 - \beta) =$$
$$= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - (6\alpha - 2\alpha\beta) =$$
$$= \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$$
$$= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά ισχύει ότι:

$$K \geq \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 \geq 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε τιμή των α, β.

γ) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$K = \Lambda \Leftrightarrow \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((\alpha + \beta)^2 = 0 \text{ και } (\alpha - 3)^2 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta = 0 \text{ και } \alpha - 3 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha = -\beta \text{ και } \alpha = 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha = 3 \text{ και } \beta = -3)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι *μη μηδενικοί* πραγματικοί αριθμοί *α, β,* με *α* ≠*β* για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{a^2+1}{\beta^2+1}=\frac{a}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί *α* και *β* είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{a^{22}\cdot\left(\beta^3\right)^8}{a^{-2}\cdot(a\beta)^{25}}$ (Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

α) Η δοθείσα ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta(\alpha^2+1) = \alpha(\beta^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta = \alpha\beta^2 + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta - \alpha\beta^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha\beta-1) = 0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = 1$$

Άρα οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β) Η παράσταση γράφεται:

$$K = \frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}} = \frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot\alpha^{25}\cdot\beta^{25}} = \frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{23}\cdot\beta^{25}} = \frac{\alpha^{22}}{\alpha^{23}}\cdot\frac{\beta^{24}}{\beta^{25}} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = 1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό *x* ισχύει: *d(2x , 3) = 3 – 2x*

α) Να αποδείξετε ότι $x \le \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \le \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του *x*.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$d(2x, 3) = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x - 3| = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x - 3| = -(2x - 3) \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$$

Τότε από τη σχέση (1) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$|2x - 3| = -(2x - 3) \Leftrightarrow 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

β) Επειδή ισχύει $x \leq \frac{3}{2}$ είναι $2x - 3 \leq 0$ και $3 - x \geq 0$. Τότε:

$$|2x - 3| = -(2x - 3) \quad \text{και} \quad |3 - x| = 3 - x$$

Επομένως η παράσταση Κ γράφεται:

$$K = |2x - 3| - 2|3 - x| = -(2x - 3) - 2(3 - x) = 3 - 2x - 6 + 2x = -3$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός *x* για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}$ (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3+2<x-2+2<3+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1<x<5$$

β) Ισχύει ότι:

$$-1<x<5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1<x \text{ και } x<5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0<x+1 \text{ και } x-5<0)$$

Άρα:

$$|x+1| = x+1 \quad \text{και} \quad |x-5| = -(x-5) = 5-x$$

Τότε:

$$K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3} = \frac{x+1+5-x}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί *y*, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$|y-2|<1 \Leftrightarrow -1<y-2<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1+2<y-2+2<1+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<y<3 \Leftrightarrow y\in(1,3)$$

β) Ισχύει ότι:

$$1<y<3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1<y \text{ και } y<3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0<y-1 \text{ και } y-3<0)$$

Άρα:

$$|y-1|=y-1 \quad \text{και} \quad |y-3|=-(y-3)=3-y$$

Τότε:

$$K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2}=\frac{y-1+3-y}{2}=\frac{2}{2}=1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y \le -1$,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$3 \le x \le 5 \Leftrightarrow -3 \ge -x \ge -5 \Leftrightarrow -5 \le -x \le -3 \ (1)$$

και από υπόθεση ισχύει ότι $-2 \le y \le -1$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-2-5 \le y-x \le -1-3 \Leftrightarrow -7 \le y-x \le -4$$

β) Ισχύει ότι:

$$3 \le x \le 5 \Leftrightarrow 3^2 \le x^2 \le 5^2 \Leftrightarrow 9 \le x^2 \le 25 \ (3)$$

και:

$$-2 \le y \le -1 \Leftrightarrow -2\cdot(-1) \ge y\cdot(-1) \ge -1\cdot(-1) \Leftrightarrow 2 \ge -y \ge 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \le -y \le 2 \Leftrightarrow 1^2 \le (-y)^2 \le 2^2 \Leftrightarrow 1 \le y^2 \le 4 \ (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$9+1 \le x^2+y^2 \le 25+4 \Leftrightarrow 10 \le x^2+y^2 \le 29$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *B*; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\leq 2$, ισχύει *A*=B. (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

α) Πρέπει:

$$(x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

β) Πρέπει:

$$(2-x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$$

γ) Για κάθε $x \leq 2$, είναι:

$$|x-2| = -(x-2) = 2-x$$

Τότε:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2-x \quad \text{και} \quad B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2-x$$

Άρα $A = B$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι Α= $\sqrt[3]{5}$, Β= $\sqrt{3}$, Γ= $\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$ (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β . (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} =$$

$$= 5^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

β) Είναι:

$$A = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{25} \quad \text{και} \quad B = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{27}$$

Ισχύει ότι:

$$25 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27} \Leftrightarrow A < B$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2+B^2$. (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$A \cdot B = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$$

β) Ισχύει ότι:

$$\Pi = A^2 + B^2 =$$

$$= (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2 =$$

$$= 2^2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 2^2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 =$$

$$= 4 + 3 + 4 + 3 = 14$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<x<1$ (Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$1, \quad x, \quad x^2$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$|2x-1|<1 \Leftrightarrow -1<2x-1<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1+1<2x-1+1<1+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<2x<2 \Leftrightarrow 0<x<1$$

β) Ισχύει ότι $0<x<1$, οπότε:

$$x<1 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x\cdot x<1\cdot x \Leftrightarrow x^2<x$$

Τελικά:

$$x^2<x<1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{a}$$ (Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$0 < \alpha < 1 \overset{\alpha^2>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha^2 < 1 \cdot \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 < \alpha^2$$

β) Ισχύει ότι:

- $0 < \alpha \Leftrightarrow 0 < \alpha^3$,
- $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha^3 < \alpha$
- $\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha^3 < 1^3 \Leftrightarrow \alpha^3 < 1$,
- $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$

Τελικά:

$$0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς *x, y* ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς *x, y* ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2-2x+1^2+y^2+2\cdot 3\cdot y+3^2=$$
$$=x^2-2x+1+y^2+6y+9=x^2+y^2-2x+6y+10$$

β) Ισχύει ότι:

$$x^2+y^2-2x+6y+10=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} (x-1)^2+(y+3)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x-1)^2=0 \text{ και } (y+3)^2=0) \Leftrightarrow (x-1=0 \text{ και } y+3=0) \Leftrightarrow (x=1 \text{ και } y=-3)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$. (Μονάδες 15)

β) Αν *α<0*, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$. (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

α) Για κάθε $\alpha < 0$, ισχύει:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

β) Αφού $\alpha < 0$ είναι $|\alpha| = -\alpha$, Τότε:

$$|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow -\alpha - \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2, \text{ ισχύει από σκέλος (α)}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) *x+y* (Μονάδες 5)

β) *2x-3y* (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$ και βρίσκουμε:

$$2+1 \le x+y \le 3+2 \Leftrightarrow 3 \le x+y \le 5.$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $2 \le x \le 3$ με 2 και βρίσκουμε:

$$2 \cdot 2 \le 2x \le 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 4 \le x \le 6. \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $1 \le y \le 2$ με -3 και βρίσκουμε:

$$(-3) \cdot 1 \ge -3y \ge (-3) \cdot 2 \Leftrightarrow -3 \ge -3y \ge -6 \Leftrightarrow -6 \le -3y \le -3 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$4-6 \le 2x-3y \le 6-3 \Leftrightarrow -2 \le 2x-3y \le 3.$$

γ) Ισχύει ότι:

$$2 \le x \le 3 \ (3) \ \text{και} \ 1 \le y \le 2 \Leftrightarrow 1 \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1 \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \le x \cdot \frac{1}{y} \le 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{y} \le 3.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1) (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha|\cdot|\beta|} \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha|\cdot|\beta| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha|\cdot|\beta| \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

β) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow (\alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta),$$

δηλαδή όταν οι αριθμοί είναι ίσοι ή αντίθετοι.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί *α, β*, με *α > 0* και *β > 0*. Να αποδείξετε ότι:

α) $a+\frac{4}{a}\geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$ (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0, \text{ το οποίο ισχύει}$$

β) Είναι:

$$\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \quad (1)$$

και όμοια αποδεικνύουμε ότι:

$$\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$

$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

$\sqrt{5} \cong 2{,}24$

$\sqrt{7} \cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

- $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cong 2 \cdot 2{,}24 = 4{,}48$
- $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \cong 3 \cdot 2{,}24 = 6{,}72$
- $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \cong 4 \cdot 2{,}24 = 8{,}96$

β) Ισχύει ότι:

$$\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}} = \frac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3^3} < \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{4^3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27 < 30 < 64, \text{ το οποίο ισχύει}$$

β) Έστω ότι $\sqrt[3]{30} < 6 - \sqrt[3]{30}$. Τότε:

$$\sqrt[3]{30} < 6 - \sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30} < 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30} < 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{30}\right)^3 < 3^3 \Leftrightarrow 30 < 27, \text{ άτοπο}$$

Άρα $\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του *x* σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Αν $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$ (Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

α) Πρέπει:

$$(1 - x \geq 0 \text{ και } x^4 \geq 0) \Leftrightarrow (-x \geq -1 \text{ και } x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1]$$

β) Για $x = -3$, είναι:

$$A = \sqrt{1-(-3)} - \sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt{1+3} - \sqrt[4]{3^4} = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$$

Τότε:

$$A^3 + A^2 + A + 1 = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$ (Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

α) Πρέπει:

$$(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty)$$

β) Για x = 4, είναι:

$$B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

Τότε:

$$B^2 + 6B = 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 + 12 = 16 = 2^4 = B^4$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}\,,\quad 1,\quad \sqrt[3]{2}$$ (Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$A - B = \left(\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = \left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^3 - \left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right]^2 =$$
$$= 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

β) Ισχύει ότι:

$$1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 1 < \sqrt[3]{2} \quad (1)$$

και

$$A - B = 4 > 0 \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^6 > \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 \Leftrightarrow \sqrt{2} > \sqrt[3]{2} \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$. (Μονάδες 12)

β) $0<A<4$. (Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

α) Είναι:

$$1 < x < 4 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 4) \Leftrightarrow (0 < x - 1 \text{ και } x < 4)$$

Άρα $|x - 1| = x - 1$

Ισχύει ακόμη ότι:

$$2 < y < 3 \Leftrightarrow (2 < y \text{ και } y < 3) \Leftrightarrow (2 < y \text{ και } y - 3 < 0)$$

Άρα $|y - 3| = -(y - 3) = 3 - y$

Τότε:

$$A = |x - 1| + |y - 3| = x - 1 + 3 - y = x - y + 2$$

β) Είναι $1 < x < 4$ (1) και:

$$2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2 < -y + 2 < -2 + 2 \Leftrightarrow -1 < -y + 2 < 0 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1 - 1 < x - y + 2 < 0 + 4 \Leftrightarrow 0 < x - y + 2 < 4$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0<\alpha<\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$, οπότε , $\frac{3}{\alpha}>\frac{3}{\beta}$. Επομένως, $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

β) Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\alpha^3<\beta^3$. Επιπλέον, από το ερώτημα (α) είναι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$, οπότε με πρόσθεση των δυο ανισοτήτων παίρνουμε:

$$\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$$

που είναι το ζητούμενο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2.$

(Μονάδες 12)

β) $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Κάνοντας πράξεις στη δοθείσα σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\alpha\cdot\frac{1}{\beta}+\beta\cdot\frac{1}{\alpha}+\beta\cdot\frac{1}{\beta}=4,\text{τότε}$$
$$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1=4,\text{τότε}$$
$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2\Leftrightarrow$$
$$\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta\Leftrightarrow$$
$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0\Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)^2=0\Leftrightarrow$$
$$\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\alpha=\beta.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι η παράσταση $A = 0$, πρέπει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ που ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

β)Είναι: $A - B = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, ισχύει σαν τετράγωνο αριθμού.

γ)$A - B = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ και $\beta=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}\right)=\frac{6}{2}=3$$

και

$$\alpha\cdot\beta=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{4}\left(3^2-\sqrt{5}^2\right)=\frac{1}{4}(9-5)=\frac{4}{4}=1$$

Άρα, $\alpha+\beta=3$ και $\alpha\cdot\beta=1$

β) Έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)^2+\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)^2=\frac{1}{4}\left(9+5+6\sqrt{5}+9+5-6\sqrt{5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 28=7$$

που είναι το ζητούμενο.

Υπόδειξη για εναλλακτική λύση.

Το ερώτημα (β) μπορεί να αποδειχθεί άμεσα από το (α) με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0.$$

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i. Από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=0$, προκύπτει ότι $\beta+\gamma=-\alpha$, που είναι το ζητούμενο.

ii. Με τη βοήθεια του προηγούμενου υποερωτήματος, έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha^2}{-\alpha}=-\alpha .$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha .$$

Ομοίως, από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε $\gamma+\alpha=-\beta$ και $\alpha+\beta=-\gamma$, οπότε

$$\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta^2}{-\beta}=-\beta \text{ και } \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma^2}{-\gamma}=-\gamma .$$

Επομένως,

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

που είναι το ζητούμενο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = 2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2 = x^2$

β) Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε στην α) όπου x = 2021 και y=1 προκύπτει ότι το αριστερό μέλος είναι της μορφής: $2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2$ άρα θα είναι ίσο με το Α, επομένως και ίσο με το $x^2 = 2021^2$ επομένως ο ζητούμενος φυσικός είναι ο 2021.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0 \le \alpha + \beta \le 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \le \alpha \le 3$ οπότε $\alpha - 3 \le 0$ και άρα $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$.

Επίσης είναι $-2 \le \beta \le -1$ οπότε $\beta + 2 \ge 0$ και άρα $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β) Με πρόσθεση κατά μέλη των $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$ έχουμε ότι $0 \le \alpha + \beta \le 2$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $0 \le \alpha + \beta \le 2$ οπότε $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$.

Συνεπώς η παράσταση γίνεται :

$$|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2| = \alpha + \beta + 3 - \alpha - (\beta + 2) = \alpha + \beta + 3 - \alpha - \beta - 2 = 1.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$(\alpha+2)^2+1=\alpha^2+4\alpha+2^2+1=\alpha^2+4\alpha+5=A$$

β)

i. Ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$A+B\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+2)^2+1+(2\beta+1)^2-1\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+2)^2+(2\beta+1)^2\geq 0\,,$$

που ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.

ii. Από το ερώτημα β)i) βλέπουμε ότι η ισότητα ισχύει για

$$(\alpha+2)^2+(2\beta+1)^2=0$$

η οποία ισχύει για:

$$\{(\alpha+2)^2=0 \text{ και } (2\beta+1)^2=0\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{\alpha=-2 \text{ και } \beta=-\frac{1}{2}\right\}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x,\ y$ ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17\,.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2+y^2-2x+8y+17=0$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε την ζητούμενη ισότητα, θα χρησιμοποιήσουμε ευθεία απόδειξη. Έχουμε λοιπόν:

$(x-1)^2+(y+4)^2=(x^2-2x+1)+(y^2+8y+16)=x^2+y^2-2x+8y+17$.

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+y^2-2x+8y+17=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$
$$(x-1)^2+(y+4)^2=0 \Leftrightarrow$$
$(x-1)^2=0$ και $(y+4)^2=0$, δηλαδή
$x-1=0$ και $y+4=0$, οπότε τελικά
$x=1$ και $y=-4$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i. Αν αντικαταστήσουμε τα α^2, β^2 από τις δοσμένες ισότητες, βρίσκουμε ότι

$$\alpha^2-\beta^2=2\alpha+\beta-2\beta-\alpha=\alpha-\beta.$$

ii. Η τελευταία ισότητα γράφεται $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha-\beta$. Αλλά, $\alpha-\beta\neq 0$, αφού οι αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, οπότε παίρνουμε $\alpha+\beta=1$, που είναι το ζητούμενο.

β) Όπως προηγουμένως, έχουμε:

$$A=\alpha^2+\beta^2=2\alpha+\beta+2\beta+\alpha=3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)=3\cdot 1=3$$

αφού $\alpha+\beta=1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha > \beta$ και ισοδύναμα $\alpha - \beta > 0$, οπότε $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$.

Επίσης $\alpha > 1$ ισοδύναμα $1 - \alpha < 0$, οπότε $|1 - \alpha| = \alpha - 1$.

Άρα $\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} - \dfrac{\alpha-1}{1-\alpha} = 1 + \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1+1 = 2$.

β) Είναι

$\alpha > 1$ και $\beta > 1$, οπότε

$\alpha + \beta > 1+1$, δηλαδή

$\alpha + \beta > 2$ και από το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\alpha + \beta > \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε :

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2=10$$

β) Είναι

$\alpha\beta=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=3-1=2$ οπότε

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{10}{2}=5$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy\,.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$

(Μονάδες 8)

ii. $y=\dfrac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\dfrac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) i. Από τη δοσμένη ισότητα με πράξεις έχουμε:

$x^2+4xy+xy+4y^2-9xy=0$, οπότε $x^2+4y^2-4xy=0$, δηλαδή $(2y-x)^2=0$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Είναι: $(2y-x)^2=0$, οπότε $2y-x=0$, άρα $y=\frac{x}{2}$ που είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\frac{x}{2}=y$, (1).

Με τη βοήθεια της (1) έχουμε:

$$\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=(2y-y)^2+(2y+y)^2=y^2+(3y)^2=y^2+9y^2=10y^2$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να δείξετε ότι $y=2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2\text{, δηλαδή}$$

$$4x+5y=-2(x-4y)\text{, οπότε}$$

$$4x+5y=-2x+8y\text{, δηλαδή}$$

$$3y=6x \text{ και τελικά}$$

$$y=2x$$

β) Για $y=2x$ η παράσταση A γράφεται:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}=\frac{2x^2+3(2x)^2+x(2x)}{x(2x)}=\frac{2x^2+3(4x^2)+2x^2}{2x^2}=$$

$$=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \le \alpha \le 4$ (1)

και

$$-4 \le \beta \le -3 \text{, οπότε}$$

$$-4 \cdot 2 \le \beta \cdot 2 \le -3 \cdot 2 \text{, και τελικά}$$

$$-8 \le 2\beta \le -6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), και έχουμε:

$$2-8 \le \alpha + 2\beta \le 4-6 \text{, οπότε τελικά}$$

$$-6 \le \alpha + 2\beta \le -2 .$$

β) Επειδή δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη, η παράσταση $\alpha - \beta$ γράφεται $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Είναι $2 \le \alpha \le 4$ (1)

και

$-4 \le \beta \le -3$, οπότε πολ/ζουμε με (-1) τα μέλη της ανισότητας και αυτή αλλάζει φορά

$$-4 \cdot (-1) \ge \beta \cdot (-1) \ge -3 \cdot (-1),$$

$$4 \ge -\beta \ge 3 \text{ και τελικά}$$

$$3 \le -\beta \le 4 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (3), και έχουμε:

$$2+3 \le \alpha - \beta \le 4+4 \text{, οπότε τελικά}$$

$$5 \le \alpha - \beta \le 8 .$$

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ έχουμε:

$(2\alpha - 1)(\beta - 1) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta - \beta - 2\alpha + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 2\alpha + \beta$.

β) Για να είναι οι αριθμοί x και y αντίθετοι αρκεί να δείξουμε ότι:

$x + y = 0$.

Συνεπώς,

$x + y = (\alpha - \beta) + \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta = \alpha - \beta + \alpha - 2\alpha\beta + 2\beta = 2\alpha + \beta - 2\alpha\beta = 0$ ισχύει.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$

(Μονάδες 12)

β) Αν x,y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow -1+3 < y-3+3 < 1+3 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $E = xy$.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ βρίσκουμε:

$1 \cdot 2 < x \cdot y < 3 \cdot 4 \Leftrightarrow 2 < E < 12$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι Π = 2x + 2y. Τότε:

$4 \le x \le 7 \Leftrightarrow 2\cdot 4 \le 2x \le 2\cdot 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14$ (1) και

$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 2\cdot 2 \le 2y \le 2\cdot 3 \Leftrightarrow 4 \le 2y \le 6$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$8+4 \le 2x + 2y \le 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \le \Pi \le 20$.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$P = 2(x-1) + 2\cdot 3y = 2x + 6y - 2$.Τότε:

$$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 6\cdot 2 \le 6y \le 6\cdot 3 \Leftrightarrow 12 \le 6y \le 18$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 \le 6y - 2 \le 18 - 2 \Leftrightarrow 10 \le 6y - 2 \le 16 \ (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$8 + 10 \le 2x + 6y - 2 \le 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \le P \le 30$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Ανοίγοντας τις παρενθέσεις στη δοθείσα ισότητα, έχουμε:

$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6 + 4xy = 5y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 5y^2 = 6 - 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5.$

β) Παρατηρούμε ότι $P = [(x+y)(x-y)]^3 = (x^2 - y^2)^3 = 5^3 = 125.$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x+4|<2$.

(Μονάδες 15)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$|x+2|<1 \Leftrightarrow$$
$$-1<x+2<1 \Leftrightarrow$$
$$-1-2<x+2-2<1-2 \Leftrightarrow$$
$$-3<x<-1.$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$-3<x<-1$, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2, οπότε

$-6<2x<-2$, προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το 4 και έχουμε

$-2<2x+4<2$, οπότε τελικά

$$|2x+4|<2.$$

Εναλλακτικά, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης $|x+2|<1$ με το 2 και έχουμε

$2\cdot|x+2|<2\cdot 1$, οπότε

$|2\cdot(x+2)|<2$ και τελικά

$$|2x+4|<2.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1,1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|2x| < 2$, οπότε

$2|x| < 2$, διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2 και έχουμε

$|x| < 1$ και τελικά

$-1 < x < 1$

β) Η ανίσωση

$x^2 < 1$ ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει η

$\sqrt{x^2} < 1$,που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η

$|x| < 1$, που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει

$-1 < x < 1$, δηλαδή $x \in (-1,1)$,που ισχύει.

Άρα για κάθε $x \in (-1,1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6,8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση (I) γράφεται $|x-7|<1 \Leftrightarrow -1<x-7<1 \Leftrightarrow 7-1<x<7+1$.

Ώστε $6<x<8 \Leftrightarrow x \in (6,8)$.

β) Είναι $k \in (6,8) \Leftrightarrow 6<k<8 \Leftrightarrow \frac{1}{6}>\frac{1}{k}>\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{24}{6}>\frac{24}{k}>\frac{24}{8} \Leftrightarrow 4>\frac{24}{k}>3$.

Άρα $3<\frac{24}{k}<4 \Leftrightarrow \frac{24}{k} \in (3,4)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

(Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

(Μονάδες 13)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = (\sqrt{3})^6 = ((\sqrt{3})^2)^3 = 3^3 = 27$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6 = ((\sqrt[3]{3})^3)^2 = 3^2 = 9$.

Άρα : $A - B = 27 - 9 = 18$.

β) Αφού οι αριθμοί $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}$ είναι θετικοί θα έχουν την ίδια διάταξη και όταν υψωθούν εις την έκτη. Από το ερώτημα α) $(\sqrt{3})^6 = A = 27$ και $(\sqrt[3]{3})^6 = B = 9$.

Άρα: $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

(Μονάδες 5)

β) $2x-3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

νέο φροντιστήριο

ΛΥΣΗ

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις $2 \le x \le 3$ και βρίσκουμε:

$$2+1 \le x+y \le 3+2 \Leftrightarrow 3 \le x+y \le 5.$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $2 \le x \le 3$ με 2 και βρίσκουμε: $4 \le 2x \le 6$. (1)

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $1 \le y \le 2$ με -3 και βρίσκουμε:

$$-3 \ge -3y \ge -6 \Leftrightarrow -6 \le -3y \le -3 \quad (2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-2 \le 2x-3y \le 3 .$$

γ) Ισχύει ότι: $2 \le x \le 3$ (3) και $1 \le y \le 2 \Leftrightarrow 1 \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1.$ (4)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$\frac{2}{2} \le \frac{x}{y} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{y} \le 3.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
νέο φροντιστήριο

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $\left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 9+4\sqrt{5}$ και $\left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 6-2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 1+2\sqrt{5}$.

(Μονάδες 12)

νέο φροντιστήριο

Λύση

α) Έχουμε ότι:

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

και

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 1^2 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι:

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$\left|2+\sqrt{5}\right| + \left|1-\sqrt{5}\right|.$$

Αλλά $1 < 5 \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$. Οπότε, $\left|1-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 1$.

Άρα,

$$\left|2+\sqrt{5}\right| + \left|1-\sqrt{5}\right| = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 1 + 2\sqrt{5}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

νέο φροντιστήριο